BULLETIN DE LA S. M. F.

A. LAISANT

Sur certaines propriétés des centres de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 40-44
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__40_1>

Sur certaines propriétés des centres de gravité;
par M. LAISANT.

(Séance du 20 janvier 1882.)

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XX, p. 337), M. Resal a publié un article intitulé : *Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus,* et qui a pour objet la démonstration de la proposition suivante :

Soient $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ *un polygone formé de n côtés, plan ou* *gauche, m la masse de chacun des n points matériels, partant en même temps des sommets* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *et dans le même sens, avec des vitesses constantes* $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *proportionnelles aux côtés* $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3, \ldots,$ *ou* A_nA_1 ; *le centre de gravité des masses m reste fixe.*

Le théorème de Pappus présente le même énoncé, s'appliquant simplement au triangle.

Si l'on y regarde de près, on voit que la proposition revient simplement à ceci : *Si l'on divise dans un même rapport les côtés successifs d'un polygone fermé, le centre de gravité des points de division (supposés de masses égales) est le même que le centre de gravité des sommets.*

J'ai démontré non seulement cette proposition, mais un certain nombre d'autres propriétés plus générales, dans une Communication faite en 1877 au Congrès du Havre et intitulée : *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française pour l'avancement des Sciences, compte rendu de la sixième Session, p. 142-154). Seulement, mon étude ne s'appliquait qu'aux polygones plans.

L'article de M. Resal ayant ramené mon attention sur ce point, j'ai tenté d'étendre aux polygones gauches quelques-uns de mes résultats, et cela m'a conduit ensuite à certaines conséquences d'une généralité plus grande encore.

C'est à l'exposé de cette généralisation, à laquelle l'algorithme des quaternions s'applique très facilement, qu'est consacrée la présente Note.

2. Soit, comme plus haut, $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ un polygone fermé, gauche en général. Faisons passer par tous les sommets des droites parallèles entre elles, que nous prendrons pour axes de rotation. Puis, admettons que le côté A_1A_2, tournant autour de l'axe passant par A_1, d'un certain angle, le point A_2 vienne en B_2; de même, faisons tourner, du même angle et dans le même sens, les côtés $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ autour des axes passant par $A_2, \ldots, A_n$, si bien que les points $A_3, \ldots, A_1$ viennent occuper les nouvelles positions $B_3, \ldots, B_1$.

Je dis tout d'abord que le centre de gravité des points B_1, $B_2, \ldots, B_n$ sera le même que celui des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Pour le démontrer, je représente par Q un quaternion ayant pour axe et pour angle l'axe et l'angle de chacune des rotations.

On sait alors (*voir*, par exemple, *Introduction à la méthode des quaternions,* p. 172) que ces rotations seront représentées par l'opération

$$Q^{-1}(\ \ )Q.$$

Nous aurons donc

$$A_1B_2 = Q^{-1}.A_1A_2.Q,$$

ou, en remplaçant A_1B_2, A_1A_2 par $B_2 - A_1$, $A_2 - A_1$, l'origine des vecteurs étant quelconque,

$$B_2 - A_1 = Q^{-1}(A^2 - A_1)Q = Q^{-1}A_2Q - Q^{-1}A_1Q.$$

De même,

$$\begin{aligned} B_3 - A_2 &= Q^{-1}A_3Q - Q^{-1}A_2\ \ Q, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_n - A_{n-1} &= Q^{-1}A_nQ - Q^{-1}A_{n-1}Q, \\ B_1 - A_n &= Q^{-1}A_1Q - Q^{-1}A_n\ \ Q, \end{aligned}$$

et, par addition,

$$\Sigma B - \Sigma A = o,$$

ce qui démontre la proposition, en divisant le premier membre par n.

3. Si maintenant nous divisons A_1B_2, A_2B_3, ..., A_nB_1 dans le même rapport, en C_2, C_3, ... C_1, le centre de gravité des points de division C sera encore le même que le centre de gravité de points A. Car nous aurons

$$A_1C_2 = kA_1B_2, \quad \text{ou} \quad C_2 - A_1 = k(B_2 - A_1),$$

et, de même,

$$\begin{aligned} C_3 - A_2 &= k(B_3 - A_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 - A_n &= k(B_1 - A_n); \end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$\Sigma C - \Sigma A = k(\Sigma B - \Sigma A) = o.$$

4. Prenons maintenant un système de droites quelconques dans l'espace A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, au lieu de considérer les côtés successifs d'un polygone fermé; et supposons que toutes ces

droites tournent à la fois, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par les points A_1, A_2, ..., A_n.

Les points B_1, B_2, ..., B_n prendront ainsi de nouvelles positions B'_1, B'_2, ..., B'_n.

Je désigne par G_a, G_b, $G_{b'}$ les centres de gravité des points A, des points B et des points B', respectivement; les masses pouvant même varier d'un point à un autre, mais étant toujours les mêmes pour les trois points A_i, B_i, B'_i de même indice.

Dans ces conditions, le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b tournant autour d'un axe de rotation passant par G_a, parallèle aux premiers, et cela du même angle et dans le même sens.

Pour le démontrer, je représente toujours par $Q^{-1}(\ )Q$ le symbole de la rotation commune. J'aurai alors, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} B'_1 - A_1 &= Q^{-1} B_1 Q - Q^{-1} A_1 Q, \\ B'_2 - A_2 &= Q^{-1} B_2 Q - Q^{-1} A_2 Q, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ B'_n - A_n &= Q^{-1} B_n Q - Q^{-1} A_n Q. \end{aligned}$$

Multipliant respectivement ces relations par les masses correspondantes m_1, m_2, ..., m_n, puis ajoutant, j'obtiens

$$\Sigma m B' - \Sigma m A = Q^{-1}.\Sigma m B.Q - Q^{-1}\Sigma m A.Q;$$

c'est-à-dire, en divisant par la masse totale Σm,

$$G_{b'} - G_a = Q^{-1} G_b Q - Q^{-1} G_a Q = Q^{-1}(G_b - G_a)Q,$$

ou encore

$$G_a G_{b'} = Q^{-1}.G_a G_b.Q,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarquons immédiatement que, dans le cas du polygone fermé, considéré tout d'abord, les points G_b et G_a coïncident, et que, par suite, $G_{b'}$ doit coïncider aussi avec eux. Ce n'est donc qu'un cas particulier de la propriété plus générale à laquelle nous sommes arrivé maintenant.

5. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que, si les points C_1, C_2, ..., C_n divisent dans un même rapport les droites $A_1B'_1$, $A_2B'_2$, ..., $A_nB'_n$, leur centre de gravité G_c divisera dans le

même rapport la droite $G_a G_{b'}$. Mais, joignant ce dernier résultat à celui que nous venons d'obtenir, nous pourrons donner une forme physique assez intéressante à la proposition qui nous occupe.

Pour cela, remarquons que nous pouvons considérer les droites A_i, B_i comme appartenant à autant de corps de même nature, dont les points B_i seraient les centres de gravité respectifs. Si ces corps passent par des températures différentes, ils se dilateront ou se contracteront dans le même rapport, c'est-à-dire que les droites A_i, B_i varieront elles-mêmes de longueur, proportionnellement.

Ceci posé, nous pourrons énoncer cette proposition :

Si plusieurs corps de même nature tournent dans le même sens autour d'axes parallèles entre eux, avec la même vitesse angulaire et dans un milieu dont la température soit variable, leur centre de gravité se meut comme s'il appartenait à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers, et avec la même vitesse angulaire.

Cet axe moyen *de rotation s'obtient en prenant un point quelconque sur chacun des axes individuels, et en déterminant le centre de gravité de ces points, respectivement affectés des masses des corps correspondants. Ce centre de gravité appartient à l'axe moyen.*