

# BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS BURQ

JEAN-MARC SCHLENKER

**Contrôle de l'équation des ondes dans des  
ouverts comportant des coins**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 126, n° 4 (1998), p. 601-637

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1998\\_\\_126\\_4\\_601\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_4_601_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**CONTRÔLE DE L'ÉQUATION DES ONDES  
DANS DES OUVERTS COMPORTANT  
DES COINS**

PAR NICOLAS BURQ (\*)

---

AVEC UNE ANNEXE EN COLLABORATION AVEC

Jean-Marc SCHLENKER (\*\*)

RÉSUMÉ. — On étudie l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet dans un ouvert borné à coins (inclus dans  $\mathbb{R}^2$ ). On démontre que la condition de contrôle géométrique introduite par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est une condition suffisante pour la contrôlabilité exacte au bord de ce système.

ABSTRACT. — EXACT CONTROLABILITY FOR THE WAVE EQUATION IN CORNER DOMAINS. — We study the wave equation with Dirichlet boundary conditions in a bounded corner domain (included in  $\mathbb{R}^2$ ). We prove that the condition of geometrical control introduced by C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch is a sufficient condition for the exact boundary controlability of this equation.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Mesure de défaut de compacité pour les ondes
3. Propagation faible du support des mesures de défaut
4. Propagation du support des mesures de défaut

Annexe A. Obstacles strictement convexes

Annexe B (en collaboration avec J.-M. Schlenker). Généricité de l'hypothèse de non focalisation

---

(\*) Texte reçu le 20 mars 1998, accepté le 2 septembre 1998.

N. BURQ, Centre de Mathématiques, UMR 7640 du CNRS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX.

Adresse actuelle : Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, URA 760 du CNRS, 91405 Orsay. Email : Nicolas.Burq@math.u-psud.fr.

(\*\*) J.-M. SCHLENKER, Université de Paris Sud, Mathématiques, Bât. 425, URA 1169 du CNRS, 91405 Orsay. Email : Jean-Marc.Schlenker@math.u-psud.fr.

Classification AMS : 35L05, 73D25, 93D05.

Mots clés : équation des ondes, contrôle, ouvert à coins.

### 1. Introduction

On se propose dans cet article de donner des conditions suffisantes pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  comportant des coins, généralisant à ce cadre les conditions de contrôle géométrique de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR92]. Le problème étudié est le suivant : on considère un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , comportant des coins,  $\Gamma$  un ouvert du bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , et  $T > 0$  un réel. Pour  $g \in L^2(]0, T[ \times \Gamma)$ ,  $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , le système

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ u|_{\partial\Omega} = g \times 1_{\Gamma \times ]0, T[}, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \end{cases}$$

possède une solution unique dans

$$C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega)).$$

La question de la contrôlabilité exacte est de savoir si  $\Gamma$  et  $T$  étant donnés, pour tout  $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe  $g \in L^2(]0, T[ \times \Gamma)$  tel que la solution du système (1.1) vérifie  $u|_{t \geq T} \equiv 0$ .

Ce problème été étudié dans le cas où  $\Omega$  est, au voisinage des coins, à frontière polyédrale par P. Grisvard [Gr89] qui donne une réponse affirmative dans le cas où  $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2; (y - y_0) \cdot n(y) > 0\}$ , où  $y_0$  est un point de  $\mathbb{R}^2$ ,  $n(y)$  désigne la normale extérieure au bord de l'ouvert  $\Omega$  et  $T$  est assez grand. L'idée de la démonstration de P. Grisvard est de montrer que dans ce cas, l'ouvert est suffisamment régulier pour que les intégrations par parties qui apparaissent quand on applique les méthodes de multiplicateurs puissent être menées à bien.

Les hypothèses que nous ferons sur la régularité de l'ouvert  $\Omega$  sont les suivantes :

- En dehors des coins, l'ouvert  $\Omega$  est de classe  $C^\infty$  (en utilisant les résultats de [Bur97a] et de [Leb96], on pourrait remplacer cette hypothèse par  $C^3$ ).

- L'ouvert  $\Omega$  ne comporte que des coins extérieurs et est au voisinage de ces points analytique par morceaux, c'est-à-dire que pour chaque coin  $O$ , il existe deux fonctions  $a$  et  $b$ , analytiques, définies au voisinage de  $O$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $b'(0) < 0 < a'(0)$  et telles qu'au voisinage de  $O$ , il existe un système de coordonnées orthonormales,  $(y_1, y_2)$  avec  $O = (0, 0)$  et, dans ce système, on a (voir figure 1) :

$$(1.2) \quad \Omega^c = \{(y_1, y_2); y_1 \geq 0 \text{ et } b(y_1) \leq y_2 \leq a(y_1)\}.$$

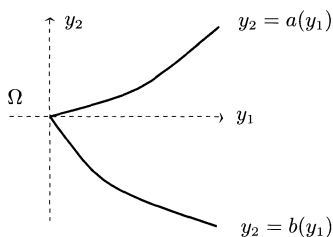


Figure 1. Géométrie au voisinage du coin.

• Le bord de l'ouvert  $\Omega$  n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes (autrement dit, la courbure du bord de  $\Omega$  ne s'annule pas à l'ordre infini).

Pour énoncer les hypothèses que nous ferons sur la géométrie du couple  $(\Gamma, T)$ , nous introduisons la notion de rayon bicaractéristique généralisé. On note :

- $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$ ,
- $K$  l'ensemble des coins,
- $L = K \times \mathbb{R}_t$ ,
- $T_b^*M = T^*M \cup T^*(\partial M \setminus L) \cup T^*L$  le fibré cotangent jusqu'au bord à  $M$ .

On a une projection naturelle

$$\pi : T^*\mathbb{R}^{2+1}|_{\overline{M}} \longrightarrow T_b^*M$$

et on munit  $T_b^*M$  de la topologie induite. On note  $\Sigma_b$  la projection sur  $T_b^*M$  de la variété caractéristique  $\mathcal{C}$  de l'équation des ondes (d'équation  $\tau^2 = |\xi|^2$ ), et  $P_y : T_b^*M \rightarrow \overline{\Omega}$  la projection naturelle.

**DÉFINITION 1.1.** — On appelle *bicaractéristique généralisée* dans  $\Omega$ , toute application continue  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_b$  telle que, si  $P_y\gamma(s_0) \notin K$ ,  $\gamma$  est, au voisinage de  $s_0$ , une bicaractéristique généralisée  $C^\infty$  au sens usuel (voir [Hör85, chap. 17]) et si  $P_y\gamma(s_0) \in K$ , alors  $\gamma(s_0 \pm 0)$  existent et  $\gamma(s_0 + 0)$  est l'une des deux directions obtenues soit par réflexion de  $\gamma(s_0 - 0)$  sur une des deux demi-faces de  $\partial M$ , soit par transmission directe (c'est-à-dire  $\gamma(s_0 + 0) = \gamma(s_0 - 0)$ ). On appellera *rayons* les projections spatiales des bicaractéristiques généralisées et nous les supposons paramétrés à vitesse 1 (voir figure 2).

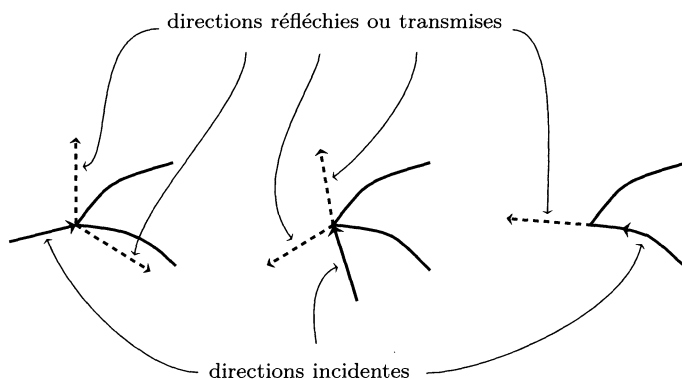


Figure 2. Les rayons au voisinage du coin.

DÉFINITION 1.2. — On dit que  $\rho_0 \in T^*(\partial M \setminus L)$  est *non diffractif* si la bicaractéristique de l'équation des ondes dans  $T^*\mathbb{R}^{2+1}$  issue d'un point de  $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$  ne reste pas incluse dans  $T^*\mathbb{R}^{2+1}|_{\overline{\Omega}}$  au voisinage de  $\rho_0$  (cette définition ne dépend pas du choix parmi les (au plus) deux points de l'ensemble  $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$ )

DÉFINITION 1.3. — Soient  $\Gamma \subset \partial\Omega \setminus K$  et  $T > 0$ . On dira que  $(\Gamma, T)$  *contrôle géométriquement* l'ouvert  $\Omega$  si toute bicaractéristique généralisée rencontre  $T^*(\Gamma \times ]0, T[)$  en un point non diffractif (on dira qu'une telle bicaractéristique *a été contrôlée*) et si toutes les demi-bicaractéristiques tangentes aux arêtes des coins sont contrôlées avant de rencontrer à nouveau un coin.

DÉFINITION 1.4. — On dira que le couple  $(\Omega, \Gamma)$  est *non focalisant* sur les coins si pour tout  $O \in K$ , l'ensemble des directions  $\xi, |\xi| = 1$ , pour lesquelles le rayon issu de  $O$  dans la direction  $\xi$  ne rencontre pas de coin avant de rencontrer  $\Gamma$  en un point non diffractif est dense dans la sphère unité  $\mathbb{S}^1$ .

Si  $(\Gamma, T_0)$  contrôle géométriquement l'ouvert  $\Omega$ , on notera pour tout demi-rayon  $\gamma$  issu d'un coin à l'instant  $t = 0$ ,

- $t_\gamma = \inf \{ t > 0 ; \gamma(t) \in T^*\Gamma \text{ et } \gamma(t) \text{ est non diffractif} \} < T_0$ ;
- $T_1 = 2 \sup_\gamma (t_\gamma) < 2T_0$ .

On notera :

- $S$  l'ensemble des segments de rayons connectant un coin à un autre (éventuellement confondu) et ne rencontrant pas, entre ces deux coins  $\Gamma$  en un point non diffractif;

- pour  $\gamma \in S$ , si  $O_i$ , avec  $i = 1, 2$  sont les deux coins  $\gamma_{i,j}$  correspondants, avec  $j = 1, \dots, 4$ , les quatre demi-rayons réfléchis, transmis ou tangents aux faces du coin  $O_i$  associés à  $\gamma$ ,

$$\tilde{t}_\gamma = \text{longueur}(\gamma) + \max_{j=1,\dots,4} t_{\gamma_{1,j}} + \max_{j=1,\dots,4} t_{\gamma_{2,j}}$$

- $T_2 = \sup_{\gamma \in S} (\tilde{t}_\gamma) < 3T_0$ .

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $\Omega$  comme précédemment,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  tel que  $\Gamma \cap K = \emptyset$ . Soit  $T_0 > 0$ . On suppose que  $(\Gamma, T_0)$  contrôle géométriquement l'ouvert  $\Omega$  qui est non focalisant sur les coins. Alors, pour tout*

$$T > \max(T_0, T_1, T_2)$$

(on rappelle que  $\max(T_0, T_1, T_2) < 3T_0$ ) et tout  $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe  $g \in L^2(\Gamma \times ]0, T[)$  tel que la solution du système (1.1) vérifie

$$u|_{t>T} \equiv 0.$$

On dit alors que le couple  $(\Gamma, T)$  contrôle exactement  $\Omega$ .

La méthode H.U.M. de J.L. Lions [Lio88] montre que ce résultat est équivalent à la proposition :

**PROPOSITION 1.5.** — *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la solution du système*

$$(1.3) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \end{cases}$$

vérifie

$$(1.4) \quad E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 \leq C \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u(y, t)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt.$$

Enfin, le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques du second ordre et un argument de graphe fermé de [BLR92] (estimation (3.11) et théorème 3.8) permettent de montrer que cette dernière inégalité est équivalente à

$$(1.5) \quad \exists C' > 0, \forall (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ E(u) \leq C' \left[ \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u(y, t)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt + \|u\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}^2 \right].$$

Pour démontrer le théorème 1, nous allons procéder par l'absurde en niant la proposition 1.5 et donc aussi la relation (1.5), ce qui fournit une suite  $(u_n)$  de solutions du système (1.3) à laquelle on peut associer une mesure de défaut microlocale (voir G. Lebeau [Leb96]). On montre ensuite, en utilisant des arguments de propagation du support de cette mesure qu'on a une contradiction. Le plan de l'article est donc le suivant : dans une première partie, nous introduisons les mesures de défaut d'une suite de solutions de l'équation des ondes d'énergies bornées, dans une deuxième partie, nous donnons en termes de mesures une conséquence d'un résultat de propagation des singularités  $H^1$  pour l'équation des ondes dans les ouverts à coins de N. Burq [Bur97b] et dans une troisième partie, nous démontrons le théorème 1. Enfin, des annexes sont consacrés à l'étude de l'hypothèse de non focalisation. D'une part, nous montrons que dans un cadre convexe (qui est le cas qui a motivé notre étude), cette hypothèse est toujours vérifiée et d'autre part, nous montrons (en collaboration avec J.M. Schlenker) que cette hypothèse est génériquement vérifiée.

REMARQUE 1.6. — L'hypothèse  $T > T_0$  est l'hypothèse minimale naturelle. Néanmoins on pourrait peut être l'affiner : il n'est pas clair qu'il soit nécessaire de contrôler géométriquement les rayons qui ne sont pas limites de rayons ne rencontrant pas de coin (voir figures 3 et 4). L'hypothèse  $T > T_1$  est due aux possibilités de focalisation des ondes sur les coins. Des résultats plus précis sur la diffraction des ondes par les coins, en termes de mesures de défaut permettraient peut être d'affaiblir cette hypothèse (mais, bien que nous n'ayons pas de contre-exemple, nous pensons qu'il ne sera probablement pas possible de la supprimer complètement). Enfin, l'hypothèse  $T > T_2$  ainsi que l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-rayons tangents aux faces des coins est due au fait que nous ne savons pas analyser la diffraction par un coin d'une onde arrivant tangentielllement à une des faces du coin. Ces dernières hypothèses devraient pouvoir être supprimées. Néanmoins, c'est ce dernier point qui semble le plus difficile à étudier. L'hypothèse de régularité analytique par morceaux au voisinage des coins n'est absolument pas naturelle et des résultats en termes de mesures de défaut devraient pouvoir être obtenus avec des hypothèses beaucoup plus faibles. Les résultats de J. Cheeger et M. Taylor [CT82a], [CT82b] dans la catégorie  $C^\infty$  et de S. Varjabédian [Var97] en termes de mesures de défaut constituent un premier pas dans cette direction.

## 2. Mesures de défaut de compacité pour les ondes

Soit  $(u_k) \in H_{0,\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_t)$  une suite de solutions de l'équation (1.3),

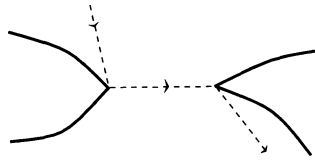


Figure 3. Un exemple de rayon qui n'est pas limite de rayons ne rencontrant pas de coin.

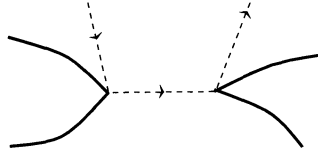


Figure 4. Un exemple de rayon qui est limite de rayons ne rencontrant pas de coin.

convergeant faiblement vers 0. Le but de cette partie est de rappeler comment on peut associer une mesure de défaut à la suite  $(u_k)$ , ainsi que de rappeler les principales propriétés vérifiées par cette mesure. Nous suivrons, pour cela, la présentation de [Leb96]

On choisit, au voisinage de chaque point  $y_0$  du bord de  $\Omega$ , un système de coordonnées  $(y_1, y_2)$  vérifiant (1.2) si  $y_0$  est un coin et si  $y_0$  n'est pas un coin on suppose que dans ce système, on a

$$\Omega = \{(y_1, y_2); y_1 > 0\}.$$

On notera  $\mathcal{A}$  l'espace des opérateurs  $Q = Q_i + Q_b + Q_c$  où :

- $Q_i$  est un opérateur pseudo-différentiel classique sur  $\mathbb{R}_t \times \Omega$ , à support compact dans  $\mathbb{R}_t \times \Omega$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega)$  tel que  $Q_i = \varphi Q_i \varphi$ ;

- $Q_b$  est un opérateur pseudodifférentiel tangentiel à support compact près de  $\mathbb{R}_t \times (\partial\Omega \setminus K)$ , c'est-à-dire que  $Q_b$  se décompose en somme d'opérateurs  $Q_b^j$ , les opérateurs  $Q_b^j$  étant à support compact dans  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$  près d'un point du bord qui n'est pas un coin, et s'écrivant dans un système de coordonnées associé à ce point  $Q_b^j = Q_b^j(y_1)$  où  $Q_b^j(y_1)$  est une famille  $C^\infty$  d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$ ;

- $Q_c$  est un opérateur pseudodifférentiel tangentiel à support compact près de  $\mathbb{R}_t \times (K)$ , c'est-à-dire que  $Q_c$  se décompose en somme d'opérateurs  $Q_c^j$ , les opérateurs  $Q_c^j$  étant à support compact dans  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$  près



d'un point coin et s'écrivant dans un système de coordonnées du type (1.2) associé à ce coin,  $Q_b^j = Q_b^j(y_1, y_2)$  où  $Q_b^j(y_1, y_2)$  est une famille  $C^\infty$  d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}_t$ .

On notera  $\mathcal{A}^i$  le sous-espace de  $\mathcal{A}$  formé des opérateurs d'ordre  $i$ . On note  $X = \overline{M}$ ,  ${}^bTX$  le fibré de rang 3 dont les sections sont les champs de vecteur tangents à  $\partial X$  et  ${}^bT^*X$  son fibré dual (le fibré cotangent compressé de R. Melrose). On note  $j$  la projection naturelle de  $T^*\mathbb{R}^{1+2}$  sur  ${}^bT^*X$ ,  $Z$  l'image par  $j$  de la variété caractéristique  $\mathcal{C}$  (d'équation  $\tau^2 = |\xi|^2$ ) de l'équation des ondes,  $\widehat{Z} = Z \cup j(T^*\mathbb{R}^{2+1}|_{\partial X})$  et  $S\widehat{Z} = (\widehat{Z} \setminus X)/\mathbb{R}_+^*$  l'espace quotient par l'action naturelle de  $\mathbb{R}_+^*$  (qui à une forme linéaire non nulle associe le produit de cette forme par le nombre  $\lambda > 0$ ). L'espace  $S\widehat{Z}$  est un espace métrique localement compact.

Près d'un point du bord qui n'est pas un coin, l'espace  ${}^bTX$  est engendré par les champs  $\partial_t, \partial_{y_2}, y_1\partial_{y_1}$  et  $j$  donnée par

$$j(t, y_1, y_2, \tau, \eta_1, \eta_2) = (t, y_1, y_2, \tau, \eta_1, y_2\eta_2)$$

et près d'un coin, l'espace  ${}^bTX$  est engendré par les champs  $\partial_t, y_1\partial_{y_1}, y_2\partial_{y_2}$  et  $j$  donnée par

$$j(t, y_1, y_2, \tau, \eta_1, \eta_2) = (t, y_1, y_2, \tau, y_1\eta_1, y_2\eta_2).$$

L'application  $j \circ \pi^{-1}$  est donc une bijection de  $T_b^*X$  sur l'image de  $j$  (elle ne dépend pas du choix de  $\pi^{-1}(\varrho)$ ).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}_t$  ouvert et borné. On notera  $\mathcal{A}_I^0$  le sous-espace de  $\mathcal{A}^0$  formé des opérateurs à support compact dans  $I$ . Il est alors démontré dans [Leb96, appendice A.2] qu'on peut associer à toute suite  $(u_k)$  de solutions de (1.3), bornée dans  $H^1(I \times \Omega)$ , convergeant faiblement vers 0 dans  $H^1(\Omega \times \mathbb{R}_t)$ , quitte à extraire une sous suite, une mesure  $\mu$  de Radon sur  $S\widehat{Z}$ , portée par  $SZ$  telle que pour tout opérateur  $Q \in \mathcal{A}_I^0$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (Q(u_k), u_k)_{H^1} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (\nabla_y Q u_k, \nabla_y u_k) + (\partial_t Q u_k, \partial_t u_k) \\ &= \int \kappa(\sigma(Q)) d\mu, \end{aligned}$$

où  $\sigma(Q)$  est le symbole principal de  $Q$  et  $\kappa(\sigma(Q))(\varrho) = \sigma(Q)(j^{-1}(\varrho))$  (cette expression a un sens car l'opérateur  $Q$  est tangentiel près du bord et  $\sigma(Q)(j^{-1}(\varrho))$  ne dépend donc pas du choix de  $j^{-1}(\varrho)$ ). Cette fonction est une fonction continue sur  $S\widehat{Z}$ . En toute rigueur, ce résultat n'est

démontré dans [Leb96] que pour un ouvert régulier (sans coin), mais la démonstration s'il y a des coins est exactement la même. On dit que la mesure  $\mu$  est une *mesure de défaut de compacité* associée à la suite  $(u_k)$ . Si la suite  $(u_k)$  ne possède qu'une telle mesure, on dit que cette suite est *pure*.

L'espace  $SZ$  possède deux composantes connexes  $SZ^\mp$  définies par l'équation  $\pm\tau > 0$ , qu'on peut identifier à

$$(Z \setminus X) \cap \{\pm\tau = \frac{1}{2}\}.$$

À cette décomposition de l'espace  $SZ$ , correspond une décomposition de la mesure

$$\mu = \mu^+ + \mu^- \quad (\mu_\pm = \mu|_{SZ^\pm}).$$

On suppose qu'il n'y a pas de contact d'ordre infini entre les géodésiques de  $X$  et son bord. On note alors  $G(s)(\varrho)$  le flot bicaractéristique généralisé issu de  $\varrho$  défini par R. Melrose et J. Sjostrand [MS78] (qui au point  $\varrho$  associe le point  $\gamma(s)$  ou  $\gamma$  est la bicaractéristique généralisée vérifiant  $\gamma(0) = \varrho$ ), quand il est défini, c'est-à-dire tant que la bicaractéristique issue de  $\varrho$  ne rencontre pas un coin (en effet, l'hypothèse disant que  $\Omega$  n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes assure l'existence et l'unicité locales des bicaractéristiques passant par tout point de  ${}^bT^*X$  dont la projection spatiale n'est pas un coin). On a alors le résultat suivant démontré par G. Lebeau dans [Leb96].

**THÉORÈME 2** (voir [Leb96, th. A.1]). — *Soient  $B$  un borélien de  $SZ^+$  et  $s \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $G(t)$  est défini pour  $t \in [-\varepsilon, s + \varepsilon]$  au voisinage de  $B$  et qu'il existe un voisinage de l'ensemble des coins tel que  $G(t)(B)$  ne rencontre pas ce voisinage pour tout  $t \in [-\varepsilon, s + \varepsilon]$ . Alors*

$$\mu^\pm(G(s)(B)) = \mu^\pm(B).$$

**REMARQUE 2.4.** — Ce résultat est démontré par G. Lebeau dans le cas où l'ouvert  $\Omega$  est de classe  $C^\infty$  mais, la démonstration étant locale, il est clair que la preuve donnée dans [Leb96] implique le théorème 2.

Traduisons aussi le théorème de relèvement de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [BLR92, th. 2.2] en termes de mesures :

**LEMME 2.2.** — *Soit  $(u_k)$  une suite pure de solutions de l'équation (1.1) vérifiant  $E(u_k) = 1$ . On suppose que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u_k}{\partial n} \right|^2 dt d\sigma(x) = 0.$$

Alors la mesure  $\mu$  est nulle au voisinage de tout point non diffractif de l'ensemble  $SZ \cap ]0, T[ \times \Gamma$ .

Rappelons brièvement comment on procède pour démontrer ce résultat. Soit  $\rho_0 = (x_0, \xi'_0) \in T^*\partial M$  un point non diffractif. On se place dans un système de coordonnées près de  $x_0, (x_n, x')$ , tel que dans ce système, on a

$$x_0 = (0, 0), \quad \Omega = \{x_n > 0\}, \quad (\partial_t - \Delta)u = \partial_{x_n}^2 - R(x_n, x', D_{x'}).$$

On note  $\rho_0^\pm = (x_0, \xi'_0, \pm \xi_n)$  les deux points (éventuellement confondus) de  $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \mathcal{C}$ . Soient  $c(x_n, x', \xi_n, \xi')$  un symbole d'ordre 1 supporté près de  $\rho_0^+$  et  $C$  un opérateur pseudodifférentiel à support compact dont le symbole principal est égal à  $c$ . On note  $\underline{u}_k$  le prolongement par 0 en dehors de  $\Omega$  de  $u_k$ . Comme dans  $\mathbb{R}^{2+1}$ , on a

$$(2.1) \quad (\partial_t^2 - \Delta)\underline{u}_k = \partial_n u_k|_{\partial\Omega} \otimes \delta_{\partial\Omega} \in H^{-1/2-\varepsilon},$$

en dehors de  $\mathcal{C}$ ,  $\underline{u}_k$  est microlocalement bornée dans  $H^{3/2-\varepsilon}$ , donc converge fortement vers 0 dans  $H^1$ . Il suffit donc de montrer que  $C(x, D_x)\underline{u}_k$  converge vers 0 dans  $L^2$  pour montrer que  $\underline{u}_k$  converge, au voisinage de  $(x_0, \xi'_0, \xi_n)$  vers 0 dans  $H^1(\mathbb{R}^{2+1})$  donc que  $u_k$  converge, au voisinage de  $x_0$  vers 0 dans  $H^1(\mathbb{R} \times \Omega)$  (puisque l'on peut faire le même calcul près de  $\rho_0^-$ ), ce dernier résultat impliquant que  $j(\rho_0)$  n'appartient pas au support de  $\mu$ .

Soit  $\tilde{a}$  la solution de l'équation

$$\frac{1}{i} \{p, \tilde{a}\} = |c|^2$$

à support près de la demi-bicaractéristique (dans  $T^*\mathbb{R}^{2+1}$ ) issue de  $\rho_0^+$  qui sort de  $\bar{\Omega}$  (le point  $\rho_0$  est supposé non diffractif). Soit  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , à support proche de  $\rho_0^+$ , égale à 1 sur le support de  $c$  et telle que si on note  $a = \Psi \tilde{a} \Psi$ , le support de  $\frac{1}{i} \{p, a\} - |c|^2$  est inclus dans  $x_n < -\varepsilon$ . Soit  $A$  un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 à support compact dont le symbole principal est égal à  $a$  (qui est imaginaire pur). D'après le calcul symbolique des opérateurs pseudodifférentiels, on a :

$$(2.2) \quad (\partial_t^2 - \Delta)A - A(\partial_t^2 - \Delta) = C^*C + T_1 + T_2,$$

où  $T_i$  est un opérateur d'ordre  $i$  et  $T_2$  est à support dans  $x_n < -\varepsilon$ . On a donc, comme  $\underline{u}_k$  est à support dans  $x_n \geq 0$  et d'après (2.1), (2.2) et comme  $\underline{u}_k$  est bornée dans  $H^1$  :

$$(2.3) \quad \|C(\underline{u}_k)\|_{L^2}^2 = 2 \operatorname{Re}(\partial_n \underline{u}_k|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t}, A(\underline{u}_k)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t})_{L^2} - (\partial_n \underline{u}_k, (A + A^*)(\underline{u}_k)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t})_{L^2} + o(1).$$

Comme le symbole principal de  $A$  est imaginaire pur,  $A + A^*$  est d'ordre 0,  $(A + A^*)(u_k)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t}$  converge donc fortement vers 0 dans  $L^2$  du bord, ce qui donne

$$(2.4) \quad \|C(u_k)\|_{L^2}^2 = 2 \operatorname{Re}(\partial_n u_k|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t}, A(u_k)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t})_{L^2} + o(1).$$

D'après le théorème de division de Malgrange appliqué au symbole principal de  $A$ , on a :

$$A = A_1 + A_0 \partial_n + B_{-1}(\partial_t^2 - \Delta) + B_0,$$

où les opérateurs  $A_i$  sont tangentiels d'ordre  $i$  et les opérateurs  $B_i$  d'ordre  $i$ . Comme le symbole principal de  $B_{-1}$  est imaginaire pur, on voit facilement que sa contribution à (2.4) est un  $o(1)$ . Celle de l'opérateur  $A_1$  est nulle compte tenu de la condition  $u|_{\partial\Omega} = 0$  et celle de l'opérateur  $B_0$  tend aussi vers 0. Le terme de droite dans (2.4) s'écrit donc

$$2 \operatorname{Re}(\partial_n u_k|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t}, A_0(\partial_n u_k)|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_t})_{L^2} + o(1).$$

D'après l'hypothèse, si on a pris le support de  $c$  assez petit (et donc le support de  $a_0$ , le symbole principal de  $A_0$  dans  $\Gamma \times ]0, T[$  assez petit), ce terme tend vers 0, ce qui implique qu'il en est de même du terme de gauche de (2.3).

La conservation de l'énergie pour les solutions de l'équation des ondes et le choix comme opérateur tangentiel test de  $Q = \varphi(x)\psi(t)$  avec  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^2)$ ,  $\varphi \equiv 1$  sur  $\Omega$ , montrent que si on suppose

$$E(u_k) = \int_{\Omega} |\nabla_x u_k|^2 + |\partial_t u_k|^2 = 1, \forall k \in \mathbb{N},$$

alors la mesure  $\mu$  vérifie

$$(2.5) \quad \mu(SZ \cap ]a, b[_t) = b - a > 0 \quad \text{si } b > a.$$

En particulier,  $\mu$  n'est pas nulle.

Supposons maintenant que la proposition 1.5 n'est pas vérifiée. Il existe donc une suite  $u_k$  contredisant (1.5); donc, quitte à la renormaliser, telle que

$$E(u_k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma \times ]0, T[} \left| \frac{\partial u_k}{\partial n} \right|^2 dt d\sigma(x) = 0,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)} = 0.$$

La suite  $u_k$  converge donc faiblement vers 0 dans  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_t)$  et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'une mesure de défaut microlocale,  $\mu$ , lui est associée.

Nous allons démontrer, dans la suite de cet article le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3. — *Sous les hypothèses du théorème 1, pour toute suite  $(u_k)$  de solutions de (1.3), d'énergies égales à 1, convergeant faiblement vers 0 dans  $H^1$ , de mesure de défaut de compacité  $\mu$ , il existe un point non diffractif dans l'intersection du support de  $\mu$  avec  $\Gamma \times ]0, T[$ .*

Cette proposition et le lemme de relèvement montrent que nécessairement le support de la mesure  $\mu$  est vide, ce qui est impossible puisque  $\mu$  n'est pas nulle. Donc que la proposition 1.5 ne peut pas être contredite, ce qui démontre le théorème 1.

### 3. Propagation faible du support des mesures de défaut

On se propose dans cette partie de donner une conséquence d'un résultat sur la propagation des singularités de [Bur97b] que nous utiliserons par la suite.

Nous commençons par définir les espaces fonctionnels que nous allons utiliser. On note  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  formée des vecteurs propres du laplacien avec conditions de Dirichlet sur  $\Omega$  associés aux valeurs propres  $-\lambda_n$  (on suppose que  $\lambda_n \leq \lambda_m$  pour  $n \leq m$ ).

- Pour  $s \geq -1$ , on note  $\tilde{H}^s$  l'espace de Hilbert formé des distributions sur  $\Omega$ ,

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n e_n \text{ telles que } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n|^2 |\lambda_n|^s < +\infty,$$

muni de sa norme naturelle (pour  $-1 \leq s \leq \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{H}^s$  coïncide avec l'espace  $H^s(\Omega)$  usuel et avec l'espace  $H_0^s(\Omega)$  pour  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ).

- Pour  $s \geq 0$ , on notera  $\mathcal{H}^s = \tilde{H}^s \times \tilde{H}^{s-1}$  et on identifiera les distributions  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s$  avec la solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet associée aux données initiales  $(u_0, u_1)$  :

$$u(t, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{(\varepsilon(n)it\sqrt{|\lambda_{|n|}})} (u_{0,n} + \varepsilon(n)u_{1,n}/i\sqrt{|\lambda_{|n|}}) e_n(y)$$

(où  $\varepsilon(n)$  est le signe de  $n$ ).

LEMME 3.1. — *Pour tout  $s \in [0, 2]$  et toute fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , l'application  $u \mapsto \varphi u$  est continue de  $\tilde{H}^s$  dans lui-même.*

En effet, il suffit de remarquer que l'espace  $\tilde{H}^s$  coïncide avec le domaine de l'opérateur autoadjoint  $-\Delta_D^{s/2}$  sur  $L^2$ ; autrement dit, pour  $s = 2$

$$\tilde{H}^2 = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

ce qui implique le résultat pour  $s = 2$ . Pour  $s = 0$ , le résultat est clair et le cas général se déduit de ces deux cas par interpolation.

Pour  $u \in \mathcal{H}^s$ , on notera

$$u^\pm = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{(\mp it\sqrt{\lambda_{|n|}})} \frac{1}{2} (u_{0,n} \mp u_{1,n}/(i\sqrt{\lambda_{|n|}})) e_n(y).$$

Un calcul standard montre alors que si la suite de solutions de l'équation des ondes  $(u_k)$ , d'énergies égales à 1 est pure de mesure de défaut  $\mu$ , alors les suites  $(u_k^\pm)$  ont pour mesures de défaut les mesures  $\mu^\pm$ .

Notons aussi le résultat suivant.

LEMME 3.2. — Pour  $s > s'$ , l'injection naturelle  $\mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^{s'}$  est compacte.

En effet, pour  $0 \leq s' < s < \frac{1}{2}$ , comme  $\mathcal{H}^s$  et  $\mathcal{H}^{s'}$  coïncident avec les espaces de Sobolev usuels, qu'on peut voir comme des sous espaces fermés des espaces correspondant définis sur  $\mathbb{R}^2$ , et comme  $\Omega$  est borné, ce résultat est bien connu; et le cas général se déduit facilement de ce cas particulier en utilisant par exemple les isométries  $J_r^{r'}$  de  $\mathcal{H}^r$  sur  $\mathcal{H}^{r'}$  définies par

$$(J_r^{r'}(u_0, u_1))_n = (u_{0,n}, u_{1,n}) \times |\lambda_{|n|}|^{\frac{1}{2}(r-r')}.$$

DÉFINITION 3.3. — On appelle *pseudo bicaractéristique généralisée* dans  $\Omega$  toute application continue  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T_b^*M$  telle que, si  $P_y\gamma(s_0) \notin K$ ,  $\gamma$  est, au voisinage de  $s_0$ , une bicaractéristique généralisée  $C^\infty$  au sens usuel (voir [Hör88] et [MS78]) et  $\{s \in \mathbb{R}; P_y\gamma(s) \in K\}$  est un ensemble de points isolés.

(La différence par rapport aux bicaractéristiques est qu'une pseudo bicaractéristique rencontrant un coin peut repartir dans n'importe quelle direction.)

DÉFINITION 3.4. — Pour  $u \in \mathcal{H}^1$ ,  $s \geq 1$ , on définit le front d'onde Sobolev d'ordre  $s$  au bord de  $u$  par la relation

$$\varrho_0 = (y_0, t_0, \tau_0, \xi_0) \in T_b^*X \notin WF_b^s(u)$$

si et seulement si

- si  $y_0 \notin K$  alors  $\varrho_0 = (y_0, t_0, \tau_0, \xi_0) \in T_b^*X \notin WF_b^s(u)$  au sens usuel;
- si  $y_0 \in K$  alors nécessairement  $\tau_0 \neq 0$  et il existe  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$  et  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_y^2)$  égales à 1 au voisinage de  $t_0$  et  $y_0$  respectivement telles que

$$\int_{\tau/\tau_0 \geq 1} \|\mathcal{F}_{t \rightarrow \tau} \psi \varphi u(\tau, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 (1 + |\tau|^2)^{s-1} d\tau < +\infty,$$

c'est-à-dire que  $u$  est microlocalement en  $(t_0, \tau_0)$  et localement au voisinage de  $y_0$  de classe  $H_t^{s-1}$  à valeurs  $H_y^1$ .

REMARQUE 3.5. — Pour  $u \in \mathcal{H}^1$ ,  $\tau_0 = -\frac{1}{2}$ , on a équivalence entre

$$\int_{\tau/\tau_0 \geq 1} \|\mathcal{F}_{t \rightarrow \tau} \psi \varphi u(\tau, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 (1 + |\tau|^2)^{s-1} d\tau < +\infty$$

et

$$\int_{\tau} \|\mathcal{F}_{t \rightarrow \tau} \psi \varphi u^+(\tau, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 (1 + |\tau|^2)^{s-1} d\tau < +\infty.$$

En effet, si  $u^\pm = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{(\mp it \sqrt{\lambda_{|n|}})} u_n e_n(y)$ ,

$$\|\mathcal{F}_{t \rightarrow \tau} \varphi u^\pm(\tau, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_n |u_n|^2 \cdot |\widehat{\varphi}(\tau \pm \sqrt{\lambda_n})|^2$$

et la remarque est donc une simple conséquence de la décroissance rapide de la fonction  $\widehat{\varphi}$ .

On rappelle le résultat de propagation des singularités.

THÉORÈME 3 (voir [Bur97b, th. 2]). — Soit  $u \in \mathcal{H}^1$ ; alors les fronts d'onde  $WF_b^s(u)$  sont inclus dans la projection de la variété caractéristique de l'équation des ondes et sont réunion de pseudo bicaractéristiques généralisées

PROPOSITION 3.6. — Soit  $(u_n)$ , une suite de solutions de l'équation (1.3) dans  $\Omega$ , d'énergies égales à 1, convergeant faiblement vers 0 dans  $H^1$  et de mesure de défaut microlocale  $\mu$ . Alors le support de la mesure  $\mu$  est réunion de pseudo bicaractéristiques généralisées, c'est-à-dire que par tout point du support passe une pseudo bicaractéristique généralisée incluse dans le support.

REMARQUE 3.7. — Dans cet énoncé on identifie les pseudo bicaractéristiques  $\gamma$  avec leur image par  $j \circ \pi^{-1}$  (cette image ne dépendant pas du point de  $\pi^{-1}(\gamma)$  choisi). De plus ce résultat reste vrai dans le cas où l'ouvert  $\Omega$  comporte des coins d'angles inférieurs à  $\pi$ .

REMARQUE 3.8. — Ce résultat permettrait déjà de donner une réponse affirmative à la question de la contrôlabilité exacte des ondes dans le cas où  $\Omega$  est obtenu en retranchant d'un ouvert régulier un obstacle strictement convexe, à coins, et  $\Gamma$  est le bord extérieur du domaine ainsi obtenu (voir figure 5), puisqu'alors tous les pseudorayons sont géométriquement contrôlés en temps fini. (Évidemment, ce dernier résultat est plus faible que le théorème 1).

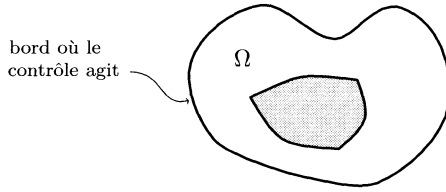


Figure 5. Un exemple où la proposition 3.6 donne un résultat de contrôlabilité exacte.

La proposition 3.6 est un résultat local. Ce résultat est bien connu pour un ouvert de classe  $C^\infty$  (voir [Leb96]), c'est en particulier dans ce cas une conséquence immédiate du théorème 2 et il est étendu dans [Bur97a] au cas d'un ouvert de classe  $C^3$ . Dans la mesure où les supports des mesures  $\mu^\pm$  sont disjoints, il est équivalent au résultat analogue sur chacune des mesures  $\mu^\pm$ . D'après le théorème 2, si un point  $\varrho_0$  appartient au support de la mesure  $\mu$  alors la bicaractéristique généralisée passant par  $\varrho_0$  est aussi incluse dans ce support tant qu'elle ne rencontre pas de coin.

Nous allons donc supposer qu'aucune des demi-bicaractéristiques généralisées issues par exemple d'un coin  $O$  à l'instant  $t = 0$  vers  $t < 0$  associées à  $\tau = -\frac{1}{2}$ , dont on exclue le point correspondant au coin, n'est incluse dans le support de la mesure  $\mu^+$ , ce qui, d'après le théorème 2, appliqué en dehors des coins, implique qu'aucune de ces demi-bicaractéristiques ne rencontre pour  $t < 0$  proche de 0 le support de la mesure  $\mu$ . Nous allons montrer qu'alors le point  $(y = O, t = 0, \tau = -\frac{1}{2}) \in T^*L$  n'appartient pas non plus à ce support (donc, en appliquant à nouveau le théorème 2 en dehors d'un coin qu'il en est également de même des demi-bicaractéristiques généralisées issues de  $(O, t = 0, \tau = -\frac{1}{2})$ , orientées vers  $t > 0$ , tant qu'elle ne rencontrent pas à nouveau un coin).

Pour  $\varepsilon > 0$ , soient  $C_\varepsilon$  l'ensemble des points de  $\Omega$  à distance  $\varepsilon$ , le long des rayons, du coin  $O$  et  $\mathcal{C}_\varepsilon$  l'ensemble des couples  $(y, \xi)$ ,  $y \in C_\varepsilon$ ,  $|\xi| = \frac{1}{2}$  tels que le rayon issu de  $y$ ,  $t = -\varepsilon$  dans la direction  $\xi$ ,  $\tau = -\frac{1}{2}$  rencontre  $O$  pour  $t = 0$ . Soient  $Q$  un opérateur pseudodifférentiel en espace, tangentiel d'ordre 0 à support près de  $C_\varepsilon$  tel que le support du symbole de  $\text{Id} - Q$  ne rencontre pas  $C_\varepsilon$  et  $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$  telle que  $\Psi|_{t < -\varepsilon - \alpha} \equiv 0$ ,  $\Psi|_{t > -\varepsilon + \alpha} \equiv 1$  (avec  $0 < \alpha \ll \varepsilon$  que nous fixerons plus tard).

Pour  $u \in \mathcal{H}^1$ , on note  $P_1(u)$  et  $P_2(u)$  les solutions des systèmes :

$$(3.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \tilde{\Delta})P_1(u) = \Psi''(t)Q(u) + 2\Psi'(t)Q(\partial_t u) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ P_1(u)|_{\partial\Omega} = 0, \\ P_1(u)|_{t \leq 0} \equiv 0; \end{cases}$$



$$(3.2) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \tilde{\Delta})P_2(u) = \Psi''(t)(\text{Id} - Q)(u) \\ \quad \quad \quad + 2\Psi'(t)(\text{Id} - Q)(\partial_t u) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ P_2(u)|_{\partial\Omega} = 0, \\ P_2(u)|_{t \ll 0} \equiv 0. \end{cases}$$

On remarque que, pour  $t > -\varepsilon + \alpha$ , on a  $u = P_1(u) + P_2(u)$  et  $P_{1,2}(u)$  sont deux solutions de l'équation des ondes. Si on prend  $\alpha$  assez petit (en fonction de  $Q$  et plus précisément de la taille de l'ensemble où  $Q$  est égal à l'identité), aucun des rayons issus d'un point de  $C_\varepsilon$  ne rencontre le front d'onde  $C^\infty$  du second membre de l'équation définissant  $P_2(u)$ , pour  $t \in ]-\varepsilon - \alpha, 0[$ . Donc, si  $\gamma$  est une bicaractéristique généralisée incluse dans  $\{\tau = -\frac{1}{2}\}$ , d'après le théorème de propagation des singularités  $C^\infty$  de R. Melrose et J. Sjöstrand [MS78],  $P_2(u)$  est microlocalement  $C^\infty$  en tout point  $\gamma(s)$ ,  $s < 0$  assez proche de 0. D'après le théorème 3, le point  $(y = O, t = 0, \tau = -\frac{1}{2})$  n'est donc pas dans le front d'onde  $C^\infty$  de  $P_2(u)$ , ce qui revient à dire (voir [Bur97b]) qu'il existe des fonctions

$$\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t), \quad \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_y^2),$$

égales à 1 au voisinage de  $y = O$  et  $t = 0$  respectivement et telles que la fonction  $\phi_1(t)\phi_2(y)P_2(u)^+$  est de classe  $C^\infty$  en temps à valeurs  $H_0^1(\Omega)$ . Par ailleurs, les conditions que doivent vérifier les fonction  $\phi_{1,2}$  sont purement géométriques et il est clair qu'on peut les choisir indépendantes de  $u$  (mais pas de l'opérateur  $Q$ ). On considère alors l'opérateur

$$\mathcal{P}_2 : u \in \mathcal{H}^1 \longmapsto (\phi_2 P_2(u)_{t=0}^+, \partial_t(\phi_2(y)P_2(u))|_{t=0}^+).$$

On a

$$\begin{aligned} \|\phi_2 P_2(u)_{t=0}^+\|_{\tilde{H}^2} &= \|\Delta \phi_2 P_2(u)_{t=0}^+\|_{L^2} \\ &\leq C \|P_2(u)_{t=0}^+\|_{\tilde{H}^1} + \|\phi_2 \Delta P_2(u)_{t=0}^+\|_{L^2} \\ &\leq C \|P_2(u)_{t=0}^+\|_{\tilde{H}^1} + \|\phi_2 \partial_t^2 P_2(u)_{t=0}^+\|_{L^2}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{P}_2$  envoie donc  $\mathcal{H}^1$  dans  $\mathcal{H}^2$ , il est évidemment continu de  $\mathcal{H}^1$  dans lui même; le théorème du graphe fermé implique donc qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$(3.3) \quad \|\mathcal{P}_2(u)\|_{\mathcal{H}^2} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Si  $(u_n)$  est une suite bornée de  $\mathcal{H}^1$  convergeant faiblement vers 0, l'inégalité (3.3) et l'injection compacte  $\mathcal{H}^2 \hookrightarrow \mathcal{H}^1$  montrent que la suite  $\mathcal{P}_2(u_n)$  converge fortement vers 0 dans  $\mathcal{H}^1$ .

Par ailleurs, si on note  $U(t)$  le propagateur de l'équation des ondes

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)U(t)(f) = 0, \\ U(t)(f)|_{\partial\Omega} = 0, \\ U(0)(f) = 0, \\ \partial_t U(0)(f) = f, \end{cases}$$

la solution de l'équation (3.1) s'écrit

$$P_1(u)(t) = \int_{s=0}^t U(t-s)\Psi''(s)(Q)(u) + 2\Psi'(s)(Q)(\partial_s u) ds,$$

ce qui montre que  $P_1(u)^+$  est la solution d'une équation du type de (3.1) avec comme second membre

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & (\Psi''(t)(Q)(u) + 2\Psi'(t)(Q)(\partial_t u))^+ \\ & = (\Psi''(t)(Q)(u^+) + 2\Psi'(t)(Q)(\partial_t u^+)). \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, si  $\alpha$  et le support du symbole de  $Q$ ,  $q$  sont tels que

$$\text{supp}(q) \times ]-\varepsilon - \alpha, -\varepsilon + \alpha[ \times \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cap \text{supp}\mu = \emptyset$$

(ce qui est possible si on a choisi  $\alpha$  et le support de  $q$  assez petits), le terme de droite de (3.4), est obtenu en appliquant un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 à une suite ayant une mesure de défaut de compacité  $H^1$  nulle au voisinage du support de cet opérateur, il converge fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ , ce qui implique que la suite  $P_1(u_n)^+$  converge fortement vers 0 dans  $H^1(\Omega)_{\text{loc}(t)}$ . Puisque les données de Cauchy à  $t = 0$  de la suite  $P_2(u_n)$  convergent aussi fortement vers 0 au voisinage du coin  $O$  dans  $\tilde{H}^1$ , la vitesse finie de propagation du support pour les solutions de l'équation des ondes implique que la suite  $P_2(u_n)^+$  converge aussi fortement vers 0 dans  $H^1$  au voisinage de  $(t_0, O)$ . La mesure  $\mu^+$  est donc nulle au voisinage de  $(t = 0, y = O)$ . La proposition 3.6 est donc démontrée.

#### 4. Propagation du support des mesures de défaut

Le but de cette partie est la démonstration de la proposition 2.3. Nous allons, pour cela, contrairement à ce que nous avons fait dans la partie précédente (qui pourrait en fait s'exprimer uniquement en termes de propagation des singularités  $H^1$ ), utiliser des renseignements fins propagés par les mesures de défaut.

D'après la relation (2.5), le support de la mesure  $\mu$  rencontre nécessairement l'ensemble  $\{t = \frac{1}{2}T\}$ . Soit donc

$$\varrho_0 \in \text{supp}(\mu) \cap \{t = \frac{1}{2}T\}.$$

Supposons que  $\varrho_0 \notin T^*L$ . Soit  $\gamma$  la bicaractéristique issue de  $\varrho_0$  définie (et unique) tant qu'elle ne rencontre pas le coin. Si  $\gamma$  existe pour  $t$  appartenant à  $[\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T_0, \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T_0]$  (c'est-à-dire qu'elle ne rencontre pas de coin sur cet intervalle de temps), la conclusion de la proposition 2.3 est une conséquence du théorème 2. La seule situation à étudier est donc celle où  $\gamma$  rencontre un coin  $O$  à un instant  $t_1$ . On suppose par exemple  $0 < t_1 < \frac{1}{2}T$ . En propageant le support de la mesure  $\mu$  vers  $t > \frac{1}{2}T$  et comme  $T > 2T_1$ , si la demi-bicaractéristique issue de  $\rho_0$  vers  $t > \frac{1}{2}T$  ne rencontre pas de coin pour  $s \in ]\frac{1}{2}T, T[$ , alors elle rencontre nécessairement  $\Gamma$  en un point non diffractif pour  $s_0 \in ]\frac{1}{2}T, T[$  (puisque sinon, on aurait construit une demi-bicaractéristique issue d'un coin et de longueur supérieure à  $T - t_1 \geq \frac{1}{2}T > \frac{1}{2}T = \max_\gamma(t_\gamma)$  avec  $t_\gamma$  défini à la suite de la définition 1.4). Dans ce cas, la conclusion de la proposition 2.3 est encore une conséquence du théorème 2. Le seul cas qu'il nous faut traiter est donc celui où la bicaractéristique issue de  $\rho_0$  rencontre un coin pour  $t_2 > \frac{1}{2}T$  et pour  $t_1 < \frac{1}{2}T$ . On peut également supposer que cette bicaractéristique ne rencontre pas  $\Gamma$  en un point non diffractif pour  $s \in [t_1, t_2]$ . On a alors trois cas.

1) Soit il existe une suite de points  $\varrho_n \in \text{supp}(\mu)$  convergeant vers  $\varrho_0$  et tels que les bicaractéristiques associées,  $\gamma_n$ , qui nécessairement ne rencontrent pas le coin entre les instants  $\frac{1}{2}T$  et  $t_1 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit si  $n$  est assez grand, ne le rencontrent pas non plus pour  $t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ . Alors, comme quitte à extraire une sous suite, les bicaractéristiques  $\gamma_n$  définies pour  $t \in [t_1 - \varepsilon, \frac{1}{2}T]$  convergent vers une bicaractéristique rencontrant le coin se réfléchissant sur une des faces du coin  $O$ , qui coïncide avec  $\gamma$  pour  $t_1 < t < \frac{1}{2}T$ , et comme le support de  $\mu$  est fermé, la bicaractéristique limite est aussi dans ce support. On obtient donc qu'au moins une des deux demi-bicaractéristiques réfléchies sur les faces du coin ou transmise est incluse dans le support de la mesure  $\mu$ . Soit  $T_3 = \min\{\text{distance}(O_i, O_j); O_j \neq O_i\}$  où  $O_i, O_j$  décrivent l'ensemble (nécessairement fini) des coins. La portion de bicaractéristique  $\gamma$  définie sur  $t \in [t_1 - \varepsilon, \frac{1}{2}T]$  coïncidant avec ce demi-rayon réfléchi près de  $t = t_1$  peut alors se prolonger pour  $t \in [t_1 - T_3, \frac{1}{2}T]$  en une portion de bicaractéristique incluse dans le support de  $\mu$ .

2) Soit la mesure  $\mu$  se focalise sur le coin  $O$ , c'est-à-dire qu'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$  un nombre non dénombrable de demi-bicaractéristiques

incidentes, incluses dans le support de  $\mu$ , correspondant à un ensemble de mesure non nulle (dans la sphère  $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$ ) de directions incidentes, qui rencontrent le coin pour  $|t - t_1| \leq \varepsilon$ . Il suffit alors de propager le support de la mesure  $\mu$  vers  $t > \frac{1}{2}T$ , l'hypothèse de non focalisation assurant que parmi ces bicaractéristiques toutes ne peuvent pas rencontrer à nouveau un coin avant de rencontrer  $\Gamma$  en un point non diffractif à un instant  $t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon + \frac{1}{2}T_1]$ , puis comme  $T > T_1$  et  $t_1 < \frac{1}{2}T$ , il suffit de prendre  $\varepsilon < \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T_1$  pour que dans ce cas, la conclusion de la proposition 2.3 soit encore une conséquence du théorème 2.

3) Le dernier cas qui reste à traiter est le cas général. Soit

$$\varrho_\varepsilon = (y, t, \tau = -\frac{1}{2}, \xi, \eta)_\varepsilon$$

le point sur  $\gamma$  correspondant à  $t = t_1 + \varepsilon$ ). Il est clair qu'on peut choisir  $\varepsilon > 0$  assez petit, tel que le point  $\varrho_\varepsilon$  soit un point intérieur et  $(\xi, \eta) = \frac{(y)}{2|y|}$ , puisque l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-bicaractéristiques tangentes aux faces des coins implique que la bicaractéristique  $\gamma$  n'est pas une de ces deux demi-bicaractéristiques (puisqu'elle rencontre à nouveau un coin pour  $t_2 > \frac{1}{2}T$  sans être contrôlée entre temps). Nous allons montrer qu'alors, s'il existe  $\beta > 0$  tel qu'aucune des demi-bicaractéristiques issues vers  $t < t_1$  du coin dans une direction faisant un angle inférieur à  $\beta$  avec les demi-tangentes au coin ainsi qu'aucune des deux demi-bicaractéristiques réfléchies ou transmises associées à  $\gamma$  n'appartient, pour  $t_1 - \varepsilon < t < t_1$  au support de la mesure  $\mu$ , alors, nécessairement, au voisinage de  $\varrho_\varepsilon$ , la mesure  $\mu_+$  est supportée par l'ensemble

$$\left\{ (t, y, \tau, \xi, \eta) ; \xi = -\frac{\tau y}{|y|} \right\}$$

et s'écrit (en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ) sous la forme

$$\mu_+ = \nu_+(\xi, t, r) \otimes \delta_{\theta=\xi}$$

où la mesure  $\nu_+$  est absolument continue par rapport à  $\xi$ , c'est-à-dire est une fonction intégrable sur la sphère  $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$  à valeurs mesure en  $t, r$ . C'est-à-dire que nécessairement soit on est dans le cas 2), soit on peut prolonger le rayon en un rayon inclus dans le support de  $\mu$  pour  $t \in ]t_1 - T_3, \frac{1}{2}T[$ , soit pour tout  $\beta > 0$  il existe une demi-bicaractéristiques dont la direction initiale,  $\xi$  fait un angle inférieur à  $\beta$  avec les demi-tangentes au coin qui rencontre pour  $t < t_1$  proche de  $t_1$  le support de la mesure  $\mu$  (donc par propagation à l'intérieure qui est incluse pour  $t_1 - T_3 < t < t_1$  dans ce support). En faisant tendre  $\beta$  vers 0 on obtient par passage à la limite et

puisque le support de  $\mu$  est fermé qu'une des demi-bicaractéristiques dont la direction initiale,  $\xi$  est tangente au coin est incluse pour  $t_1 - T_3 < t < t_1$  dans le support de  $\mu$ .

Supposons ce dernier résultat admis. L'application des résultats des cas 1), 2) et 3) permet donc soit de conclure, soit de construire une bicaractéristique généralisée pour  $t \in [\frac{1}{2}T - T_3, \frac{1}{2}T]$  incluse dans le support de la mesure  $\mu$ , soit de construire une demi-bicaractéristique tangente issue du coin  $O$ , pour  $t = t_1, \tau = \tau_0$ , incluse dans le support de la mesure  $\mu$  et qui est contrôlée par  $\Gamma$  en un point non diffractif avant de rencontrer à nouveau un coin. En appliquant un nombre fini de fois cette construction à partir de  $t_1$ , vers  $t < t_1$  et en faisant de même à partir de  $t_2$  vers  $t > t_2$  et compte tenu de la condition  $T > \max\{T_0, T_1, T_2\}$ , on construit un point non diffractif de  $T^*\Gamma \times ]0, T[$  qui est dans le support de la mesure  $\mu$ .

REMARQUE 4.1. — L'étude du cas 1) à été motivée par un résultat de S. Varjabedian [Var97] qui a remarqué que si la mesure incidente ne charge pas le coin, alors les termes calculés par réflexion en dehors du coin, donnent toute la mesure puisqu'ils sont de masse totale égale à toute l'énergie et que l'équation des ondes conserve cette énergie.

L'étude du cas 3) va faire intervenir les résultats de P. Gérard et G. Lebeau [GL93] sur la diffraction d'une onde par un coin. Le résultat énoncé est un résultat local. On se place dans un système de coordonnées  $(y = y_1, y_2)$  du type (1.2). On note  $\Omega^\pm$  l'intersection des deux ensembles délimités par les tangentes à  $\Omega$  avec  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{y; a'(0)y_1 < y_2 < b'(0)y_1\}, \\ \Omega^- &= \{y; a'(0)y_1 < y_2 \text{ et } b'(0)y_1 \leq y_2 \\ &\quad \text{ou } a'(0)y_1 > y_2 \text{ et } b'(0)y_1 \geq y_2\}\end{aligned}$$

et  $\Omega_\alpha$  l'ensemble obtenu en tournant les tangentes vers l'extérieur de  $\Omega$  d'un angle  $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\alpha = \{y; (b'(0) - \alpha)y_1 < y_2 < (a'(0) + \alpha)y_1\}^c.$$

On notera aussi (voir figure 6) :

$$\begin{aligned}\Delta_+ &= \{(y, t); y_2 = a(y_1), y_1 \geq 0\}, & \tilde{\Delta}_+ &= \{(y, t); y_2 = a(y_1)\}, \\ \Delta_- &= \{(y, t); y_2 = b(y_1), y_1 \geq 0\}, & \tilde{\Delta}_- &= \{(y, t); y_2 = b(y_1)\}.\end{aligned}$$

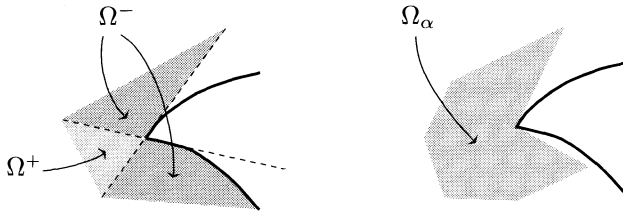


Figure 6. Les ensembles  $\Omega^\pm$  et  $\Omega_\alpha$ .

Pour  $y' \in \Omega_\varepsilon$ , on notera  $g_{y'}$  la solution, à support dans  $t > 0$ , de l'équation

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_{x,y})g_{y'} = \delta_{t=0}, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

REMARQUE 4.2. — Le sens que nous donnons à l'équation (4.1) est le suivant : on commence par régulariser en temps en appliquant l'opérateur  $(\partial_t + 1)^{-2}$  (ce qui régularise aussi en espace pour une solution de l'équation des ondes), on résoud alors l'équation des ondes dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$  avec la donnée correspondante (la solution est alors unique), puis on applique l'opérateur  $(\partial_t + 1)^2$  pour obtenir notre solution. En effet, la présence du coin fait qu'il est délicat de parler de solutions dans des espaces moins réguliers que l'espace  $H^1$ . En fait, nous demandons que notre solution soit  $H^{-s}$  en temps à valeurs  $H_0^1$  en espace, ce qui supprime le problème lié à la singularité du coin. Pour une construction détaillée, nous renvoyons à [Bur97b, § 4.3].

D'après la vitesse finie de propagation cette distribution est à support dans

$$\{(y, t) ; \|y - y'\| \leq t\}.$$

Un calcul standard montre que pour  $t > 0$  assez petit,  $g_{y'}$  est conormale analytique par rapport à la surface  $\|y - y'\| = t$  et qu'il existe un symbole analytique,  $\sigma_0(y, \tau)$  défini sur  $\mathbb{R}_y^2 \setminus \{0\}$  se prolongeant en une fonction holomorphe dans  $\text{Im}(\tau) < 0$  tel que

$$\sup_\tau \left| \frac{\sigma(y, \tau)}{\sqrt{1 + |\tau|}} \right| < +\infty$$

et  $g_{y'}(y)$  est, modulo une fonction analytique égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(t - \|y - y'\|)} \sigma_0(y - y', \tau).$$

On notera  $g_{y'}^{\pm}$  les solutions de

$$(\partial_t^2 - \Delta)g_{y'}^{\pm} = 0, \quad g_{y'}^{\pm}|_{\tilde{\Delta}_{\pm}} = 0,$$

égales à  $g_{y'}$  pour  $|t|$  assez petit. Ces fonctions sont données explicitement par des calculs d'optique géométrique. On notera  $g_{e,y'}$  la solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta)g_{e,y'} = \frac{\partial}{\partial n^+} u_+ \otimes \delta_{\Delta_+} + \frac{\partial}{\partial n^-} u_- \otimes \delta_{\Delta_-},$$

égale à  $g_{y'}$  pour  $|t|$  petit. On note

$$(4.2) \quad \Sigma_i^{y'} = \{(t, y); t = \|y - y'\|\},$$

$\Sigma_{r,\pm}^{y'}$  les deux surfaces obtenues par réflexion de  $\Sigma_i^{y'}$  sur  $\Delta_{\pm}$  et

$$(4.3) \quad \Sigma_d^{y'} = \{(t, y); t = \|y\| + \|y'\|\}.$$

La fonction  $g_{e,y'}$  se calcule explicitement et on peut montrer qu'elle est conormale analytique sur la partie lisse de  $\Sigma_i^{y'} \cup \Sigma_r^{y'} \cup \Sigma_d^{y'}$ . Nous allons utiliser les résultats de P. Gérard et G. Lebeau [GL93] pour calculer l'onde diffractée par le coin associée à cette onde incidente.

**THÉORÈME 4** (cf. [GL93, th. 1.1]). — *Soit  $\alpha > 0$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  et un symbole analytique  $\sigma(y, y', \tau)$  défini sur  $(\mathbb{R}_y^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}_{y'}^2 \setminus \{0\})$  se prolongeant en une fonction holomorphe dans  $\text{Im}(\tau) < 0$  tel que*

$$(4.4) \quad \sup_{\tau} \left| \frac{\sigma(y, y', \tau)}{(1 + |\tau|)} \right| < +\infty$$

et la fonction  $g_{d,y'} = g_{y'} - g_{e,y'}$  est pour  $\|y'\| + \varepsilon > t > \|y'\|$  conormale analytique par rapport à  $\Sigma_d^{y'}$  et s'écrit, pour  $0 < |(y)| < 2\varepsilon$  et  $y \in \Omega_{\alpha}$ , modulo une fonction analytique,

$$(4.5) \quad g_{d,y'}(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau(t-|y|-|y'|)} \sigma(y, y', \tau) d\tau.$$

**REMARQUE 4.3.** — Ce résultat n'est dans [GL93] démontré que pour une onde incidente de régularité  $H^1$  qui correspondrait à des points  $y' \in \Omega^+$ , mais il est clair que la démonstration donnée reste valide, modulo quelques modifications mineures pour  $y' \in \Omega^- \cap \Omega_{\alpha}$  et, en régularisant en temps selon la méthode exposée précédemment (ce qui se traduit par une division des symboles par  $(\tau - i)^2$ ) pour la fonction de Green que nous calculons qui n'a pas la régularité  $H^1$ .

**REMARQUE 4.4.** — Le calcul explicite de  $g_{e,y'}$  montre que cette fonction est aussi de la forme (4.5) près de  $\Sigma_d^{y'}$  en dehors de son intersection avec  $\Sigma_i^{y'} \cup \Sigma_r^{y'}$ .

Soient  $(u_n)$ , une suite de solutions de l'équation (1.3), d'énergies égales à 1,  $\alpha, \varepsilon > 0$  et  $O$  un coin. On considère l'ensemble,  $C_\varepsilon$  des points  $\varrho \in SZ^+$  tels qu'il existe une bicaractéristique  $\gamma$  vérifiant

$$\gamma(0) = (O, t_1, -\frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad j \circ \pi^{-1}(\gamma(-\varepsilon)) = \varrho.$$

On note  $\varrho_\varepsilon^\pm$  les deux points de  $C_\varepsilon$  correspondant aux deux demi-bicaractéristiques réfléchies associées au rayon incident  $\gamma$ . On suppose qu'aucun de ces deux points ne rencontre le support de la mesure  $\mu^+$ . On note  $C_{\varepsilon,\beta}$  les points de  $C_\varepsilon$  correspondant aux directions de départ du coin faisant un angle inférieur à  $\beta$  avec les demi-tangentes aux faces du coin. On suppose aussi qu'aucun de ces points ne rencontre le support de la mesure  $\mu^+$ . Enfin on suppose que  $\varepsilon$  est assez petit pour que les bicaractéristiques correspondant aux directions de départ du coin faisant un angle supérieur à  $\beta$  ne rencontrent pas le bord pour  $t \in ]0, 2\varepsilon]$ . Soient  $W$  un voisinage de  $C_{\varepsilon,\beta} \cup \varrho_\varepsilon^+ \cup \varrho_\varepsilon^-$  inclus dans le complémentaire du support de  $\mu$ ,  $Q_i, i = 1, 2, 3$  une partition pseudodifférentielle de l'identité (en variables  $y, \xi$ ),  $0 < \eta \ll \varepsilon$  et  $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_t)$  égale à 0 pour  $t < t_1 - \varepsilon - \eta$  et à 1 pour  $t > t_1 - \varepsilon + \eta$  tels que :

- (i) le symbole principal de  $Q_1 \times \Psi'$  est nul au voisinage de  $C_\varepsilon$  ;
- (ii) le symbole principal de  $Q_2$  est supporté dans la projection en variables  $y, \xi$  de  $W$  ;
- (iii) si on note  $D_{\varepsilon,\beta}$  la projection en  $y$  de  $C_\varepsilon \setminus C_{\varepsilon,\beta}$ , le noyau distribution de  $Q_3, \mathcal{K}_{Q_3}$  est supporté dans un petit voisinage (qu'on fixera ultérieurement) de  $D_{\varepsilon,\beta} \times D_{\varepsilon,\beta}$ .

On note  $(u_n^i)$  les solutions des systèmes :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \tilde{\Delta})u_n^i = \Psi''(t)Q_i(u_n) + 2\Psi'(t)Q_i(\partial_t u_n) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ u_n^i|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_n^i|_{t < t_1 - \varepsilon - \eta} \equiv 0. \end{cases}$$

Comme  $(\partial_t^2 - \Delta)(\Psi u_n) = \Psi''(t)u_n + 2\Psi'(t)\partial_t u_n$ , on a clairement

$$u_n^1 + u_n^2 + u_n^3 = \Psi(t)u_n ;$$

donc, pour tout  $t > t_1 - \varepsilon + \eta$  (et en particulier au voisinage de  $t = t_1$ ),  $u_n = \sum u_n^i$ . Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que ces trois suites (qui sont pour  $t > t_1 - \varepsilon + \eta$  des solutions d'énergies bornées de l'équation des ondes) admettent des mesures de défaut de compacité notées  $\mu^i$  respectivement. On peut alors montrer comme à la section 3



que les mesures  $\mu^{1,+}$  et  $\mu^{2,+}$  sont nulles au voisinage de  $(O, t_1, \tau = -\frac{1}{2})$ . Au voisinage de ce point les mesures  $\mu^+$  et  $\mu^{3,+}$  coïncident donc.

Soient  $\alpha < \beta$  et  $K$  un compact de  $\Omega$  tels que le support du noyau distribution de l'opérateur  $Q_3$  est inclus dans  $K \times K$ . La fonction  $u_n^3$  s'écrit

$$(4.6) \quad u_n^3(y, t) = \int_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ y' \in K}} g_{y'}(t-s) (\Psi'' Q_3(u_n) + 2\Psi' Q_3(\partial_t u_n))(s, y') dy' ds.$$

Pour  $y' \in D_{\varepsilon, \beta}$ , la projection en  $y, t$  de  $\gamma(s)$ , avec  $\frac{1}{2}\varepsilon < s < \varepsilon$ , est incluse dans la partie régulière de la surface  $\Sigma_i^{y'} \cup \Sigma_r^{y'} \cup \Sigma_d^{y'}$  (qui coïncide alors avec  $\Sigma_d^{y'}$ ). Si on choisit le voisinage  $K$  assez petit, on obtient donc, d'après le théorème 4 et la remarque 4.4, que près de la projection en  $y, t$  de  $\gamma(s)$ ,  $\frac{1}{2}\varepsilon < s < \varepsilon$ , la fonction  $u_n^3$  s'écrit sous la forme (on note  $\mathcal{F}_{t \rightarrow \tau}$  la transformation de Fourier en variable  $t$ ),

$$(4.7) \quad u_n^3(y, t) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow t}^{-1} e^{-i\tau|y|} \int_K e^{-i\tau|y'|} \sigma(y, y', \tau) \mathcal{F}_{t \rightarrow \tau} (\Psi''(t) Q_3(u_n) + 2\Psi'(t) Q_3(\partial_t u_n))(y', \tau) dy',$$

où  $\sigma$  vérifie (4.4).

Un calcul standard montre que la mesure de défaut de compacité  $H^1$  de suites de la forme (4.7) est supportée par l'ensemble  $(\xi, \eta) = -\tau y/|y|$  et d'autre part, la présence du symbole  $\sigma$  implique que si  $\omega \subset \subset \Omega$  est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle,  $I \subset \mathbb{R}_t$  un compact,  $\omega_k \subset \omega_{k-1}$  des voisinages ouverts de  $\Omega$  tels que  $\bigcap_k \omega_k = \omega$  alors

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_k \liminf_n \int_{\omega_k \times I} |\nabla_y v_n|^2 + |\partial_t v_n|^2 dy dt \\ &\geq \lim_k \langle \mu, T^* M|_{\omega_k \times I} \rangle \\ &\geq \langle \mu, T^* M|_{\omega \times I} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique que la mesure de défaut de compacité  $H^1$  de telles suites est, en dehors du bord de  $M$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $dy$  donc de la forme

$$a(t, y) dy \otimes \delta_{\xi = \frac{y}{2|y|}},$$

ce qui peut aussi s'écrire en coordonnées polaires :

$$b(t, r, \xi) r dr d\xi \otimes \delta_{\theta=2\xi}.$$

Ceci termine l'étude du cas 3).

Enfin, il reste à nous affranchir de l'hypothèse  $\varrho_0 \notin T^*L$  que nous avons fait au début de cette partie. Pour cela, on applique la proposition 3.6 qui permet de construire une demi-bicaractéristique, définie pour  $t$  appartenant à  $[\frac{1}{2}T - \frac{1}{3}T, \frac{1}{2}T + T_3[$ , issue de  $\varrho_0$  vers  $t > \frac{1}{2}T$ , incluse dans le support de la mesure  $\mu$ , puis, à partir d'un point quelconque de cette demi-bicaractéristique, qui n'est pas, pour  $t$  assez proche mais distinct de  $\frac{1}{2}T$ , dans  $T^*L$ , on applique la stratégie précédente, ce qui permet de conclure comme précédemment.

**Annexe A. Obstacles strictement convexes**

Nous donnons dans cette annexe une classe d'exemples explicites où l'hypothèse de non focalisation sur les coins est vérifiée.

Soient  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ , un ouvert borné de classe  $C^\infty$  et  $\Theta_i$ , avec  $i = 1, \dots, N$ , des obstacles analytiques par morceaux, strictement convexes (c'est-à-dire à courbures strictement positives), inclus dans  $\tilde{\Omega}$ . On note

$$\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^N \Theta_i \quad \text{et} \quad \Gamma = \partial\tilde{\Omega}$$

(on contrôle sur le bord extérieur). On fixe  $T > 0$ .

PROPOSITION A.1. — *Si le couple  $(\Gamma, T)$  contrôle géométriquement  $\Omega$ , alors l'ouvert  $\Omega$  est non focalisant sur les coins.*

On va montrer que les rayons qui connectent un coin à un autre, sans rencontrer le bord  $\Gamma$  en un point non diffractif, sont complètement déterminés par la suite formée des obstacles sur lesquels ils se réfléchissent entre temps. Ce résultat est bien connu, nous en donnons néanmoins la démonstration pour être complets. Dans toute la démonstration, puisque nous ne considérons que des rayons qui ne rencontrent  $\Gamma$  qu'en des points diffractifs (donc des points où ils sont tangents à  $\Gamma$ ), nous supposons que  $\Omega = (\bigcup_{i=1}^N \Theta_i)^c$ . On notera  $O_0, \dots, O_m$  les coins. Soit  $\gamma$ , un rayon bicaractéristique joignant les coins  $O_{i_0}$  et  $O_{i_p}$ . On suppose que la projection spatiale de  $\gamma$  est  $g = \bigcup_{i=1}^p [x_i, x_{i-1}]$  avec  $x_j \in \Theta_{i_j}$  ( $1 \leq j < p$ ). On considère la fonction  $F$  définie sur  $\Theta = \Theta_{i_1} \times \dots \times \Theta_{i_{N-1}}$  par

$$F(Y) = (y_1, \dots, y_{p-1}) = \sum_{i=1}^p \|y_i - y_{i-1}\|,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la distance euclidienne et  $y_0 = x_0, y_p = x_p$ . Cette fonction est convexe sur le convexe  $\Theta$  et une étude locale simple montre que  $\gamma$  est

un minimum local (donc global) de  $F$  (ce qui ne serait pas toujours le cas si  $\gamma$  était un pseudo rayon). Supposons que ce minimum est atteint en deux points distincts,  $X$  correspondant à  $\gamma$  et  $Y$ . L'écriture de l'égalité

$$\begin{aligned} & \|\lambda(y_i - y_{i-1}) + (1 - \lambda)(x_i - x_{i-1})\| \\ &= \lambda\|(y_i - y_{i-1})\| + (1 - \lambda)\|(x_i - x_{i-1})\|, \end{aligned}$$

implique que pour tout  $1 \leq i < N$ ,

$$x_i - x_{i-1} = \alpha_i(y_i - y_{i-1}),$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{N-1}$  et  $\alpha \neq (1, \dots, 1)$ .

Soit  $j$ , le plus petit indice tel que  $\alpha_j \neq 1$ . On a donc  $x_{j-1} = y_{j-1}$ ,  $x_j \neq y_j$  et le segment  $[x_j, y_j]$  est inclus dans  $\Theta_j$ . Par ailleurs, comme  $X$  est un rayon réfléchi, soit les trois points  $x_{j-1}, x_j$  et  $x_{j+1}$  ne sont pas alignés, soit le segment  $[x_{j-1}, x_{j+1}]$  est tangent à  $\Theta_j$  en  $x_j$  (ou  $x_j$  est un coin).

Supposons que le point  $y_j$  est à l'intérieur du segment  $[x_{j-1}, x_j]$ . Alors le segment  $[y_j, x_j]$  est inclus dans  $\Theta_j$ , ce qui n'est pas possible puisque  $\Theta_j$  est strictement convexe et que le rayon  $g$  ne peut pas rentrer à l'intérieur de  $\Theta_j$ . Donc, nécessairement, le point  $x_j$  est à l'intérieur du segment  $[y_{j-1}, y_j]$ , ce qui montre que le rayon  $Y$  rentre à l'intérieur de  $\Theta_j$  (puisque  $[x_j, y_j] \subset \Theta_j$ ) et donc qu'il ne correspond pas à un rayon bicaractéristique généralisé.

On déduit de ce qui précède qu'il existe un nombre au plus dénombrable de rayons qui connectent deux coins quelconques sans rencontrer le bord  $\Gamma$ , ce qui implique clairement la proposition A.1.

Nous allons donner comme application de la proposition A.1 la classe d'exemples qui a motivé notre étude.

**COROLLAIRE A.2.** — *Soit  $L$ , un réseau de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné, de classe  $C^\infty$  sans contact d'ordre infini avec ses tangentes. Il existe pour tout point  $x \in \tilde{\Omega} \cap L$  un convexe strict,  $\Theta_x$ , non vide, à frontière analytique par morceaux, contenant  $x$  et  $T > 0$  tels que, si on note  $\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_x \Theta_x$  et  $\Gamma = \partial\tilde{\Omega}$  ( $\Gamma$  est le bord extérieur de l'ouvert  $\Omega$ ), alors :*

- le couple  $(\Gamma, T)$  contrôle géométriquement  $\Omega$ ;
- l'ouvert  $\Omega$  est non focalisant sur les coins.

*En particulier le couple  $(\Gamma, T)$  contrôle exactement  $\Omega$ .*

**REMARQUE A.3.** — L'obtention d'un tel résultat de contrôlabilité exacte avec des méthodes de multiplicateurs suivant J.L. Lions et P. Grisvard,

indépendamment de l'optimalité du temps nécessaire, est à peu près désespérée puisque ces méthodes de multiplicateurs impliquent nécessairement que le contrôle agisse sur « au moins la moitié » des obstacles

REMARQUE A.4. — Ce résultat de contrôlabilité exacte avec un contrôle agissant uniquement sur le bord extérieur de l'ouvert  $\Omega$  est évidemment faux si on suppose que les obstacles  $\Theta_x$  sont réguliers (de classe  $C^2$  au moins), puisqu'alors il existe des rayons de l'optique géométrique de longueur arbitrairement grande qui ne rencontrent pas  $\overline{\Gamma \times [0, T]}$  (il suffit de prendre les rayons qui minimisent la distance entre deux obstacles voisins), et la situation considérée ne vérifie donc pas les conditions nécessaires de contrôlabilité exacte de [BLR92] (dans un cadre  $C^\infty$ ) ou de [Bur97a] (dans le cadre  $C^2$ ). Dans notre exemple, les segments qui minimisent la distance entre deux obstacles consécutifs sont des pseudo-rayons mais pas des rayons. Cet exemple illustre donc l'intérêt d'utiliser des obstacles à coins.

La deuxième partie du corollaire A.2 étant, d'après ce qui précède automatiquement vérifiée, il suffit de démontrer la première.

On choisit un système de coordonnées sur  $\mathbb{R}^2$ . Quitte à faire une rotation, on peut supposer que le réseau est de la forme

$$L = \{(n + \alpha m, m); (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

On va prendre les obstacles  $\Theta_{n,m}$  obtenus par translation de vecteur  $(n + \alpha m, m)$  à partir d'un même obstacle  $\Theta$  qui est un losange très plat, rendu par légère déformation strictement convexe. On commence par vérifier qu'on peut choisir ce losange assez petit et assez plat pour que la propriété de contrôle géométrique soit vérifiée. On considère en effet un rayon : s'il rencontre un obstacle, on sait que nécessairement, après un nombre fini de réflexions, soit il monte vers un obstacle de la rangée supérieure ou inférieure, soit il est contrôlé. Il suffit donc de prendre le losange de base assez plat et petit pour que tout rayon venant d'une rangée inférieure continue à monter et donc atteigne la rangée encore supérieure, *etc.* (voir la figure 7).

Enfin, pour vérifier l'hypothèse de contrôlabilité directe des demi-rayons tangents aux faces des losanges il suffit de déplacer légèrement latéralement les rangées les unes par rapport aux autres.

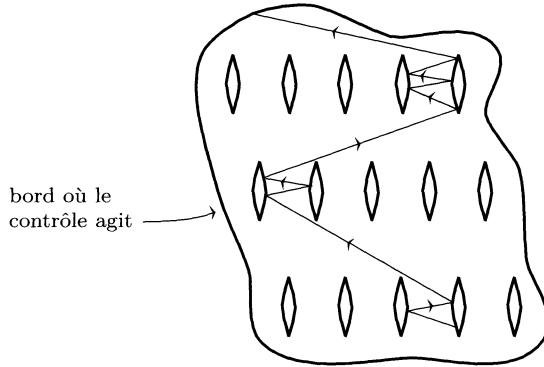


Figure 7. Un exemple illustrant l'intérêt d'utiliser des obstacles à coins.

### Annexe B (en collaboration avec J.-M. Schlenker). Généricité de l'hypothèse de non focalisation

En dehors des cas particuliers de l'annexe précédente, l'hypothèse de non focalisation sur les coins est à peu près impossible à vérifier «à la main». Nous démontrons donc dans cette annexe que cette hypothèse est génériquement vérifiée. On choisit  $\Omega_0$  un ouvert à coins vérifiant les hypothèses de l'introduction. On note  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_D\}$  l'ensemble des coins et  $V$  un voisinage dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\Omega$ . On s'intéresse à des déformations de  $\Omega_0$  obtenues de la manière suivante. Pour tout difféomorphisme

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

égal à l'identité en dehors de  $V$  (on notera  $\Psi \in C_V^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ), on note

$$\Omega_\Psi = \Psi(\Omega_0)$$

et on dira que  $\Omega_\Psi$  est proche de  $\Omega_0$  en topologie  $C^\infty$  si  $\Psi$  est proche de l'identité (en topologie  $C^\infty$ ). On dira qu'une propriété est *génériquement vérifiée au voisinage de l'ouvert  $\Omega_0$*  si elle est (pour un certain choix de  $V$ ) génériquement vérifiée par les ouverts  $\Omega_\Psi$ , c'est-à-dire qu'elle est vérifiée par les ouverts  $\Omega_\phi$ ,  $\phi \in O_d$ , où  $O_d$  est un ouvert dans l'ensemble des fonctions  $C_V^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ , dense au voisinage de l'identité (pour la topologie  $C^\infty$ ). Dans la mesure où les propriétés qui nous intéresseront sont ouvertes, il s'agit bien de la notion de généricité usuelle.

Nous allons montrer dans cette annexe que si  $(\Gamma, T)$  contrôle géométriquement l'ouvert  $\Omega_0$ , alors l'hypothèse de non focalisation sur les coins est génériquement vérifiée au voisinage de  $\Omega_0$ . On remarquera, puisque d'une

part les ouverts proches du domaine de départ pour la topologie  $C^\infty$  ont le même nombre de coins et sont  $C^\infty$  par morceaux et d'autre part les domaines analytiques par morceaux sont denses, que cette propriété de généricité montre que l'hypothèse de non focalisation sur les coins est vérifiée par un ensemble dense (pour la topologie  $C^\infty$ ) de domaines analytiques par morceaux.

Il est clair que si une propriété  $P_1$  est génériquement vérifiée au voisinage de  $\Omega_0$  et si une autre propriété  $P_2$  est génériquement vérifiée au voisinage de tout ouvert  $\Omega_\Psi$  proche de  $\Omega_0$  en topologie  $C^\infty$ , vérifiant  $P_1$ , alors la propriété  $P_1 \cap P_2$  est génériquement vérifiée au voisinage de  $\Omega_0$ . Nous ferons par la suite un usage répété de cette remarque.

Un raisonnement par l'absurde montre que si les ouverts  $\Omega$  et  $\Omega_\Psi$  sont assez proches l'un de l'autre pour la topologie  $C^\infty$  et si  $(\Gamma, T_0)$  contrôle géométriquement  $\Omega$  alors  $(\Gamma_\Psi = \Psi(\Gamma), T_0)$  contrôle géométriquement  $\Omega_\Psi$ . En effet, si ce n'était pas le cas on construirait une suite  $\Psi_n$  convergeant vers l'Identité et des bicaractéristiques  $\gamma_n$  de  $\Psi_n(\Omega)$  ne rencontrant  $\Psi_n(\Gamma) \times ]0, T[$  qu'en des points diffractifs. Par compacité on pourrait extraire une sous suite qui converge vers  $\gamma$ , une bicaractéristique de  $\Omega$  qui ne rencontre  $\Gamma \times ]0, T[$  qu'en des points diffractifs. On remarque aussi en faisant un raisonnement du même type que l'hypothèse de contrôle direct des demi-rayons tangents aux coins est également stable. Plus précisément, il existe  $\theta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $\Psi$  est assez proche de l'identité pour la topologie  $C^\infty$ , tout rayon de  $\Omega_\Psi$  issu d'un point à distance inférieure à  $\alpha$  d'un coin (un point de  $\Psi(\mathcal{K})$ ) dans une direction faisant un angle inférieur à  $\theta$  avec la direction donnée par une des deux demi-tangentes au bord en ce point rencontre  $\Gamma_\Psi$  en un point non diffractif avant de rencontrer à nouveau un coin. Puisque le résultat de généricité que nous voulons démontrer est local, nous nous placerons dans la suite dans un voisinage ouvert (pour la topologie  $C^\infty$ ) de  $\Omega_0$  tel que sur ce voisinage on a la propriété précédente.

### B.1. Étude des points de contact tangentiel.

On commence par démontrer la propriété suivante :

PROPOSITION B.1. — *Génériquement au voisinage de  $\Omega_0$ , aucun rayon issu d'un coin ne peut être tangent au bord puis rencontrer un autre coin sans être contrôlé géométriquement entre temps*

Nous allons démontrer ce résultat en utilisant les méthodes standard de transversalité. Nous rappelons un résultat inspiré des méthodes de R. Thom [Tho56]. Nous utilisons les notations de F. Laudenbach [Lau95], §4. On considère  $f \in C^\infty(M; N)$  une application différentiable entre variétés,  $P \subset N$  une sous variété propre et  $K \subset M$ . On dit que  $f$  est

transversale sur  $P$  le long de  $K$  si pour tout point  $x \in f^{-1}(P) \cap K$ , on a

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}P + Tf(T_xM).$$

On considère une famille  $\mathcal{F} \subset C^\infty(M; N)$  d'applications satisfaisant une condition particulière (dans notre cas cette condition sera d'être des flots sur des ouverts obtenus comme déformation de notre ouvert de départ).

DEFINITION B.2. — On dira que la famille  $\mathcal{F}$  est localement transversale sur  $P$  si pour tout  $f \in \mathcal{F}$  et tout  $a \in M$  il existe un voisinage  $K$  de  $a$  dans  $M$  et un voisinage  $W$  de  $f$  dans  $\mathcal{F}$  tels que pour tout  $g \in W$  il existe une famille  $G : M \times S \rightarrow N$  vérifiant les conditions suivantes

- 1) l'espace des paramètres,  $S$  est un voisinage de 0 dans un espace  $\mathbb{R}^q$ ;
- 2) pour tout  $s \in S$ ,  $G_s \in \mathcal{F}$ ;
- 3)  $G_0 = g$ ;
- 4)  $G$  est transversale sur  $P$  le long de  $K \times S$ .

PROPOSITION B.3 (cf. [Lau95, th. 4.3]). — Si la famille  $\mathcal{F}$  est localement transversale, alors pour tout compact  $K \subset M$ , l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  qui sont des applications transversales sur  $P$  le long de  $K$  est un ouvert dense de  $\mathcal{F}$

Pour démontrer la proposition B.1, on commence par étudier les rayons de longueur inférieure à  $T_0$ , le temps de contrôle géométrique, qui tournent dans la concavité du bord. Ces rayons ne peuvent quitter le bord qu'en des points où la courbure s'annule ou en des points qui sont des coins. D'après l'hypothèse de contrôle direct des demi-rayons tangents aux coins, il suffit d'étudier sur un intervalle de temps de longueur  $T_0$  les demi-rayons qui sont issus pour  $t = 0$  des points du bord où la courbure s'annule. Ces points sont en nombre fini et les demi-rayons correspondant forment un ensemble de dimension 1. Il est donc facile de voir que génériquement on peut assurer que ces demi-rayons ne rencontrent aucun coin. Si  $\Omega_0$  vérifie cette dernière propriété, on en déduit par compacité le lemme suivant :

LEMME B.4. — Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $\Psi \in C_V^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  est assez proche (pour la topologie  $C^\infty$ ) de l'identité, aucun rayon de  $\Omega_\Psi$  ne peut rencontrer deux coins sans être contrôlé entre temps par  $\Psi(\Gamma)$  s'il a aussi au moins  $N_0$  points de réflexion sur le bord entre ces deux coins (ou s'il tourne dans la concavité du bord)

(L'argument pour démontrer ce résultat est simplement que si le rayon n'est pas contrôlé entre les deux coins, alors la distance le long du rayon entre les deux coins est majorée par  $T$  et donc, si le nombre de points de réflexion de ce rayon,  $N$ , est assez grand, le rayon est proche d'un rayon qui tourne dans la concavité et est donc contrôlé.)

On suppose maintenant que l'ouvert  $\Omega_0$  vérifie le lemme B.4. On va montrer que génériquement les rayons issus d'un coin qui en rencontrent un autre avant d'être contrôlés par  $\Psi(\Gamma)$  ne sont jamais tangents au bord. On notera  $\Phi_N^\Psi(x, \xi, t)$  le point sur le N-rayon (dans  $\Omega_\Psi$ ) issu de  $(\Psi(x), {}^tT\Psi(\xi))$ , situé à distance  $t$  (le N-rayon est défini comme le rayon excepté qu'on oublie les réflexions à partir de la  $(N + 1)$ -ième, étant entendu qu'on ne s'intéressera à cette application que dans le cas où le rayon correspondant n'a pas de point de contact tangentiel avec le bord avant d'avoir eu  $N$  réflexions sur le bord).

En toute rigueur, ce point n'est pas bien défini puisqu'à chaque fois qu'on rencontre un coin, il y a deux manières de prolonger le rayon selon que la réflexion se fait sur l'une ou l'autre des faces du coin ou, le cas échéant, s'il y a transmission directe. Néanmoins, si la longueur du rayon est bornée, le nombre de coins rencontrés l'est aussi et donc aussi le nombre de choix faits, donc pour notre propos tout se passera comme s'il n'y avait qu'un seul choix possible. Pour simplifier l'exposition, nous nous placerons par la suite dans le cas plus simple où l'ouvert est de classe  $C^\infty$  et où les points  $K_i$  sont des points du bord. Néanmoins, la démonstration que nous donnons s'adapte, modulo quelques complications techniques, au cas initial.

On notera  $\Phi_{N,i}^\Psi$  la restriction de l'application  $\Phi_N^\Psi$  à l'ensemble  $\{K_i\} \times \mathbb{S}^1$  et

$$\mathcal{T}_{N,i} = \left( \Phi_{N,i}^\Psi, \frac{d}{dt} \Phi_{N,i}^\Psi \right),$$

l'application obtenue à partir de  $\Phi_{N,i}^\Psi$  en rajoutant la direction finale du rayon. Cette application est de classe  $C^\infty$  en dehors des points dont l'image par  $\Phi_{N,i}^\Psi$  est un point de réflexion et tant que le rayon n'a pas eu entre les instants de départ du coin  $K_i$  et  $t$  de contact tangentiel avec le bord. On notera  $S_{N,i}$  l'ensemble des directions et des temps  $(\xi, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  tels que le rayon issu de  $K_i$  dans la direction  $\xi$  à un point de premier contact tangentiel avec le bord au temps  $t$ , après avoir fait  $N$  réflexions et avant d'avoir rencontré un autre coin, et n'est pas contrôlé avant de rencontrer un autre coin. D'après ce qui précède, la distance entre deux points de contact avec le bord le long de tout rayon de ce type est minorée (puisque un tel rayon ne peut pas être proche d'un rayon qui tourne dans la concavité du bord). Il existe donc un voisinage ouvert  $S^{N,i}$  de  $S_{N,i}$  sur lequel l'application  $\mathcal{T}_{N,i}$  est de classe  $C^\infty$  (puisque elle est régulière en dehors des points de réflexion). On choisira aussi ce voisinage assez petit de telle sorte que cette régularité reste vérifiée pour tout ouvert  $\Omega$  assez proche de  $\Omega_0$ . On peut aussi supposer (puisque les rayons issus de  $S_{N,i}$  n'ont pas rencontré d'autre coin avant leur contact tangentiel



avec le bord qui se fait nécessairement en un point distinct des coins d'après l'hypothèse de contrôle direct des rayons tangents) que les rayons issus de  $S^{N,i}$  ne rencontrent pas un petit voisinage du coin  $K_i, V_i$ . On considère une famille de déformations de l'ouvert  $\Omega_0$  de la forme

$$(B.1) \quad \Omega_a = \{y = x + a_1 f(x)n(x) + a_2 g(x)t(x); x \in \Omega_0\},$$

où  $n(x)$  et  $t(x)$  désignent respectivement les normales et les tangentes au bord au point  $x$  (avec un choix local arbitraire de l'orientation),  $a = (a_1, a_2)$  désigne un paramètre variant dans un petit voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2$ , et les fonctions  $g, f$  sont de classe  $C^\infty$  et supportées dans  $V_i$  et égales à 1 au coin  $K_i$ . Il est facile de définir une famille  $\Psi_a \in C_V^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  dépendant de manière  $C^\infty$  du paramètre  $a$  telle que

$$\Omega_{\Psi_a} = \Omega_a \quad \text{et} \quad \Psi_a(K_j) = K_j + a_1 f(K_j)n(K_j) + a_2 g(K_j)t(K_j).$$

On définit aussi l'application  $\mathcal{T}_{N,i,a} : S^{N,i} \rightarrow \mathbb{R}^2$  comme l'application  $\mathcal{T}_{N,i}$  sauf que le point de départ du rayon est le point  $\Psi_a(K_i)$  et l'ouvert considéré  $\Omega = \Omega_a$ . En utilisant (à ouvert fixé mais en faisant aussi varier le point de départ du rayon) que le flot bicaractéristique est un difféomorphisme, il est alors très facile de voir que pour tout  $(\xi_0, t_0)$  dans  $S^{N,i}$ , l'application  $(a, \xi, t) \mapsto \mathcal{T}_{N,i,a}(\xi, t)$  est un difféomorphisme local d'un voisinage de  $(0, \xi_0, t_0)$  sur un voisinage de  $\mathcal{T}_{N,i}(\xi_0, t_0)$ . La famille  $\mathcal{F} = \mathcal{T}_{N,i}^\Psi$  des applications obtenue en prenant toutes les déformations de l'ouvert  $\Omega_0$  possibles, assez proches de l'identité est donc localement transversale sur  $T^*\partial M$  le long de  $S^{N,i}$ . L'application  $\mathcal{T}_{N,i}$  est donc génériquement transversale sur  $T^*\partial M$  le long de  $S^{N,i}$  ce qui implique que génériquement les points de premier contact tangentiels des rayons avec le bord sont isolés, donc en nombre fini. Il est donc facile d'assurer que génériquement ces rayons ne rencontrent pas d'autre coin avant d'être contrôlés. Il suffit en effet pour cela de déformer l'ouvert aux voisinage des points de contact ultérieurs du rayon avec le bord.

## B.2. Étude des points de contact transverse avec le bord.

On suppose dans toute la suite que l'ouvert  $\Omega_0$  est tel que pour tout  $\Psi$  assez proche de l'identité, aucun rayon de  $\Omega_\Psi$  issu d'un coin ne peut être tangent au bord puis rencontrer un autre coin sans être contrôlé géométriquement par  $\Psi(\Gamma)$  entre temps.

DÉFINITION B.5. — On dira qu'un rayon issu d'un coin dans la direction  $\xi_0$  et rencontrant un coin,  $K = \Psi(K_0, \xi_0, t_0), t_0 \neq 0$  n'est pas focalisant du premier coin sur le second si

- soit il est contrôlé entre ces deux coins,
- soit il n'a que des points de réflexion transverses, en nombre  $N$  et la différentielle par rapport à  $\xi, t$  de l'application  $\Phi_N^\Psi$  au point  $(K_0, \xi_0, t_0)$  est bijective, ce qui implique que l'application  $\Phi_N^\Psi(K_0, \cdot, \cdot)$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $(\xi_0, t_0)$  sur un voisinage de  $K$  et montre qu'il n'y a pas focalisation d'un voisinage de  $(\xi_0, t_0)$  sur le coin  $K$ .

Nous allons montrer la proposition suivante.

PROPOSITION B.6. — *Génériquement au voisinage de  $\Omega_0$ , aucun rayon ne rencontre à trois instants distincts l'ensemble des coins sans être contrôlé en un point non diffractif par  $\Gamma$  et tout rayon issu d'un coin qui en rencontre un autre sans être contrôlé en un point non diffractif par  $\Gamma$  entre temps est non focalisant du premier coin sur l'autre.*

Avant de démontrer ce résultat, on va montrer qu'il implique qu'au voisinage de l'ouvert  $\Omega_0$  les ouverts sont génériquement non focalisants. En effet, s'il existe un coin  $K_1$  tel qu'il existe une infinité de directions initiales,  $\xi_n$  pour lesquelles le rayon issu de  $K_1$  dans la direction  $\xi_n$  rencontre un autre coin avant d'être contrôlé, alors ce coin est rencontré pour des temps compris entre  $d_{\min}$  (la distance minimale entre deux coins) et  $T_0$  (le temps de contrôle géométrique). Par compacité de la sphère  $S^1$ , il existe donc une direction  $\xi_0$  telle que le rayon  $\gamma$  issu de  $(K_0, \xi_0)$  est tel que :

- il connecte le coin  $K_0$  à un coin  $K_1$  (éventuellement égal à  $K_0$  mais qui est nécessairement unique puisqu'un rayon ne peut pas rencontrer plus de deux coins sans être contrôlé), à un instant qu'on notera  $t_1$ , après  $N$  réflexions;
- il est non focalisant ;
- il existe une nombre infini de directions  $\xi_n$  distinctes, qui convergent quand  $n \rightarrow +\infty$  vers  $\xi_0$ , telles que les rayons associés,  $\gamma_n$  vont du coin  $K_0$  sur un coin  $K_n$ .

Nécessairement, sauf pour un nombre fini de directions, on a  $K_i = K_1$  (puisque sinon, par passage à la limite, le rayon  $\gamma$  rencontrerait un troisième coin). Le même argument montre que les instants  $t_n$  pour lesquels le rayon  $\gamma_n$  rencontre le coin  $K_1$  tendent vers  $t_1$  (puisque sinon, le rayon  $\gamma$  rencontrerait le coin  $K_1$  à deux instants différents). On a aussi nécessairement  $K_1 = \Psi_{N,0}(K_0, \xi_n)$ , c'est à dire que ces rayons font exactement  $N$  réflexions entre les deux coins (on pourrait éventuellement en faire une de plus, disparaissant par passage à la limite, c'est à dire que le point de  $(N + 1)$ -ième réflexion tendrait vers le coin,  $K_1$  et donc disparaîtrait à la limite; mais ceci impliquerait que  $\gamma$ , comme limite

des rayons  $\gamma_n$ , serait tangent au bord en un coin, donc directement contrôlé). Finalement, le fait que le rayon  $\gamma_0$  soit non focalisant donne la contradiction attendue.

Pour démontrer la proposition B.6, nous allons faire une récurrence sur le nombre de réflexions (transverses) entre deux coins consécutifs (sans contrôle entre temps). On sait que ce nombre est borné par le nombre  $N_0$  du lemme B.4.

On va démontrer par récurrence les lemmes suivants, pour  $N \in \mathbb{N}$ .

LEMME B.7 (N). — *Les rayons connectant un coin à un autre et faisant entre ces deux coins au plus  $N$  réflexions sont génériquement non focalisant d'un coin sur l'autre (c'est-à-dire que, si  $\Phi_{N,i}^\Psi(\xi_0, t_0) = K_j \in \mathcal{K}$ , l'application  $\Phi_{N,i}^\Psi$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $(\xi_0, t_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_t$  sur un voisinage de  $K_j \in \mathbb{R}^2$ ) et, génériquement, il n'existe pas de rayon connectant trois coins avec entre chacun des coins consécutifs au plus  $N$  réflexions.*

La première partie du lemme B.7 (0) est vraie puisque les rayons n'ayant pas de point de réflexion ne sont jamais focalisant. Pour démontrer la deuxième partie, on remarque que pour éliminer les rayons qui vont d'un coin sur un autre puis directement sur un suivant, il suffit d'imposer que trois coins ne sont jamais alignés, puis, cette condition étant vérifiée, d'imposer que les demi-tangentes aux coins  $K_i$  ne correspondent pas aux directions (en nombre fini) qui précisément permettent au rayon venant sans réflexion d'un coin  $K_j$  d'aller du coin  $K_i$  vers le coin  $K_k$ , sans autre réflexion. Il est donc clair que ces conditions sont génériquement vérifiées.

Supposons le lemme B.7 (N) vrai. On peut donc supposer que l'ouvert  $\Omega_0$  et les ouverts assez proches vérifient les conclusions du lemme B.4, de la proposition B.6 et du lemme B.7 jusqu'au rang (N). On note  $S_i$  un compact de la sphère unité  $\mathbb{S}^1$  tel que aucun rayon issu du coin  $K_i$  dans une direction  $\xi_i \in S_i$ , de longueur inférieure à  $T_0$ , n'est tangent au bord de l'ouvert, et tel que tous les rayons issus de  $K_i$  dans une direction  $\xi_i \notin S_i$  sont contrôlés avant de rencontrer un autre coin. On supposera aussi que ces propriétés restent vérifiées pour  $\Omega$  assez proche de  $\Omega_0$ . On notera  $\Sigma_i^{N+1} \subset S_i \times \mathbb{R}_t$  l'ensemble des  $(\xi, t > 0)$  tels que le rayon issu de  $K_i$  à  $t = 0$  rencontre un coin  $K_j$  au temps  $t$  n'est pas contrôlé entre ces deux coins, et a eu exactement  $N + 1$  points de réflexion entre ces deux coins.

Il est clair que  $\Sigma_i^{N+1}$  est un ensemble compact. En effet, la seule chose à vérifier est que toute limite uniforme de rayon ayant exactement  $N + 1$  points de réflexion entre deux coins en est aussi un, or puisqu'on a éliminé les rayons tangents, deux points de réflexion consécutifs ne peuvent pas

être arbitrairement proche l'un de l'autre, il ne peut donc pas y avoir de saut sur le nombre de points de réflexion. On notera  $\tilde{\Sigma}_i^{N+1}$  un voisinage ouvert de  $\Sigma_i^{N+1}$  ne contenant aucun couple  $(\xi, t)$  correspondant à un rayon issu de  $K_i$  qui rencontre un autre coin  $K_j$  au temps  $t$ , qui n'est pas contrôlé et a au moins  $N + 2$  points de réflexion entre ces deux coins.

On considère les applications

$$F_{\Psi, N+1, i} : \begin{cases} M = \tilde{\Sigma}_i^{N+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\xi, t) & \longmapsto \Psi^{-1}(\Phi_{N+1, i}^\Psi(\xi, t)). \end{cases}$$

Pour montrer la première partie du lemme B.7 ( $N + 1$ ), il suffit de démontrer que cette application est génériquement un difféomorphisme local. On considère la famille  $\mathcal{F}$  des fonctions  $F_{\Psi, N+1}$  obtenue quand on fait varier  $\Psi$ . On va vérifier que pour tout point  $X \in \tilde{\Sigma}_i^{N+1}$  il existe un voisinage  $K$  de  $X$ , un voisinage  $S$  de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et une application  $G : M \times S \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $s \in S$ ,  $G_s \in \mathcal{F}$ ,  $G_0 = F_{\text{Id}, N+1}$  et telle que la famille  $G$  est transversale sur  $\{K_j\}$  le long de  $K \times S$ . On en déduira que pour un ensemble ouvert dense dans  $\mathcal{F}$  (donc pour un ouvert dense de fonctions  $\Psi$ ), l'application  $F_{\Psi, N+1}$  est transversale sur  $\{K_j\}$  le long de  $\Sigma_i^{N+1}$ , ce qui dit précisément que le rayon n'est pas focalisant. Pour vérifier que l'application  $G$  est transversale, il suffira de vérifier que sa différentielle (par rapport à toutes les variables) est surjective, ce qui est assez facile à réaliser, si l'espace des variables  $s$  est de dimension assez grande.

Soit  $X$  un tel point. Si le rayon ne rencontre pas un autre coin, il n'y a rien à démontrer. S'il le rencontre après  $k$ ,  $k \leq N$  réflexions, d'après l'hypothèse de récurrence, il est non focalisant. S'il le rencontre après  $N + 1$  réflexions, d'après l'hypothèse de récurrence, il ne rencontre aucun coin entre temps (en particulier il ne rencontre pas le coin initial). Il est alors facile de voir que toute famille de déformations indicée par  $s \in S \subset \mathbb{R}^2$  du type (B.1) consistant à déplacer le coin initial  $K \mapsto K + s$  avec une déformation localisée dans un voisinage que le rayon ne peut rencontrer éventuellement qu'au départ et à l'arrivée (dans le cas où  $K_j = K_i$ ) convient.

Il reste à démontrer la deuxième partie du lemme B.7 ( $N + 1$ ). Pour cela, on suppose que la première partie est vérifiée (c'est possible puisque elle est génériquement vérifiée). On en déduit que les rayons (de longueur inférieure à  $T$ ) qui vont d'un coin à un autre en faisant entre temps un nombre inférieur à  $N + 1$  de réflexions sans être contrôlés sont en nombre fini. Imposer qu'on ne puisse pas en enchaîner un à la suite de l'autre revient donc à éliminer un nombre fini de directions de demi-tangences,

ce qui est génériquement possible et démontre le lemme B.7 ( $N+1$ ). Enfin, puisque le nombre de réflexions (transverses) entre deux coins consécutifs (sans contrôle entre temps) est borné, les lemmes B.7 ( $k$ ) impliquent la proposition B.6.

### BIBLIOGRAPHIE

- [BLR92] BARDOS (C.), LEBEAU (G.), RAUCH (J.). — *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, Siam J. Control and Optimization, t. **305**, 1992, p. 1024–1065.
- [Bur97a] BURQ (N.). — *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers*, Asymptotic Analysis, t. **14**, 1997, p. 157–191.
- [Bur97b] BURQ (N.). — *Pôles de diffusion engendrés par un coin*, Astérisque 242, 1997.
- [CT82a] CHEEGER (J.), TAYLOR (M.). — *On the diffraction of waves by conical singularities*, I, Comm. Pure Applied Math., t. **35**, 1982, p. 275–331.
- [CT82b] CHEEGER (J.), TAYLOR (M.). — *On the diffraction of waves by conical singularities*, II, Comm. Pure Applied Math., t. **35**, 1982, p. 487–529.
- [GL93] GÉRARD (P.), LEBEAU (G.). — *Diffusion d'une onde par un coin*, J. Amer. Math. Soc., t. **6**, 1993, p. 341–423.
- [Gri89] GRISVARD (P.). — *Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes en présence de singularités*, J. Math. pures et appliquées, t. **68**, 1989, p. 215–259.
- [Hör85] HÖRMANDER (L.). — *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, III, vol. 274, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Verlag, 1985.
- [Lau95] LAUDENBACH (F.). — *Topologie Différentielle*. — Cours de l'École Polytechnique, Majeure de Mathématiques, École Polytechnique, 1995.
- [Leb96] LEBEAU (G.). — In A. Boutet de Monvel, V. Marchenko, éd., *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, p. 73–109, Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.
- [Lio88] LIONS (J.L.). — *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, R.M.A., vol. 23, Masson, 1988.
- [MS78] MELROSE, (R.B.)J. Sjöstrand. — *Singularities of boundary value problems*, I, Comm. Pure Applied Math., t. **31**, 1978, p. 593–617.

- [Tho56] THOM (R.). — *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. **6**, 1956, p. 43–87.
- [Var97] VARJABÉDIAN (S.). — *Propagation des mesures semi-classiques dans des ouverts à coins*. — Thèse, Université de Paris-Sud, 1997.