BULLETIN DE LA S. M. F.

J. LANNES
S. ZARATI

Théorie de Smith algébrique et classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 2 (1995), p. 189-223
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_2_189_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 189–223.

THÉORIE DE SMITH ALGÉBRIQUE ET CLASSIFICATION DES H^*V-$\mathcal{U}$-INJECTIFS

PAR

J. LANNES et S. ZARATI (*)

RÉSUMÉ. — Soient p un nombre premier et V un p-groupe abélien élémentaire. Nous développons une « théorie de Smith » pour les H^*V-A-modules instables (la cohomologie modulo p équivariante d'un espace muni d'une action de V est le type même d'un tel objet). Celle-ci est un analogue algébrique de la Théorie de Smith classique qui concerne la cohomologie modulo p des points fixes d'une action de V sur un espace vérifiant certaines conditions de finitude (lorsque l'on traite des points fixes homotopiques d'une telle action les deux théories se rejoignent). Comme sous-produit nous obtenons une classification des injectifs de la catégorie des H^*V-A-modules instables.

ABSTRACT. — Let p be a prime and V be an elementary abelian p-group. We work out a « Smith theory » for unstable H^*V-A-modules (the equivariant mod p cohomology of a space equipped with an action of V is the very example of such an object). This theory is an algebraic counterpart of the classical Smith Theory which deals with the mod p cohomology of the fixed points of an action of V on a space satisfying some finiteness conditions (when the homotopy fixed points of such an action are considered then the two theories are joining). As a by-product we get a classification of the injective objects in the category of unstable H^*V-A-modules.

0. Introduction

(Dans cette introduction relativement longue, on énonce les résultats de l'article en tentant de les replacer dans leur contexte ; on introduit aussi les principales notations et terminologies.)

(*) Texte reçu 9 juillet 1993, révisé le 5 janvier 1994.

J. LANNES, Unités de Recherches Associées au CNRS D 0169 et 212, Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX (France) et U.F.R. de mathématiques, Université de Paris VI, tour 45–55, 2, place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05 (France). Email : lannes@orphee.polytechnique.fr.

S. ZARATI, Département de Mathématiques, Université de Tunis, Le Campus Universitaire, 1060 Tunis (Tunisie).

Classification AMS : 55M35, 18G05.

On fixe un nombre premier p ; la cohomologie modulo p d'un espace Y, $H^*(Y;\mathbb{F}_p)$, est simplement notée H^*Y.

On fixe également un p-groupe abélien élémentaire V (on rappelle qu'un p-groupe abélien élémentaire est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p)^d$ pour un certain entier d). Comme à l'ordinaire $EV \to BV$ désigne un V-fibré principal universel. On pose

$$H^*V = H^*BV$$

et on note c_V l'élément de H^*V défini de la façon suivante :

- pour $p=2$: $c_V = \prod_{u\in H^1V-\{0\}} u$;
- pour $p>2$: $c_V = \prod_{u\in H^1V-\{0\}} \beta u$,

$\beta : H^1V \to H^2V$ désignant l'opération de Bockstein.

Soit X un espace muni d'une action de V. On pose

$$H_V^*X = H^*(EV \times_V X)$$

(H_V^*X est la cohomologie équivariante modulo p de X) ; H_V^*X est un H^*V-module.

Soit $i : X^V \to X$ l'inclusion dans X de l'espace des points fixes ; i est donc V-équivariante, V opérant trivialement sur X^V. Les théorèmes de localisation de la théorie de Smith classique [AS], [Bor], [Hs], [Qui] affirment que sous certaines conditions de finitude sur l'espace X l'application de H^*V-modules

$$H_V^*(i) : H_V^*X \longrightarrow H_V^*X^V = H^*V \otimes H^*X^V$$

devient un isomorphisme après localisation par rapport à la partie multiplicativement stable de H^*V engendrée par c_V. On note

$$(-)[c_V^{-1}]$$

cette localisation. Voici par exemple un des énoncés évoqués ci-dessus (observer que l'hypothèse qui y est faite sur X rend sa démonstration particulièrement facile) :

THÉORÈME 0.1. — *Soit X un V-CW-complexe de dimension finie. Alors l'application*

$$H_V^*X[c_V^{-1}] \longrightarrow H^*V[c_V^{-1}] \otimes H^*X^V$$

induite par l'inclusion de X^V dans X est un isomorphisme.

Pour pouvoir énoncer l'analogue algébrique du THÉORÈME 0.1 que nous avons en vue, il nous faut au préalable introduire quelques notions et notations impliquant l'algèbre de Steenrod.

On note :

• A l'algèbre de Steenrod modulo p;

• $\mathcal{U}$ la catégorie des A-modules instables (pour $p=2$, un A-module M est *instable* si $\mathrm{Sq}^i x = 0$ quand i est strictement plus grand que le degré de x);

• $\mathcal{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (la cohomologie modulo p d'un espace est l'exemple type d'une telle algèbre). Pour une définition précise des catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{K}$, voir par exemple [La2, 1.7.1 et 1.7.2].

La A-algèbre instable H_V^*X est munie d'un homomorphisme de A-algèbres instables $H^*V \to H_V^*X$ (induit par l'application équivariante de X vers «le» point); en d'autres termes H_V^*X est un objet de la catégorie des A-algèbres instables au-dessous de H^*V que l'on note

$$H^*V\!\downarrow\!\mathcal{K}.$$

En particulier H_V^*X est un H^*V-A-module instable c'est-à-dire un A-module instable M muni d'une structure de H^*V-module définie par une application $H^*V \otimes M \to M$ qui est A-linéaire. On note H^*V-$\mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les H^*V-A-modules instables et dont les morphismes sont les applications de degré zéro à la fois H^*V-linéaires et A-linéaires.

Par «general nonsense», le foncteur

$$\mathcal{U} \longrightarrow H^*V\text{-}\mathcal{U}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes N$$

admet un adjoint à gauche que l'on note

$$\mathrm{Fix}_V : H^*V\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

(cet adjoint est noté Fix dans [La2]). On a donc pour tout H^*V-A-module instable M et tout A-module instable N :

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Fix}_V\, M, N).$$

On montre dans [La2] que le foncteur Fix_V (qui généralise le foncteur T_V) jouit des propriétés suivantes :

THÉORÈME 0.2.

(a) *Le foncteur* $\mathrm{Fix}_V : H^*V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est exact.*

(b) *Si* M *est une* A*-algèbre instable au-dessous de* H^*V, *alors* $\mathrm{Fix}_V M$ *possède une structure naturelle de* A*-algèbre instable compatible avec sa structure de* A*-module instable et le foncteur induit* $H^*V{\downarrow}\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *(que l'on note encore* Fix_V*) est adjoint à gauche du foncteur*

$$\mathcal{K} \longrightarrow H^*V{\downarrow}\mathcal{K}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes N.$$

On doit voir le foncteur Fix_V comme un analogue algébrique de l'espace des points fixes homotopiques (ce qui explique la notation). Rappelons que l'espace des points fixes homotopiques de l'action de V sur X que l'on note X^{hV} est l'espace fonctionnel des applications V-équivariantes de EV dans X. L'application d'évaluation $EV \times X^{hV} \to X$ est V-équivariante, V opérant trivialement sur X^{hV} ; elle induit donc un $\mathcal{K}$-morphisme

$$H_V^*(e) : H_V^*X \longrightarrow H_V^*(EV \times X^{hV}) = H^*V \otimes H^*X^{hV}$$

dont l'adjoint est un $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{Fix}_V H_V^*X \to H^*X^{hV}$. On montre dans [La2] que ce dernier $\mathcal{K}$-morphisme est « souvent » un isomorphisme. Par exemple :

THÉORÈME 0.3. — *Soit* X *un* V*-espace. On suppose que* X *est simplement connexe, que* H^*X *et* $\mathrm{Fix}_V H_V^*X$ *sont de dimension finie en chaque degré, et que* $\mathrm{Fix}_V H_V^*X$ *est nul en degré un. Alors le* $\mathcal{K}$*-morphisme naturel* $\mathrm{Fix}_V H_V^*X \to H^*X^{hV}$ *est un isomorphisme.*

La conjecture de Sullivan affirme essentiellement que si X est un V-CW-complexe fini alors l'application naturelle $X^V \to X^{hV}$ est une équivalence d'homologie modulo p (cette forme de la conjecture est correcte si l'on suppose X et X^V simplement connexes). Elle est conséquence du théorème précédent (et de ses variantes) et de la proposition suivante :

PROPOSITION 0.4 (Prop. 4.7 de [La2]). — *Soit* X *un* V*-*CW*-complexe de dimension finie. Alors le* $\mathcal{K}$*-morphisme* $\mathrm{Fix}_V H_V^*X \to H^*X^V$ *adjoint du* $\mathcal{K}$*-morphisme* $H_V^*X \to H^*V \otimes H^*X^V$ *induit par l'inclusion de* X^V *dans* X *est un isomorphisme.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer l'analogue algébrique du THÉORÈME 0.1 :

THÉORÈME 0.5. — *Soit* M *un* H^*V*-*A*-module instable tel que le* A*-module instable* $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ *est localement fini (resp. fini). Alors le*

A-module instable $\mathrm{Fix}_V M$ *est localement fini (resp. fini) et la localisée de l'unité de l'adjonction*

$$M[c_V^{-1}] \longrightarrow H^*V[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V M$$

est un isomorphisme.

Explicitons l'hypothèse faite sur M : $\widetilde{H}^*V$ désigne l'idéal d'augmentation de H^*V et $\widetilde{H}^*V\cdot M$ est l'image de l'application $\widetilde{H}^*V \otimes M \to M$; on dit qu'un A-module Q est *localement fini* si pour tout élément x de Q le sous-A-module Ax est fini.

En combinant le théorème 0.5 et une variante adéquate du THÉORÈME 0.3 (la version « équivariante » de la prop. 3.4.4. de [La2]) on obtient :

THÉORÈME 0.6. — *Soit X un V-espace. On suppose que H^*X est fini et que X est p-complet. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application naturelle $H_V^*X[c_V^{-1}] \to H^*V[c_V^{-1}] \otimes H^*X^{hV}$ est un isomorphisme ;*

(ii) *le $\mathcal{K}$-morphisme naturel $\mathrm{Fix}_V H_V^*X \to H^*X^{hV}$ est un isomorphisme ;*

(iii) *l'espace X^{hV} est p-complet ;*

(iv) *l'espace X^{hV} est p-bon.*

(Rappelons la terminologie de [BK] : un espace Y est dit respectivement *p-complet* ou *p-bon* si la p-complétion $Y \to \widehat{Y}$ est une équivalence d'homotopie ou une équivalence d'homologie modulo p.)

Voici une application de ce théorème. La théorie de Smith classique nous dit que sous certaines conditions de finitude sur le V-espace X on a la congruence

$$\chi(X^V) \equiv \chi(X) \mod p\,;$$

W.G. DWYER et C.W. WILKERSON montrent dans [DW4] que l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) de 0.6 permet de remplacer dans cette congruence X^V par X^{hV} (il faut alors considérer la caractéristique d'Euler de l'homologie modulo p que nous notons ci-dessous $\chi_{\mathbb{F}_p}(-)$) :

THÉORÈME 0.7 (W.G. DWYER et C.W. WILKERSON [DW4]). — *Soit X un V-espace. On suppose que H^*X est fini, que X est p-complet et que X^{hV} est p-bon. On a alors la congruence suivante :*

$$\chi_{\mathbb{F}_p}(X^{hV}) \equiv \chi_{\mathbb{F}_p}(X) \mod p.$$

Le THÉORÈME 0.5 est implicite dans [DW3] (il est essentiellement équivalent au théorème 1.1 de cette référence). Cependant notre approche se veut concurrente de celle de [DW3] et notre méthode de démonstration du THÉORÈME 0.5 s'appuie sur les deux PROPOSITIONS 0.8 et 0.10 ci-après.

PROPOSITION 0.8. — *Soit M un H^*V-A-module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $M[c_V^{-1}] = 0$;

(ii) $\mathrm{Fix}_V M = 0$

(*ou, ce qui revient au même,*

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes N) = 0$$

pour tout A-module instable N).

Il est à noter que par un raisonnement formel d'adjonction cette proposition admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 0.9. — *Pour tout H^*V-A-module instable M, la localisée de l'unité de l'adjonction $M[c_V^{-1}] \to H^*V[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V M$ est injective.*

PROPOSITION 0.10 (Prop. 5.1 de [LS]). — *Soit M un A-module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *M est localement fini*;

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \widetilde{H}^*\mathbb{Z}/p \otimes N) = 0$ *pour tout A-module instable N.*

Dans [LS], la proposition ci-dessus conduisait à la classification des objets injectifs de la catégorie $\mathcal{U}$ (en abrégé : $\mathcal{U}$-injectifs). De même, la PROPOSITION 0.8 (ou plutôt son corollaire) conduit dans le présent travail à la classification des objets injectifs de la catégorie H^*V-$\mathcal{U}$ (en abrégé : H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs). Nous procédons par récurrence sur la $\mathbb{F}_p$-dimension de V (observer que pour $V = 0$ un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif n'est rien d'autre qu'un $\mathcal{U}$-injectif).

Remarquons incidemment que le point (a) du THÉORÈME 0.2 fournit des exemples non-triviaux de H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs. En effet, celui-ci peut être reformulé ainsi :

THÉORÈME 0.11. — *Si I est un $\mathcal{U}$-injectif alors le produit tensoriel $H^*V \otimes I$ est un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif.*

En particulier $H^*\mathbb{Z}/p = H^*\mathbb{Z}/p \otimes \mathbb{F}_p$ est un $H^*\mathbb{Z}/p$—$\mathcal{U}$-injectif, résultat dû à H. R. MILLER. Signalons que cette injectivité jouait un rôle important dans sa démonstration originale (non publiée) de la conjecture de Sullivan (sous sa forme générale).

Introduisons maintenant les notations dont nous avons besoin pour énoncer notre théorème de classification :

• $\mathcal{L}$ désigne comme dans [LS] un système de représentants pour les classes de $\mathcal{U}$-isomorphisme des facteurs directs indécomposables de $H^*(\mathbb{Z}/p)^m$, m parcourant $\mathbb{N}$ (chacune de ces classes est donc représentée dans $\mathcal{L}$ une et une seule fois) ;

• $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des sous-groupes de V ;

• $J_V(n)$, n parcourant $\mathbb{N}$, désigne le H^*V-A-module instable caractérisé, à isomorphisme près, par la bijection fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}\big(M, J_V(n)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(M^n, \mathbb{F}_p).$$

On observe que ces H^*V-A-modules instables vérifient :

• $J_V(n)$ est un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif ;

• pour $V = 0$, $J_V(n)$ s'identifie au $\mathcal{U}$-injectif de Brown-Gitler $J(n)$ caractérisé, à isomorphisme près, par la bijection fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\big(M, J(n)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(M^n, \mathbb{F}_p)$$

(voir par exemple [LZ1]) ;

• le A-module instable sous-jacent à $J_V(n)$ est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{0 \le k \le n} H_k V \otimes J(n-k)$$

(on pose $H_k V = H_k(BV; \mathbb{F}_p)$) ; en particulier $J_V(n)$ est fini.

THÉORÈME 0.12 (classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs). — *Soit I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif. Alors il existe une unique famille de cardinaux*

$$(a_{L,W,n})_{(L,W,n) \in \mathcal{L} \times \mathcal{W} \times \mathbb{N}}$$

telle que I est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_{(L,W,n)} \big((H^*V \otimes_{H^*V/W} J_{V/W}(n)) \otimes_{\mathbb{F}_p} L\big)^{\oplus a_{L,W,n}}.$$

Réciproquement tout H^*V-A-module instable de cette forme est injectif.

(Dans cette formule, H^*V est un H^*V/W-module via l'application induite en cohomologie modulo p par la surjection canonique $V \to V/W$ et la notation $(-)^{\oplus a}$ désigne la somme directe de a copies de $(-)$.)

Mentionnons enfin :

THÉORÈME 0.13. — *L'enveloppe injective d'un H^*V-A-module instable M tel que le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V\cdot M$ est localement fini* (*resp. fini*) *est isomorphe à une somme directe* (*resp. une somme directe finie*) *de la forme*

$$\bigoplus_{(W,n)} \left(H^*V \otimes_{H^*V/W} J_{V/W}(n)\right)^{\oplus a_{W,n}}.$$

Pour un appronfondissement de ce genre de résultat, voir [LZ2]. Pour une illustration, voir par exemple le premier paragraphe de la partie II de [HLS] où les résolutions $\mathcal{U}$-injectives peuvent être avantageusement remplacées par des résolutions H^*V-$\mathcal{U}$-injectives (observer que le A-module instable sous-jacent à un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif est injectif).

SOMMAIRE

Il est clair que cet article a été influencé par les travaux de DWYER et WILKERSON et qu'il est la suite du chapitre 4 de [La2] (où la preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de 0.8 était promise). Les auteurs tiennent à remercier les Universités de Paris VII, de Paris XIII et de Tunis, et le Centre mathématique de l'École polytechnique dont le support a favorisé cette collaboration.

1. Les foncteurs Fix

On considère divers foncteurs qui sont des versions « équivariantes » du foncteur T_V (voir ci-dessous). Le terme « équivariant » peut être justifié par l'analogie topologique (voir [La2, 4.4]). Leurs propriétés d'exactitude conduisent à des exemples non trivaux de H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs.

1.1. Le foncteur T_V.

Rappelons que A désigne l'algèbre de Steenrod modulo p et $\mathcal{U}$ la catégorie des A-modules instables.

Soit V un p-groupe abélien élémentaire. On se convainc sans difficultés (voir par exemple [La1, 2.1] ou [La2, 1.10]) que le foncteur

$$\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}, \quad M \longmapsto H^*V \otimes M$$

admet un adjoint à gauche que l'on note $T_V : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. On a donc pour tous A-modules instables M et N :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(T_V M, N).$$

Les propriétés du foncteur T_V sont détaillées dans le deuxième chapitre de [La2] (pour un exposé plus concis voir [La1]). On y montre notamment que si M est une A-algèbre instable alors $T_V M$ possède une structure naturelle de A-algèbre instable compatible avec sa structure de A-module instable et que le foncteur induit $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ (que l'on note encore T_V) est adjoint à gauche du foncteur

$$\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes N.$$

Le lien entre T_V et espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(BV, -)$ est analysé dans le troisième chapitre de [La2].

1.2. Les catégories K-$\mathcal{U}$ et $K{\downarrow}\mathcal{K}$.

Il s'agit de l'extension évidente des définitions des catégories H^*V-$\mathcal{U}$ et $H^*V{\downarrow}\mathcal{K}$ données dans l'introduction. Soit K une A-algèbre instable.

Un K-A-module instable est un A-module instable M muni d'une structure de K-module définie par une application $K \otimes M \to M$ qui est A-linéaire. On note K-$\mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les K-A-modules instables et dont les morphismes sont les applications de degré zéro à la fois K-linéaires et A-linéaires. On observera que le produit tensoriel d'un A-module instable (resp. K-A-module instable) et d'un K-A-module instable (resp. A-module instable) est naturellement un K-A-module instable ; par souci de clarté, le bifoncteur correspondant

$$\mathcal{U} \times (K\text{-}\mathcal{U}) \longrightarrow K\text{-}\mathcal{U} \quad (\text{resp. } (K\text{-}\mathcal{U}) \times \mathcal{U} \longrightarrow K\text{-}\mathcal{U})$$

sera éventuellement noté

$$- {}_t\!\otimes - \quad (\text{resp. } - \otimes_t -).$$

Il est clair que les K-A-modules instables $M {}_t\!\otimes N$ et $N \otimes_t M$ sont isomorphes pour tout A-module instable M et tout K-A-module instable N, mais il sera commode d'avoir les deux notations à notre disposition.

La catégorie K-$\mathcal{U}$ est une catégorie abélienne qui possède assez de projectifs et d'injectifs. Si K est connexe, tout K-A-module instable projectif est en fait isomorphe à une somme directe de K-A-modules instables de la forme $K \otimes_t F(n)$, $F(n)$ désignant le A-module instable librement engendré par un élément de degré n; $K \otimes_t F(n)$ est le K-A-module instable librement engendré par un élément de degré n :

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{U}}(K \otimes_t F(n), M) \cong M^n.$$

Pour vérifier que K-$\mathcal{U}$ a assez d'injectifs, procéder par exemple comme dans [LZ1, 6.1.1].

On dira qu'un K-A-module instable est de *type fini* s'il est engendré comme K-A-module (instable) par un nombre fini d'éléments; un tel K-A-module instable est donc isomorphe à un quotient d'une somme directe finie de $K \otimes_t F(n)$.

On désigne par $K\!\downarrow\!\mathcal{K}$ la catégorie des « A-algèbres instables au-dessous de K ». Une A-algèbre instable au-dessous de K est la donnée (M, φ) d'une A-algèbre instable M et d'un homomorphisme de A-algèbres instables $\varphi : K \to M$; un $(K\!\downarrow\!\mathcal{K})$-morphisme de (M, φ) dans (M', φ') est un $\mathcal{K}$-morphisme $f : M \to M'$ tel que $\varphi' = f \circ \varphi$. On a donc un foncteur « oubli » évident de $K\!\downarrow\!\mathcal{K}$ vers K-$\mathcal{U}$.

1.3. Versions «équivariantes» du foncteur T_V.

La proposition suivante généralise la proposition 4.4.3.1 de [La2]; sa démonstration est analogue (en fait conceptuellement plus simple !).

PROPOSITION 1.3.1. — *Soient K et L deux A-algèbres instables, E un p-groupe abélien élémentaire, $\varphi : K \to H^*E \otimes L$ un homomorphisme de A-algèbres instables, et $\widetilde{\varphi} : T_E K \to L$ l'homomorphisme de A-algèbres instables adjoint de φ; soient M un K-A-module instable et N un L-A-module instable. Alors l'isomorphisme d'adjonction*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*E \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(T_E M, N)$$

induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*E \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{T_E K\text{-}\mathcal{U}}(T_E M, N)$$

($H^*E \otimes N$ est K-module via φ et N est un $T_E K$-module via $\widetilde{\varphi}$) ou encore un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*E \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{L-\mathcal{U}}(L \otimes_{T_E K} T_E M, N)$$

(L est un $T_E K$-module via $\widetilde{\varphi}$).

En voici trois applications.

1.3.2. — On suppose $K = L$, et on prend pour $\varphi : K \to H^*E \otimes K$ le composé de l'isomorphisme évident $K \cong F_p \otimes K$ et du produit tensoriel $\eta \otimes 1$ de l'unité de H^*E et de l'identité de K ; l'adjoint de φ est le $\mathcal{K}$-morphisme naturel $\pi : T_E K \to T_0 K \cong K$ induit par l'application nulle $E \to 0$. On a alors :

$$\mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*E \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{K\text{-}\mathcal{U}}(K \otimes_{T_E K} T_E M, N).$$

Puisque T_E est exact, il en est de même pour le foncteur

$$K\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow K\text{-}\mathcal{U}, \quad M \longmapsto K \otimes_{T_E K} T_E M,$$

si K est un $T_E K$-module plat via π ; c'est le cas en particulier pour $K = H^*V$. Étant donné que les catégories K-$\mathcal{U}$ ont assez d'injectifs, cette exactitude est équivalente à l'énoncé suivant :

Proposition 1.3.2.1. — *Soient E un p-groupe abélien élémentaire et I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif. Alors $H^*E \,{}_t\!\otimes I$ est encore H^*V-$\mathcal{U}$-injectif.*

Rappelons le théorème de classification des $\mathcal{U}$-injectifs réduits [LS, 6.2.1] (pour la signification du mot réduit dans ce contexte voir par exemple [LS, 6.1.2]) :

Théorème 1.3.2.2. — *Soit R un $\mathcal{U}$-injectif réduit. Alors il existe une unique famille de cardinaux $(a_L)_{L \in \mathcal{L}}$ telle que R est isomorphe à la somme directe :*

$$\bigoplus_L L^{\oplus a_L}.$$

Grâce à ce résultat, la Proposition 1.3.2.1 admet le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.2.3. — *Soient R un $\mathcal{U}$-injectif réduit et I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif. Alors $R \,{}_t\!\otimes I$ est encore H^*V-$\mathcal{U}$-injectif.*

Remarque. — Supposons K connexe et notons « $*$ » le $\mathcal{K}$-morphisme trivial de K dans H^*E, *i.e.* le composé de l'augmentation de K et de l'unité de H^*E. Le $\mathcal{K}$-morphisme π se factorise en

$$T_E K \longrightarrow T_E(K; *) \longrightarrow K,$$

$T_E(K; *)$ désignant la composante connexe de $T_E K$ correspondant à « $*$ » (voir [La2, 2.5.2]). Il en résulte que K est un $T_E K$-module plat dès que $T_E(K; *) \to K$ est un isomorphisme. Ceci est vérifié par exemple si K est engendrée comme $\mathbb{F}_p$-algèbre par un nombre fini d'éléments [DW2], [Sc] (en fait ces auteurs montrent que $T_E(K; *) \to K$ est un isomorphisme si et seulement si le A-module des indécomposables de K est localement fini). On peut donc dans les énoncés 1.3.2.1 et 1.3.2.3 remplacer H^*V par une A-algèbre instable K de ce type.

1.3.3. Le foncteur Fix_V.

On fait $K = H^*V$, $L = \mathbb{F}_p$, $E = V$, et on prend pour φ l'isomorphisme $H^*V \cong H^*V \otimes \mathbb{F}_p$; on pose $\varepsilon_1 = \widetilde{\varphi}$ comme dans [La2, 4.4.2]. La PROPOSITION 1.3.1 montre que le foncteur

$$H^*V\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}, \quad M \longmapsto \mathbb{F}_p \otimes_{T_V H^*V} T_V M$$

est adjoint à gauche du foncteur

$$\mathcal{U} \longrightarrow H^*V\text{-}\mathcal{U}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes N.$$

Cet adjoint est noté Fix dans [La2] mais, comme nous serons amenés à faire varier V, nous le noterons Fix_V dans le présent article. On montre dans [La2] que le foncteur Fix_V vérifie les propriétés suivantes :

THÉORÈME 1.3.3.

(a) *Soit M un A-module instable, alors les A-modules instables*

$$\mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes M) \quad et \quad T_V M$$

sont naturellement isomorphes.

(b) *Le foncteur* $\mathrm{Fix}_V : H^*V\text{-}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ *est exact.*

(c) *Pour tous H^*V-A-modules instables M_1 et M_2, les A-modules instables*

$$\mathrm{Fix}_V(M_1 \otimes_{H^*V} M_2) \quad et \quad \mathrm{Fix}_V M_1 \otimes \mathrm{Fix}_V M_2$$

sont naturellement isomorphes.

(d) *Si M est une A-algèbre instable au-dessous de H^*V, alors* $\mathrm{Fix}_V M$ *possède une structure naturelle de A-algèbre instable compatible avec sa structure de A-module instable et le foncteur induit*

$$H^*V{\downarrow}\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

(que l'on note encore Fix_V*) est adjoint à gauche du foncteur*

$$\mathcal{K} \longrightarrow H^*V{\downarrow}\mathcal{K}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes N.$$

On a donc, pour toute A-algèbre instable M au-dessous de H^*V et toute A-algèbre instable N :

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\downarrow\mathcal{K}}(M, H^*V \otimes N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Fix}_V M, N).$$

REMARQUES.

1) L'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur $\mathcal{U} \to H^*V\text{-}\mathcal{U}$, $N \mapsto H^*V \otimes N$ est indépendante de 1.3.1 (on se convainc sans difficultés que pour toute A-algèbre instable K de dimension finie en chaque degré le foncteur $\mathcal{U} \to K - \mathcal{U}$, $N \mapsto K \otimes N$ admet un adjoint à gauche).

2) L'analogue topologique du point (a) est le suivant : si l'on munit un espace X de l'action triviale de V, alors l'espace des points fixes homotopiques X^{hV} est l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(BV, X)$.

3) L'exactitude de T_V n'implique pas à elle seule celle de Fix_V. En effet, cette fois $\mathbb{F}_p$ n'est pas un $T_V H^*V$-module plat via ε_1 et pour prouver (b), il faut utiliser également une propriété des $T_V H^*V$-modules $T_V M$ (prop. 4.5 de [La2] que l'on trouve aussi dans [DW3]).

1.3.4. Les foncteurs $\mathbf{Fix}_{V',V''}$.

On se donne une décomposition en somme directe $V = V' \oplus V''$, on fait $K = H^*V$, $L = H^*V''$, $E = V'$, et on prend pour φ l'isomorphisme $H^*V \cong H^*V' \otimes H^*V''$. La PROPOSITION 1.3.1 montre que le foncteur

$$H^*V\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H^*V''\text{-}\mathcal{U}, \quad M \longmapsto H^*V'' \otimes_{T_{V'}H^*V} T_{V'}M,$$

que nous noterons $\mathrm{Fix}_{V',V''}$, est adjoint à gauche du foncteur

$$H^*V''\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H^*V\text{-}\mathcal{U}, \quad N \longmapsto H^*V' \otimes N\,;$$

on observera que le foncteur $\mathrm{Fix}_{V,0}$ s'identifie au foncteur Fix_V. On vérifie que

$$\widetilde{\varphi} : T_{V'}H^*V \longrightarrow H^*V'' \cong F_p \otimes H^*V''$$

s'identifie au composé du $\mathcal{K}$-isomorphisme canonique

$$T_{V'}H^*V \cong T_{V'}H^*V' \otimes T_{V'}H^*V''$$

et du produit tensoriel $\varepsilon_1 \otimes \pi$, des $\mathcal{K}$-morphismes canoniques

$$\varepsilon_1 : T_{V'}H^*V' \to \mathbb{F}_p \quad \text{et} \quad \pi : T_{V'}H^*V'' \to H^*V''$$

respectivement évoqués en 1.3.3 et 1.3.2. On en déduit un isomorphisme naturel de H^*V''-A-modules instables :

$$\mathrm{Fix}_{V',V''} M \cong H^*V'' \otimes_{T_{V'}H^*V''} \mathrm{Fix}'_V M.$$

Puisque H^*V'' est un $T_{V'}H^*V''$-module plat via π, l'exactitude de $\mathrm{Fix}_{V'}$ implique :

PROPOSITION 1.3.4.1. — *Le foncteur*

$$\mathrm{Fix}_{V',V''} : H^*V\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H^*V''\text{-}\mathcal{U}$$

est exact.

Comme pour 1.3.2.1, cette proposition est équivalente à la suivante :

PROPOSITION 1.3.4.2. — *Si I est un H^*V''-$\mathcal{U}$-injectif, alors le produit tensoriel $H^*V' \otimes I$ est un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif.*

Soient W un sous-groupe de V et $s : V/W \to V$ une section (linéaire) de la projection $V \to V/W$; on a donc une décomposition en somme directe $V = W \oplus s(V/W)$. Il est clair que le foncteur

$$H^*V/W\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H^*V\text{-}\mathcal{U}, \quad N \longmapsto H^*V \otimes_{H^*V/W} N$$

est naturellement (et canoniquement) isomorphe au composé de l'isomorphisme de catégories évident

$$H^*V/W\text{-}\mathcal{U} \cong H^*s(V/W)\text{-}\mathcal{U}$$

et du foncteur

$$H^*s(V/W)\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H^*V\text{-}\mathcal{U}, \quad N \longmapsto H^*W \otimes N,$$

considéré précédemment. La PROPOSITION 1.3.4.2 peut par conséquent être reformulée ainsi :

PROPOSITION 1.3.4.3. — *Soient W un sous-groupe de V et I un H^*V/W-$\mathcal{U}$-injectif. Alors $H^*V \otimes_{H^*V/W} I$ est un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif.*

1.3.5. Décomposition de $\mathrm{Fix}_{V/W}M$ quand M est un H^*V-A-module instable.

Soient M un H^*V-A-module instable et W un sous-groupe de V ; alors M est aussi un H^*V/W-A-module instable, si bien que l'on peut considérer le A-module instable $\mathrm{Fix}_{V/W} M$. Nous allons ci-dessous en décrire une décomposition en produit qui nous sera utile en 2.6.3.

En fait $\mathrm{Fix}_{V/W} M$ est un objet de $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-$\mathcal{U}$. En effet, l'application de structure $H^*V \otimes M \to M$ induit une application

$$H^*V \otimes_{H^*V/W} M \longrightarrow M$$

dont l'image par $\mathrm{Fix}_{V/W}$ s'identifie à une application

$$(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V) \otimes \mathrm{Fix}_{V/W} M \longrightarrow \mathrm{Fix}_{V/W} M$$

(utiliser 1.3.3 (c)) qui fait de $\mathrm{Fix}_{V/W} M$ un $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-$A$-module instable. Soit Γ l'ensemble des sections (linéaires) $s : V/W \to V$ de la projection $V \to V/W$; la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V$ s'identifie à $(H^*W)^\Gamma$ (cette notation désigne le produit de copies de H^*W indexées par Γ).

Précisons un peu. Soit

$$\varphi_s : H^*V \cong H^*V/W \otimes H^*W$$

l'isomorphisme induit par un élément s de Γ; l'isomorphisme φ_s est en fait un $(H^*V/W{\downarrow}\mathcal{K})$-isomorphisme; soit

$$\pi_s : \mathrm{Fix}_{V/W} H^*V \longrightarrow H^*W$$

le $\mathcal{K}$-morphisme adjoint. On vérifie que le produit des π_s, lorsque la section s décrit Γ, est un $\mathcal{K}$-isomorphisme. Il en résulte que la donnée d'un $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-$A$-module instable N est équivalente à celle d'une famille de H^*W-A-modules instables N_s indexés par Γ. Précisons à nouveau. On peut considérer H^*W comme un « bi-$(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-$A$-module instable » à gauche et à droite via π_s ; notons ${}_{\pi_s}H^*W_{\pi_s}$ ce bi-module. On a un isomorphisme de $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-$A$-module instables :

$$N \cong \prod_{s\in\Gamma} {}_{\pi_s}H^*W_{\pi_s} \otimes_{\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V} N.$$

Dans le cas de $\mathrm{Fix}_{V/W} M$, on obtient :

$$\mathrm{Fix}_{V/W} M \cong \prod_{s\in\Gamma} \mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M, \tag{1.3.5}$$

le H^*W-module $\mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M$ étant vu comme un $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-module via π_s. Précisons une dernière fois. Considérons la décomposition en somme directe $V \cong s(V/W) \oplus W$ et le $(H^*W$-$\mathcal{U})$-isomorphisme

$$\mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M \cong H^*W \otimes_{T_{s(V/W)}H^*W} \mathrm{Fix}_{s(V/W)} M$$

de 1.3.4. Cet isomorphisme peut être reformulé de la façon suivante :

$$\mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M \cong H^*W_{\pi_s} \otimes_{\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V} \mathrm{Fix}_{V/W} M$$

$H^*W_{\pi_s}$ désignant H^*W vu comme un $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-module via π_s. En effet, le $\mathcal{K}$-morphisme

$$\pi : T_{s(V/W)}H^*W \longrightarrow H^*W$$

s'identifie à π_s et la structure de $(T_{s(V/W)}H^*W)$-module de $\mathrm{Fix}_{s(V/W)} M$ à celle de $(\mathrm{Fix}_{V/W} H^*V)$-module de $\mathrm{Fix}_{V/W} M$.

Remarque. — Les assertions qui précèdent 1.3.4.3 montrent que les $\mathrm{Fix}_{W,s(V/W)} M$ sont essentiellement indépendants de s; par contre le lecteur se convaincra facilement qu'il n'en est pas de même pour les $\mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M$ qui apparaissent ci-dessus.

2. Théorie de Smith algébrique

Soit M un H^*V-A-module instable. On note

$$\eta_M : M \to H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$$

le H^*V-$\mathcal{U}$-morphisme adjoint de l'identité de $\mathrm{Fix}_V M$ (en d'autres termes la transformation naturelle η est l'unité de l'adjonction). Nous appelons « théorie de Smith algébrique » l'étude de la localisée

$$\eta_M[c_V^{-1}] : M[c_V^{-1}] \to H^*V[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V M,$$

$(-)[c_V^{-1}]$ désignant la localisation par rapport à la partie multiplicativement stable de H^*V engendrée par la classe c_V définie au début de l'introduction. Nous avons expliqué dans cette introduction pourquoi il était raisonnable de voir l'énoncé ci-dessous comme un analogue algébrique du théorème de localisation de la théorie de Smith classique pour les V-actions.

THÉORÈME 2.1. — *Soit M un H^*V-A-module instable tel que le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini* (*resp. fini*). *Alors le A-module instable* $\mathrm{Fix}_V M$ *est localement fini* (*resp. fini*) *et la localisée de l'unité de l'adjonction*

$$\eta_M[c_V^{-1}] : M[c_V^{-1}] \to H^*V[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V M$$

est un isomorphisme.

Dans notre approche, l'une des clés de cet énoncé est la caractérisation suivante des H^*V-A-modules instables M tels que $\mathrm{Fix}_V M$ est nul :

PROPOSITION 2.2. — *Soit M un H^*V-A-module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $M[c_V^{-1}] = 0$;

(ii) $\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes N) = 0$ *pour tout A-module instable N* ;

(iii) $\mathrm{Fix}_V M = 0$.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la définition même du foncteur Fix_V. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) (plus subtile !) est le point technique essentiel de notre article ; elle sera démontrée en 2.6.

REMARQUES.

1) Pour $p > 2$ notons PV la sous-$\mathbb{F}_p$-algèbre de H^*V engendrée par $\beta H^1 V$; c'est une sous-A-algèbre (instable) de H^*V. Pour $p = 2$, posons

$PV = H^*V$ afin d'unifier la notation. Il est bien connu (voir par exemple dans [La2] la remarque précédant le point 4.6.4.4) que le résultat de J.-P. SERRE concernant les idéaux A-invariants de PV [Se, cor. du § 2] entraîne que la condition (i) est équivalente à la suivante :

(i-bis) *M est de torsion comme PV-module.*

2) Comme les implications (i) $\Rightarrow$ (i-bis) $\Rightarrow$ (ii) sont évidentes, la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) fournit aussi une démonstration indépendante (mais assez détournée !) de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (i-bis).

COROLLAIRE 2.3. — *Pour tout H^*V-A-module instable M, la localisée de l'unité de l'adjonction*

$$\eta_M[c_V^{-1}] : M[c_V^{-1}] \longrightarrow H^*V[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V M$$

est injective.

Démonstration. — On considère le $\mathcal{U}$-morphisme

$$\mathrm{Fix}_V(\eta_M) : \mathrm{Fix}_V M \longrightarrow \mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M).$$

Comme dans toute situation d'adjonction $\mathrm{Fix}_V(\eta_M)$ admet une rétraction naturelle à savoir

$$\varepsilon_{\mathrm{Fix}_V M} : \mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M) \longrightarrow \mathrm{Fix}_V M,$$

$\varepsilon : \mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes -) \to \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$ désignant la co-unité de l'adjonction (pour tout A-module instable N le $\mathcal{U}$-morphisme $\varepsilon_N : \mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes N) \to N$ est donc cette fois l'adjoint de l'identité de $H^*V \otimes N$). On a donc :

$$\ker\bigl(\mathrm{Fix}_V(\eta_M)\bigr) = 0.$$

Puisque le foncteur Fix_V est exact, on a aussi $\mathrm{Fix}_V(\ker \eta_M) = 0$. La PROPOSITION 2.2 montre alors :

$$(\ker \eta_M)[c_V^{-1}] = 0.$$

2.4. Démonstration du théorème 2.1.

Le lemme ci-dessous montre que la seconde partie de ce théorème est conséquence de la première :

LEMME 2.4.1. — *Soit M un H^*V-A-module instable, avec V non nul. Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *le A-module instable* $\mathrm{Fix}_V M$ *est localement fini* ;

(ii) *$\eta_M[c_V^{-1}]$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme précédemment, l'exactitude de Fix_V et la PROPOSITION 2.2 entraînent que la condition (ii) est équivalente à la suivante :

(iii) $\mathrm{Fix}_V(\eta_M)$ *est un isomorphisme.*

Clairement (iii) est équivalente à :

(iv) $\varepsilon_{\mathrm{Fix}_V M}$ *est un isomorphisme.*

Or on vérifie que pour tout A-module instable N, le morphisme naturel ε_N est le composé de l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Fix}_V(H^*V \otimes N) \cong T_V N$$

de 1.3.3. (a) et du morphisme naturel

$$\pi_N : T_V N \to T_0 N \cong N$$

induit par l'homomorphisme nul $V \to 0$. Donc (iv) est équivalente à :

(v) $\pi_{\mathrm{Fix}_V M}$ *est un isomorphisme.*

On applique alors la PROPOSITION 6.3.2 de [LS] qui montre que π_N est un isomorphisme si et seulement si N est localement fini (pour vérifier que le morphisme naturel $T_{\mathbb{Z}/p} N \to T_0 N \cong N$ est un isomorphisme si π_N en est un, factoriser l'homomorphisme nul $\mathbb{Z}/p \to 0$ par une injection $\mathbb{Z}/p \to V$).

Le THÉORÈME 2.1 résulte maintenant du :

LEMME 2.4.2. — *Soit M un H^*V-A-module instable. Si le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini* (*resp. fini*), *alors il en est de même pour le A-module instable* $\mathrm{Fix}_V M$.

Démonstration. — On utilise à nouveau la caractérisation des A-modules instables localement finis donnée dans la proposition 5.1 de [LS] (la prop. 6.3.2 de [LS] invoquée ci-dessus en est juste une reformulation). On pose $\widetilde{H} = \widetilde{H}^*\mathbb{Z}/p$; la condition (i) de 2.4.1 est équivalente à :

(vi) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{Fix}_V M, \widetilde{H} \otimes N) = 0$ *pour tout A-module instable N.*

Ou encore à :

(vii) $\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(M, H^*V \otimes (\widetilde{H} \otimes N)) = 0$ *pour tout A-module instable N.*

On conclut grâce au LEMME 2.4.3 ci-après. Pour remplacer « localement fini » par « fini », on utilise les points suivants (rappelons que la signification de « de type fini » est fixée en 1.2) :

• Un A-module (instable) est fini si et seulement s'il est à la fois localement fini et de type fini.

• Un H^*V-A-module instable M est de type fini si et seulement si le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est de type fini.

• Si un H^*V-A-module instable M est de type fini, alors il en est de même pour le A-module instable $\mathrm{Fix}_V\, M$. En effet, Fix_V préserve sommes directes et surjections et on a :

$$\mathrm{Fix}_V\big(H^*V \otimes F(n)\big) \cong \bigoplus_{0\leq k\leq n} H_kV \otimes F(n-k).$$

LEMME 2.4.3. — *Soient M et M' deux H^*V-A-modules instables. Si le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini, alors tout H^*V-$\mathcal{U}$-morphisme de M dans $\widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M'$ est nul.*

Démonstration. — Soit $f : M \to \widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M'$ un H^*V-$\mathcal{U}$-morphisme. Si $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini, alors le $\mathcal{U}$-morphisme

$$M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M \longrightarrow (\widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M')/\widetilde{H}^*V{\cdot}(\widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M') \cong \widetilde{H} \otimes (M'/\widetilde{H}^*V{\cdot}M')$$

induit par f est nul et l'image de f est contenue dans $\widetilde{H}^*V{\cdot}(\widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M')$. En itérant l'argument on voit que cette image est contenue dans

$$(\widetilde{H}^*V)^m{\cdot}\,(\widetilde{H}\,{}_t\!\otimes M')$$

pour tout entier m, où $(\widetilde{H}^*V)^m$ désigne l'idéal de H^*V puissance m-ième de $\widetilde{H}^*V$, ce qui montre bien que f est nul.

2.5. La théorie de Dwyer et Wilkerson.

Soit M un A-module (observer la disparition de l'adjectif instable !) ; on note $\mathrm{Un}(M)$ le plus grand sous-A-module instable de M ; le foncteur

$$\mathrm{Un} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{U}$$

apparaît donc comme l'adjoint à droite du foncteur oubli $\mathcal{U} \to \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ désigne la catégorie des A-modules. La localisée $H^*V[c_V^{-1}]$ est une A-algèbre (voir par exemple [Wi, § 2]) c'est-à-dire que $H^*V[c_V^{-1}]$ est à la fois un A-module et une $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{Z}$-graduée commutative et que le produit

$$H^*V[c_V^{-1}] \otimes H^*V[c_V^{-1}] \longrightarrow H^*V[c_V^{-1}]$$

est A-linéaire. Soit maintenant M un H^*V-A-module instable ; alors

$$M[c_V^{-1}] = H^*V[c_V^{-1}] \otimes_{H^*V} M$$

est un $H^*V[c_V^{-1}]$-A-module (mutatis mutandis dans 1.2), Un $(M[c_V^{-1}])$ est à nouveau un H^*V-A-module instable et la localisation $M \to M[c_V^{-1}]$ se factorise par un H^*V-$\mathcal{U}$-morphisme naturel

$$\tau_M : M \longrightarrow \mathrm{Un}\big(M[c_V^{-1}]\big).$$

Le théorème suivant est implicite dans [DW3] :

THÉORÈME 2.5.1. — *Soit M un H^*V-A-module instable. Si le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini, alors η_M est la composée de τ_M et d'un H^*V-$\mathcal{U}$-isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Un}\big(M[c_V^{-1}]\big) \cong H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V\, M.$$

Ce théorème est la conséquence de 2.1 et de l'énoncé ci-dessous qui est le point-clé de [DW1] :

PROPOSITION 2.5.2. — *Pour tout A-module instable M, l'application naturelle $H^*V \otimes M \to \mathrm{Un}(H^*V[c_V^{-1}] \otimes M)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — (Variante de celle de [DW1].) On se ramène comme dans [DW1, § 4] au cas où $V = \mathbb{Z}/p$. On distingue alors deux cas.

Cas $p = 2$. — On pose $H = H^*\mathbb{Z}/2$; alors H est l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[u]$, u désignant le générateur de H^1. On doit montrer que l'application naturelle $H \otimes M \to \mathrm{Un}\ (H[u^{-1}] \otimes M)$ est un isomorphisme. Ceci se réduit à montrer que si x est un élément de M tel que $u^{-1} \otimes x$ est instable, alors x est nul. Soit n le degré de x ; si $u^{-1} \otimes x$ est instable, alors $Sq^{n+1}(u^{-1} \otimes x)$ est nul et les formules :

- $\mathrm{Sq}^{n+1}(u^{-1} \otimes x) = \big(\mathrm{Sq}^{n+1}(u^{-1})\big) \otimes x + \sum_{i<n} u^i \otimes x_i$ avec $x_i \in M$,
- $\mathrm{Sq}^{n+1}(u^{-1}) = u^n$,

montrent bien que x est nul.

Cas $p > 2$. — On note encore u le générateur de $H^1\mathbb{Z}/p$ et on pose $w = u(\beta u)^{-1}$. On se réduit à montrer cette fois que si x est un élément de M tel que $w \otimes x$ est instable alors x est nul. Si le degré $n = 2k$ de x est pair, on utilise $\beta P^k w \neq 0$; si le degré $n = 2k+1$ de x est impair, on utilise $P^{k+1} w \neq 0$.

2.6. Démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de la proposition 2.2.

2.6.1. Cas $p = 2$ et $V = \mathbb{Z}/2$.

On pose comme ci-dessus

$$H = H^*\mathbb{Z}/2 = \mathbb{F}_2[u].$$

On abrège la notation $\mathrm{Fix}_{\mathbb{Z}/2}$ en Fix.

Foncteurs suspension et « espace de lacets » dans la catégorie H-$\mathcal{U}$.

Rappelons que le foncteur suspension

$$\Sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

admet un adjoint à gauche

$$\Omega : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

que l'on peut expliciter de la façon suivante. Soit $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ le foncteur « double » (voir par exemple [La2, 2.2.5 et 2.3]); ce foncteur induit un foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ que l'on note encore Φ. Soit M un A-module instable; l'application

$$\Phi M \longrightarrow M, \quad \Phi x \longmapsto \mathrm{Sq}^{|x|}\, x,$$

$|x|$ désignant le degré de x, est A-linéaire de degré zéro, ce qui donne une transformation naturelle, que l'on note λ, de Φ dans l'identité de $\mathcal{U}$. On a :

$$\Sigma\Omega M \cong \operatorname{coker} \lambda.$$

De la même manière, le foncteur suspension

$$\Sigma : H\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H\text{-}\mathcal{U}$$

admet un adjoint à gauche que l'on note

$$\Omega_H : H\text{-}\mathcal{U} \longrightarrow H\text{-}\mathcal{U}$$

et que l'on peut expliciter de façon analogue. Soit M un H-A-module instable. L'application

$$\lambda : \Phi M \to M$$

est un morphisme de ΦH-A-modules instables, ΦH opérant sur M via $\lambda : \Phi H \to H$ (qui coïncide avec « l'élévation au carré »). On note

$$\mu : H \otimes_{\Phi H} \Phi M \longrightarrow M$$

l'extension H-linéaire de λ ; μ est un H-$\mathcal{U}$-morphisme et l'on a :

$$\Sigma\Omega_H M \cong \operatorname{coker} \mu.$$

Le lemme-clé dans la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de la PROPOSITION 2.2 pour $p = 2$ et $V = \mathbb{Z}/2$ est le suivant (c'est un peu le pendant de la prop. 3.1 de [DW3]) :

LEMME 2.6.1.1. — *Soit M un H-A-module instable tel que le localisé $(\Omega_H M)[u^{-1}]$ est nul. Alors l'action de A sur les éléments de degré zéro de $M[u^{-1}]$ est triviale : si x est un tel élément, on a $\mathrm{Sq}^i x = 0$ pour $i > 0$.*

Démonstration. — Soit M un H-A-module instable. On considère l'application

$$\Phi\big(H[u^{-1}]\big) \otimes_{\Phi H} \lambda.$$

Celle-ci s'identifie à une application $\Phi(H[u^{-1}])$-A-linéaire

$$\nu : \Phi\big(M[u^{-1}]\big) \longrightarrow M[u^{-1}]$$

dont l'extension $H[u^{-1}]$-linéaire

$$H[u^{-1}] \otimes_{\Phi(H[u^{-1}])} \Phi\big(M[u^{-1}]\big) \longrightarrow M[u^{-1}]$$

s'identifie à la localisée $\mu[u^{-1}]$. On suppose maintenant $(\Omega_H M)[u^{-1}] = 0$. Dans ce cas, $\mu[u^{-1}]$ est surjective ; ν est donc surjective en degrés pairs et en particulier en degré zéro. Soit q un entier ≥ 1 ; la composée

$$\nu \circ \Phi\nu \circ \cdots \circ \Phi^{q-1}\nu : \Phi^q\big(M[u^{-1}]\big) \longrightarrow M[u^{-1}]$$

(où $\Phi^k : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ désigne le k-ième itéré du foncteur Φ) est encore surjective en degré zéro, ce qui implique $\mathrm{Sq}^i x = 0$ pour tout élément de degré zéro x de $M[u^{-1}]$ et tout entier i vérifiant $0 < i < 2^q$.

SCHOLIE 2.6.1.2. — *Soit M un H-A-module instable tel que le localisé $(\Omega_H M)[u^{-1}]$ est nul; soit E le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel formé des éléments de degré zéro de $M[u^{-1}]$, que l'on considère comme un A-module concentré en degré zéro. Alors :*

(a) *l'isomorphisme $H[u^{-1}]$-linéaire canonique $H[u^{-1}] \otimes E \to M[u^{-1}]$ est A-linéaire ;*

(b) *le A-module instable* $\mathrm{Fix}\, M$ *est isomorphe à E ;*

(c) *les conditions* $M[u^{-1}] = 0$ *et* $\mathrm{Fix}\, M = 0$ *sont équivalentes.*

Démonstration de (b). — La localisation $M \to M[u^{-1}] \cong H[u^{-1}] \otimes E$ induit un H-$\mathcal{U}$-morphisme $M \to H \otimes E$ (observer simplement que M est nul en degrés < 0) dont le localisé est un isomorphisme. L'exactitude de Fix et l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) de 2.2 donnent $\mathrm{Fix}\, M \cong \mathrm{Fix}\, (H \otimes E)$ et on a bien $\mathrm{Fix}\, (H \otimes E) \cong E$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'implication (iii $\Rightarrow$ (i) de la PROPOSITION 2.2 dans le cas $p = 2$ et $V = \mathbb{Z}/2$. Soit M un H-A-module instable avec $M[u^{-1}] \neq 0$; nous allons montrer $\mathrm{Fix}\, M \neq 0$. Comme Fix préserve les injections, nous pouvons supposer que M est engendré en tant que H-A-module instable par un seul élément. Notons n le degré de cet élément et considérons la suite de H-A-modules instables

$$\Omega_H^k(M), \qquad k \in \mathbb{N},$$

$\Omega_H^k : H\text{-}\mathcal{U} \to H\text{-}\mathcal{U}$ désignant le k-ième itéré de Ω_H (avec la convention $\Omega_H^0(M) = M$). Comme $\Omega_H^{n+1}(M)$ est nul ($\mathrm{Hom}_{H\text{-}\mathcal{U}}(M, \Sigma^{n+1} N) = 0$ pour tout H-A-module instable N), il existe un entier k avec $0 \leq k \leq n$ tel que l'on a

$$\big(\Omega_H^k(M)\big)[u^{-1}] \neq 0 \quad \text{et} \quad \big(\Omega_H^{k+1}(M)\big)[u^{-1}] = 0.$$

D'après 2.6.1.2 (c), nous avons $\mathrm{Fix}(\Omega_H^k(M)) \neq 0$. Or on a par définition même des foncteurs Ω, Fix et Ω_H, un $\mathcal{U}$-isomorphisme

$$\mathrm{Fix}\big(\Omega_H^k(M)\big) \cong \Omega^k(\mathrm{Fix}\, M),$$

Ω^k désignant le k-ième itéré de Ω.

2.6.2. Cas $p > 2$ et $V = \mathbb{Z}/p$.

Pour passer du cas $p = 2$ au cas $p > 2$ on emploie, comme dans [Za], [LZ1], [LS] et [La2], la méthode « du passage par $\mathcal{U}'$ ».

On note $\mathcal{U}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les A-modules instables pairs, *i.e.* nuls en degrés impairs. On pose encore

$$H = H^*\mathbb{Z}/p$$

et on note P la sous-A-algèbre (instable) paire de H formée des éléments de degré pair ; si v désigne le Bockstein du générateur de H^1, on a :

$$P = \mathbb{F}_2[v], \quad c_{\mathbb{Z}/p} = -v^{p-1}, \quad M[c_{\mathbb{Z}/p}^{-1}] \cong M[v^{-1}].$$

On note $P\text{-}\mathcal{U}'$ la sous-catégorie pleine de $P\text{-}\mathcal{U}$ dont les objets sont les $P\text{-}A$-modules instables pairs. On note

$$\mathrm{Fix}' : P\text{-}\mathcal{U}' \longrightarrow \mathcal{U}'$$

l'adjoint à gauche du foncteur

$$\mathcal{U}' \to P\text{-}\mathcal{U}', \quad N' \mapsto P \otimes N'.$$

En remplaçant formellement « 2 » par « p » dans la démonstration précédente, on obtient :

PROPOSITION 2.6.2. — *Pour tout $P\text{-}\mathcal{U}'$-objet M' les conditions*

$$M'[v^{-1}] = 0 \quad et \quad \mathrm{Fix}' M' = 0$$

sont équivalentes.

Pour prouver l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de la PROPOSITION 2.2 dans le cas $p > 2$ et $V = \mathbb{Z}/p$, on utilise les points (a), (b) et (c), ci-dessous. On désigne par M (resp. M') un $H\text{-}\mathcal{U}$-objet (resp. $P\text{-}\mathcal{U}'$-objet) arbitraire.

(a) La filtration

$$(\mathcal{F}) \qquad 0 = F_{-1}M \subset F_0M \subset F_1M \subset \cdots \subset F_kM \subset \cdots \subset M$$

de [La2, 2.2.6] est stable sous l'action de P ; le quotient $F_kM/F_{k-1}M$ est donc la suspension k-ème d'un $P\text{-}A$-module instable pair que l'on note G_kM.

(b) On a un $\mathcal{U}$-isomorphisme naturel

$$\mathrm{Fix}(H \otimes_P \mathcal{O}M') \cong \mathcal{O}\,\mathrm{Fix}' M',$$

$\mathcal{O}$ désignant les foncteurs oubli $P\text{-}\mathcal{U}' \to P\text{-}\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$.

(c) On a dans $H\text{-}\mathcal{U}$ une suite exacte naturelle

$$0 \to \Sigma M \longrightarrow H \otimes_P M \longrightarrow M \to 0.$$

On met maintenant bout à bout les équivalences suivantes :

• $\operatorname{Fix} M = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Fix}(H \otimes_P M) = 0$ d'après (c), puisque Fix est exact et commute au foncteur suspension ;

• $\operatorname{Fix}(H \otimes_P M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Fix}(H \otimes_P \mathcal{O}G_k M) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après (a), puisque Fix est exact, commute aux suspensions, aux limites inductives et que la filtration $(\mathcal{F})$ est convergente ;

• $\operatorname{Fix}(H \otimes_P \mathcal{O}G_k M) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Fix}' G_k M = 0$ d'après (b) ;

• $\operatorname{Fix}' G_k M = 0 \Leftrightarrow (G_k M)[v^{-1}] = 0$ d'après 2.6.2 ;

• $(G_k M)[v^{-1}] = 0 \Leftrightarrow M[v^{-1}] = 0$ d'après (a), puisque la filtration $(\mathcal{F})$ est convergente.

2.6.3. Cas général.

On vérifie l'énoncé 2.3 (qui entraîne bien sûr l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) de 2.2) par récurrence sur la dimension d du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V. Comme nous allons être amenés à faire varier V nous notons ci-dessous

$$\eta_{V,M} : M \longrightarrow H^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M$$

l'unité de l'adjonction concernée par 2.3.

Le cas $d = 1$ vient d'être traité ; on suppose donc $d > 1$. Soient W un sous-groupe cyclique non nul de V et $i : W \to V$ (resp. $j : V \to V/W$) l'injection (resp. la surjection) canonique ; on reprend les notations de 1.3.5. On vérifie que le H^*V-$\mathcal{U}$-diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\eta_{V/W,M}"] \arrow[d, "\eta_{V,M}"'] & & H^*V/W \otimes \operatorname{Fix}_{V/W} M \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \\
H^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M \arrow[d, "\Delta"'] & & \prod_{s\in\Gamma} H^*V/W \otimes \operatorname{Fix}_{s(V/W),W} M \arrow[d, "\prod_{s\in\Gamma} 1 \otimes \eta_{W,\operatorname{Fix}_{s(V/W),W} M}"] \\
\prod_{s\in\Gamma} H^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M \arrow[rr, "\prod_{s\in\Gamma}\zeta_s", "\cong"'] & & \prod_{s\in\Gamma} H^*V/W \otimes \big(H^*W \otimes \operatorname{Fix}_W \operatorname{Fix}_{s(V/W),W} M\big),
\end{tikzcd}$$

• ψ désignant le produit tensoriel de l'identité de H^*V/W et de l'isomorphisme (1.3.5) ;

• $\prod_{s\in\Gamma} H^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M$ le produit de copies de $H^*V \otimes \operatorname{Fix}_V M$ indexées par Γ ;

- Δ la diagonale, et
- ζ_s l'isomorphisme

$$(H^*V/W \otimes H^*W) \otimes \mathrm{Fix}_W \mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M \cong H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V M$$

produit tensoriel de l'isomorphisme

$$\varphi_s : H^*V \cong H^*V/W \otimes H^*W$$

induit par s et de l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Fix}_W \mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M \cong \mathrm{Fix}_V M.$$

Précisons un peu certaines des structures de H^*V-module en cause :

- $H^*V/W \otimes \mathrm{Fix}_{V/W} M$ est un H^*V-module via le $\mathcal{K}$-morphisme

$$\eta_{V/W,H^*V} : H^*V \to H^*V/W \otimes \mathrm{Fix}_{V/W} H^*V\,;$$

- $H^*V/W \otimes \mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M$ et

$$(H^*V/W \otimes H^*W) \otimes \mathrm{Fix}_W \mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M$$

sont des H^*V-modules via φ_s.

Par hypothèse de récurrence, $\eta_{V/W,M}$ devient injective quand on inverse $j^*c_{V/W}$. L'étude du cas $d = 1$ (ou l'hypothèse de récurrence !) montre que $1 \otimes \eta_{W,\mathrm{Fix}_{s(V/W),W} M}$ devient injective quand on inverse $r_s^*c_W$, $r_s : V \to W$ désignant la rétraction associée à s. Comme la classe c_V est le produit dans H^*V des classes $j^*c_{V/W}$ et $r_s^*\,c_W$, s parcourant Γ, le diagramme ci-dessus montre que $(\Delta \circ \eta_{V,M})[c_V^{-1}]$ est injective. Il est clair alors qu'il en est de même pour $(\eta_{V,M})[c_V^{-1}]$.

3. Classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs

Soient E et V deux p-groupes abéliens élémentaires, W un sous-groupe de V, et $n \geq 0$ un entier ; les PROPOSITIONS 1.3.2.1 et 1.3.4.3 montrent que le H^*V-A-module instable

$$H^*E \,{}_t\!\otimes \big(H^*V \otimes_{H^*V/W} J_{V/W}(n)\big)$$

est injectif (pour la définition du H^*V/W-$\mathcal{U}$-injectif $J_{V/W}(n)$ nous renvoyons à l'introduction ou au point 3.0 ci-dessous). Le THÉORÈME 0.12 montre que cet exemple donne essentiellement tous les H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs.

Par des arguments standards, la classification des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs est ramenée à la détermination des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs indécomposables. Celle-ci est faite par récurrence sur la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V. Le point de départ de cette récurrence est le théorème de classification des $\mathcal{U}$-injectifs [LS] et 2.3 y joue un rôle clé.

Le THÉORÈME 0.12 est la justaposition du THÉORÈME 3.1.4 (b) et des PROPOSITIONS 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, ci-après.

3.0. Retour sur les «H^*V-A-modules instables de Brown-Gitler» $J_V(n)$.

Rappelons que la notation $J_V(n)$ désigne le H^*V-A-module instable caractérisé, à isomorphisme près, par la bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}\big(M, J_V(n)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(M^n, \mathbb{F}_p).$$

Les deux premières observations concernant les $J_V(n)$ faites dans l'introduction sont évidentes; la troisième est la traduction de la bijection fonctorielle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\big(M, J_V(n)\big) \cong \mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}\big(H^*V \otimes_t M, J_V(n)\big),$$

M désignant cette fois un objet de $\mathcal{U}$.

Signalons que les $J_{\mathbb{Z}/p}(n)$ apparaissaient déjà dans le travail mentionné dans l'introduction de H.R. MILLER sur la forme générale de la conjecture de Sullivan. Sa démonstration de la $H^*\mathbb{Z}/p$-$\mathcal{U}$-injectivité de $H^*\mathbb{Z}/p$ était une généralisation de celle de la $\mathcal{U}$-injectivité du A-module instable sous-jacent : il montrait que $H^*\mathbb{Z}/p$ est facteur direct en tant que $H^*\mathbb{Z}/p$-A-module instable dans une limite projective convenable de $J_{\mathbb{Z}/p}(n)$.

3.1. Propriétés formelles des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs.

On suit [Bou, § 1, n° 7, 8, 9 et 10] ou [Ga, chap. 2 et 4] et [LS, § 4].

THÉORÈME 3.1.1. — *Tout H^*V-A-module instable possède une enveloppe injective, unique à isomorphisme près.*

PROPOSITION 3.1.2. — *Soit I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *I est indécomposable;*

(ii) *0 n'est pas intersection de deux sous-H^*V-A-modules (instables) non nuls de I;*

(iii) *I est l'enveloppe injective de tous ses sous-H^*V-A-modules (instables) non nuls;*

(iv) *l'anneau $\mathrm{End}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(I)$ est local (pour tout f dans cet anneau, f ou $(1-f)$ est inversible).*

COROLLAIRE 3.1.3. — *Soient I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif indécomposable et i une injection de I dans une somme directe $\bigoplus_\lambda M_\lambda$. Alors il existe un λ tel que la composée de i et de la projection sur M_λ est injective.*

THÉORÈME 3.1.4.

(a) *Il existe un* ensemble (*c'est là le mot important!*) *de H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs indécomposables non nuls dans lequel chacune des classes de H^*V-$\mathcal{U}$-isomorphisme des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs indécomposables non nuls est représentée une et une seule fois.*

(b) *Soient S un tel ensemble et I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif; alors il existe une famille de cardinaux $(a_E)_{E\in S}$ et une seule, telle que I est isomorphe à*

$$\bigoplus_{E\in S} E^{\oplus a_E}$$

Réciproquement, tout H^*V-A-module instable de cette forme est injectif.

Vérification de (a). — D'après 3.1.2 (iii), un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif indécomposable est enveloppe injective d'un H^*V-A-module instable monogène, *i.e.* d'un quotient de $H^*V \otimes_t F(n)$ pour un certain n. D'où (a).

Vérification de (b). — L'analogue de (b) pour une catégorie de modules sur un anneau est prouvé dans [Bou] sous l'hypothèse que cet anneau est nœthérien à gauche. De la même manière, pour se convaincre de (b), il suffit de vérifer que l'on a (la signification de «de type fini» est fixée en 1.2) :

THÉORÈME 3.1.5. — *Tout sous-H^*V-A-module (instable) d'un H^*V-A-module instable de type fini est encore de type fini (la catégorie H^*V-$\mathcal{U}$ est donc localement nœthérienne).*

Nous vérifions cet énoncé en quatre étapes.

Le cas $V = 0$. — Il s'agit du résultat de [MP, section 22] (pour $p > 2$ voir aussi [LZ1, app. B]).

Le cas $p = 2$, $V = \mathbb{Z}/2$. — Il s'agit d'une adaptation de la démonstration de ce que l'anneau des séries formelles à coefficients dans un anneau nœthérien est encore nœthérien. On pose, comme dans la démonstration de 2.5.2,

$$H = H^*\mathbb{Z}/2 = \mathbb{F}_2[u]$$

Par des arguments standards il s'agit de montrer que tout sous-H-A-module (instable) M de $H \otimes F(n)$ est de type fini. Soit

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k \supset \cdots, \qquad k \in \mathbb{N},$$

la filtration décroissante de M par des sous-H-A-modules (instables) définie par :

$$M_k = \big(u^k H \otimes F(n)\big) \cap M.$$

Le A-module instable sous-jacent au quotient M_k/M_{k+1} s'identifie à la suspension k-ième d'un sous-A-module (instable) de $F(n)$ que l'on note N_k ; on vérifie que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisque $\mathcal{U}$ est localement nœthérienne, chacun des N_k est de type fini ; a fortiori M_k/M_{k+1} est un H-A-module instable de type fini. Puisque le sous-A-module (instable) de $F(n)$ réunion des N_k est également de type fini, la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang r :

$$N_k = N_{k+1} \quad \text{pour} \quad k \geq r.$$

Il en résulte

$$M_{r+1} = uM_r$$

(et plus généralement, $M_k = u^{k-r}M_r$ pour $k \geq r$). En effet, soient x un élément de M_{r+1} et s un entier ≥ 1 ; les égalités

$$N_{r+i} = N_r \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq s$$

permettent de construire une suite $(y_i)_{1\leq i\leq s}$ d'éléments de M_r telle que

$$x - \sum_{1\leq i\leq s} u^i y_i$$

appartient à M_{r+s+1} ; si $r+s+1$ est strictement plus grand que le degré de x, cette différence est forcément nulle (par définition $M_k = 0$ en degré $< k$). L'égalité $M_{r+1} = uM_r$ montre que M_r est un H-A-module instable de type fini puisque le A-module instable $M_r/uM_r \cong M_r/M_{r+1}$ est de type fini. Finalement, comme on a vu que les quotients M_k/M_{k+1} sont tous des $H-A$-modules instables de type fini, il en est de même pour M.

Le cas $p = 2$ et V arbitraire. — Soit K une A-algèbre instable. La démonstration précédente montre en fait que si la catégorie K-$\mathcal{U}$ est localement nœthérienne, alors il en est de même pour la catégorie $(H \otimes K)$-$\mathcal{U}$. On fait donc une récurrence sur la dimension de V.

Le cas $p > 2$. — La même démonstration que dans le cas $p = 2$ montre que la catégorie PV-$\mathcal{U}$ est localement nœthérienne (la notation PV est introduite dans la première remarque suivant 2.2). On conclut en remarquant qu'un H^*V-A-module instable est de type fini si et seulement si il est de type fini comme PV-A-module instable.

3.2. Détermination des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs indécomposables.

Soit (W, L, n) un élément de $\mathcal{W}\times\mathcal{L}\times\mathbb{N}$ (ces notations ont été introduites avant d'énoncer le THÉORÈME 0.12). On pose :

$$E(V, W, L, n) = H^*V \otimes_{H^*V/W} \big(L\,{}_t\!\otimes J_{V/W}(n)\big)$$

(le produit tensoriel $L\,{}_t\!\otimes J_{V/W}(n)$ qui apparaît au second membre est, en accord avec la notation introduite en 1.2, un H^*V/W-A-module instable). Le H^*V-A-module instable $E(V, W, L, n)$ est aussi canoniquement isomorphe au produit tensoriel :

$$L\,{}_t\!\otimes\big(H^*V \otimes_{H^*V/W} J_{V/W}(n)\big).$$

PROPOSITION 3.2.1. — *Le H^*V-A-module instable $E(V, W, L, n)$ est injectif et indécomposable.*

PROPOSITION 3.2.2. — *Les H^*V-A-modules instables $E(V, W_1, L_1, n_1)$ et $E(V, W_2, L_2, n_2)$ sont isomorphes si et seulement si les deux triplets (W_1, L_1, n_1) et (W_2, L_2, n_2) coïncident dans $\mathcal{W}\times\mathcal{L}\times\mathbb{N}$.*

PROPOSITION 3.2.3. — *Soit I un H^*V-$\mathcal{U}$-injectif indécomposable non nul. Alors il existe un triplet (W, L, n) dans $\mathcal{W}\times\mathcal{L}\times\mathbb{N}$ tel que I est isomorphe à $E(V, W, L, n)$.*

Avant de démontrer ces trois propositions, nous allons introduire les foncteurs qui associent à un H^*V-A-module instable sa torsion d'ordre $\mathcal{P}$, pour certains idéaux A-invariants $\mathcal{P}$ de H^*V, qui jouent un peu dans la théorie des H^*V-$\mathcal{U}$-injectifs le rôle que jouent les idéaux premiers d'un anneau commutatif nœthérien R dans la théorie des R-modules injectifs [Bou, § 1, n° 9, exemple 2].

Soient V' un sous-groupe de V et $i : V' \to V$ (resp. $j : V \to V/V'$) l'injection (resp. la surjection) canonique. On pose :

$$\mathcal{P}_{V,V'} = \ker\big(i^* : H^*V \to H^*V'\big) ;$$

$\mathcal{P}_{V,V'}$ est un idéal A-invariant de H^*V, $\mathcal{P}_{V,V'}$ est aussi l'idéal de H^*V engendré par $j^*\widetilde{H}^*V/V'$. Soit M un H^*V-A-module instable. On note

$$\theta_{V,V'}M$$

le sous-H^*V-A-module (instable) de M formé des éléments x vérifiant :

$$\mathcal{P}_{V,V'}x = 0.$$

Par définition, l'action de H^*V sur $\theta_{V,V'}M$ se factorise à travers H^*V' ; le H^*V'-A-module instable ainsi défini est noté :

$$\tau_{V,V'}M.$$

Formalisons un peu. Tout H^*V'-A-module instable M' est un H^*V-A-module instable via i^* ; on dispose donc d'un foncteur :

$$\mathcal{O}_{V',V} : H^*V'\text{-}\mathcal{U} \to H^*V\text{-}\mathcal{U}.$$

On a

$$\mathcal{O}_{V',V} \circ \tau_{V,V'} = \theta_{V,V'}, \quad \tau_{V,V'} \circ \mathcal{O}_{V',V} = 1_{H^*V'\text{-}\mathcal{U}},$$

et $(\mathcal{O}_{V',V}, \tau_{V,V'})$ est un couple de foncteurs adjoints :

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(\mathcal{O}_{V',V}M', M) \cong \mathrm{Hom}_{H^*V'\text{-}\mathcal{U}}(M', \tau_{V,V'}M).$$

Cette adjonction montre que l'on a un H^*V'-$\mathcal{U}$-isomorphisme canonique :

$$\tau_{V,V'}J_V(n) \cong J_{V'}(n).$$

On en déduit plus généralement la proposition suivante qui interviendra dans les trois démonstrations ci-dessous :

PROPOSITION 3.2.4. — *On a, pour tout sous-groupe V' de V, un H^*V'-$\mathcal{U}$-isomorphisme canonique* :

$$\tau_{V,V'}E(V,W,L,n) \cong \begin{cases} E(V',W,L,n) & \textit{si } W \subset V', \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\tau_{V,V'}E(V,W,L,n)$ est non nul si et seulement si W est contenu dans V'.

Démonstration de la proposition 3.2.1.

La H^*V-$\mathcal{U}$-injectivité de $E(V,W,L,n)$ est conséquence de 1.3.2.1 et 1.3.4.3 puisque cet H^*V-A-module instable est facteur direct dans $H^*(\mathbb{Z}/p)^m \,{}_t\!\otimes(H^*V \otimes_{H^*V/W} J_{V/W}(n))$ pour un certain entier m.

Pour montrer que $E(V,W,L,n)$ est indécomposable on commence par traiter le cas $W = V$; le cas $W \neq V$ s'en déduit en utilisant l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) de 3.1.2.

- *Cas $W = V$.* — On a :

$$E(V,V,L,n) \cong H^*V \otimes_t \big(L \otimes J(n)\big).$$

Puisque le A-module instable

$$E(V,V,L,n)/\widetilde{H}^*V\cdot E(V,V,L,n) \cong L\otimes J(n)$$

est indécomposable [LS, 4.6], il en est de même pour le H^*V-A-module instable $E(V,V,L,n)$.

• *Cas* $W\neq V$. — Compte tenu de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) de 3.1.2, il suffit de montrer que l'anneau $\mathrm{End}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}(E(V,W,L,n))$ est local. Pour cela, nous considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{End}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}\big(E(V,W,L,n)\big) \longrightarrow \mathrm{End}_{H^*W\text{-}\mathcal{U}}\big(E(W,W,L,n)\big),$$

disons ρ, fourni par l'isomorphisme de 3.2.4 :

$$\tau_{V,W}E(V,W,L,n) \cong E(W,W,L,n).$$

L'homomorphisme ρ est surjectif parce que $E(V,W,L,n)$ est H^*V-$\mathcal{U}$-injectif. Comme d'après le cas précédent et l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) de 3.1.2, l'anneau de droite est local; pour montrer qu'il en est de même pour l'anneau de gauche, il suffit de vérifier que tout élément du noyau de ρ est nilpotent. En fait, comme nous allons le voir, $f^{n+1}=0$ pour tout f dans $\ker\rho$. Posons pour abréger

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_{V,W} \quad \text{et} \quad E=E(V,W,L,n)$$

et notons $\mathcal{P}^m$ la puissance m-ième de l'idéal $\mathcal{P}$. Nous avons par récurrence sur k :

$$f^k(\mathcal{P}^{n+1-k}E)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leq k\leq n+1$$

(avec la convention $f^0=1_E$ et $\mathcal{P}^0=H^*V$). Le cas $k=0$ résulte de ce que $J_{V/W}(n)$ est nul en degré $>n$ et le passage de k à $k+1$ se fait en observant que l'hypothèse faite sur f signifie $f(x)=0$ si $\mathcal{P}x=0$.

Démonstration de la proposition 3.2.2.

Elle est conséquence des points suivants (les deux premiers résultent de 3.2.4) :

• W est l'intersection (en d'autres termes le plus petit) des sous-groupes V' de V tels que $\tau_{V,V'}E(V,W,L,n)$ est non nul;

• le A-module instable $\tau_{V,W}E(V,W,L,n)/\widetilde{H}^*W\cdot\tau_{V,W}E(V,W,L,n)$ est isomorphe à $L\otimes J(n)$;

• si les A-modules instables $L_1\otimes J(n_1)$ et $L_2\otimes J(n_2)$ sont isomorphes, alors $(L_1,n_1)=(L_2,n_2)$ (cf. [LS, 4.6]).

Démonstration de la proposition 3.2.3.

Elle se fait par récurrence sur la dimension d du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V.

Pour $d = 0$, c'est le résultat de [LS]. Supposons donc $d > 0$ et la proposition vraie pour $(d-1)$. On observe que l'on a l'alternative suivante :

1) Il existe un sous-groupe V' de codimension 1 dans V tel que $\tau_{V,V'}I$ est non nul.

2) La localisation $I \to I[c_V^{-1}]$ est injective.

Condition équivalente d'après 2.3 à la suivante :

2 bis) L'application naturelle $I \to H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V I$ est injective. (Cette alternative vaut pour tout H^*V-A-module instable.)

Plaçons-nous dans le premier cas. Le H^*V'-A-module instable non nul $\tau_{V,V'}I$ est injectif, indécomposable (sinon I serait décomposable d'après l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de 3.1.2). Par hypothèse de récurrence, il existe un H^*V'-$\mathcal{U}$-isomorphisme

$$\tau_{V,V'}I \cong E(V', W, L, n)$$

avec $W \subset V'$ et $(L, n)_{\in \mathcal{L} \times \mathbb{N}}$. Or on a de même

$$\tau_{V,V'}E(V, W, L, n) \cong E(V', W, L, n)$$

d'après 3.2.4. D'après 3.1.2 (iii), I et $E(V, W, L, n)$ sont tous les deux enveloppe injective de $\mathcal{O}_{V',V}E(V', W, L, n)$; ils sont donc isomorphes d'après 3.1.1.

Plaçons-nous dans le second cas. D'après [LS], le A-module instable $\mathrm{Fix}_V I$ se plonge dans une somme directe de la forme

$$\bigoplus_\lambda L_\lambda \otimes J(n_\lambda)$$

avec (L_λ, n_λ) appartenant à $\mathcal{L} \times \mathbb{N}$, si bien que le H^*V-A-module instable $H^*V \otimes \mathrm{Fix}_V I$ se plonge dans la somme directe $\bigoplus_\lambda E(V, V, L_\lambda, n_\lambda)$. D'après 3.1.3, il existe un λ tel que I est isomorphe à $E(V, V, L_\lambda, n_\lambda)$.

3.3. Démonstration du théorème 0.13.

Soit M un H^*V-A-module instable tel que le A-module instable $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est localement fini. Alors, d'après 2.4.3,

$$\mathrm{Hom}_{H^*V\text{-}\mathcal{U}}\big(M, E(V, W, L, n)\big) = 0$$

si $L \not\cong \mathbb{F}_p$. L'enveloppe injective de M est donc simplement une somme directe de la forme

$$\bigoplus_{(W,n)\in\mathcal{W}\times\mathbb{N}} E(V,W,\mathbb{F}_p,n)^{\oplus a_{W,n}}.$$

Si $M/\widetilde{H}^*V{\cdot}M$ est fini, cette somme directe est en outre finie. En effet dans ce cas M est de type fini comme H^*V-A-module instable et l'image de tout H^*V-$\mathcal{U}$-morphisme de M dans une somme directe $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ est contenue dans une sous-somme directe $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda$ avec Λ_0 fini.

BIBLIOGRAPHIE

[AS] Atiyah (M.F.) and Segal (G.). — *Equivariant cohomology and localization.* — Lecture notes, Warwick, 1965.

[BK] Bousfield (A.K.) and Kan (D.M.). — *Homotopy limits, Completions, and Localizations*, Springer Lecture Notes **304**, 1972.

[Bor] Borel (A.) et al.. — *Seminar on Transformation Groups*, Ann. of Math. Sudies, t. **46**, Princeton, 1960.

[Bou] Bourbaki (N.). — *Algèbre*, chapitre 10.

[DW1] Dwyer (W.G.) and Wilkerson (C.W.). — *Smith theory revisited*, Ann. of Math., t. **127**, 1988, p. 191–198.

[DW2] Dwyer (W.G.) and Wilkerson (C.W.). — *Spaces of Null Homotopic Maps, Théorie de l'Homotopie*, Astérisque, t. **191**, 1990, p. 97–108.

[DW3] Dwyer (W.G.) and Wilkerson (C.W.). — *Smith theory and the functor T*, Comm. Math. Helv., t. **66**, 1991, p. 1–17.

[DW4] Dwyer (W.G.) and Wilkerson (C.W.). — *Homotopy fixed points methods for Lie groups and finite loop spaces*, preliminary draft, 1992.

[Ga] Gabriel (P.). — *Les catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, t. **90**, 1962, p. 323–448.

[HLS] Henn (H.-W.), Lannes (J.) and Schwartz (L.). — *Localizations of unstable A–modules and equivariant mod p cohomology*, preprint, 1992.

[Hs] Hsiang (W.Y.). — *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*, Springer Verlag (New York), 1975.

[La1] LANNES (J.). — *Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires*, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory 1985, London Math. Soc., Lecture Note **117**, 1987, p. 97–116.

[La2] LANNES (J.). — *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, Publ. Math. I.H.E.S., t. **75**, 1992, p. 135–244.

[LS] LANNES (J.) et SCHWARTZ (L.). — *Sur la structure des A-modules instables injectifs*, Topology, t. **28**, 1989, p. 153–169.

[LZ1] LANNES (J.) et ZARATI (S.). — *Sur les $\mathcal{U}$-injectifs*, Ann. Scient. École Norm. Sup., t. **19**, 1986, p. 1–31.

[LZ2] LANNES (J.) et ZARATI (S.). — Tor*–dimension et* Ext*–dimension des H^*V-A–modules instables qui sont de type fini comme H^*V–modules*, à paraître.

[MP] MASSEY (W.S.) and PETERSON (F.P.). — *The mod 2 cohomology structure of certain fibre spaces*, Memoirs of the A.M.S. **74**, 1967.

[Qui] QUILLEN (D.G.). — *The spectrum of an equivariant cohomology ring, I, II*, Ann. of Math., t. **94**, 1971, p. 549–572 et 573–602.

[Sc] SCHWARTZ (L.). — *La filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces de lacets*, Algebraic Topology – Rational Homotopy, Springer Lecture Note **1318**, 1988, p. 208–218.

[Se] SERRE (J.-P.). — *Sur la dimension cohomologique des groupes profinis*, Topology, t. **3**, 1965, p. 413–420.

[Wi] WILKERSON (C.W.). — *Classifying spaces, Steenrod operations and algebraic closure*, Topology, t. **16**, 1977, p. 227–237.

[Za] ZARATI (S.). — Quelques propriétés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_p}(-, H^*V)$, Algebraic Topology, Göttingen 1984, Springer Lecture Note **1172**, 1985, p. 204–209.