BULLETIN DE LA S. M. F.

D. BARLET
J. VAROUCHAS

Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 3 (1989), p. 327-341
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_327_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 327–341.

FONCTIONS HOLOMORPHES SUR L'ESPACE DES CYCLES

PAR

D. BARLET et J. VAROUCHAS (*)

RÉSUMÉ. — Si X est un espace analytique complexe ***arbitraire***, il est établi que sur l'espace réduit (variété de Chow) des m-cycles analytiques complexes compacts $c = \sum n_i Y_i$ de X, la fonction $c \mapsto \int_c \xi = \sum n_i \int_{Y_i} \xi$ est holomorphe, pour tout représentant $\bar\partial$-fermé ξ d'un élément de $H^m(X, \Omega_X^m)$.

Ceci, combiné avec les travaux du second auteur, montre que l'espace des cycles d'un espace Kählérien X est toujours Kählérien, et donc que toute image (réduite) par un morphisme propre et plat d'un tel X est également Kählérienne.

ABSTRACT. — If X is an ***arbitrary*** complex space, it is shown that on the reduced space (Chow variety) of compact complex m-cycles $c = \sum n_i Y_i$ of X, the function $x \mapsto \int_c \xi = \sum n_i \int_{Y_i} \xi$ is holomorphic, for any $\bar\partial$-closed representative ξ of an element of $H^m(X, \Omega_X^m)$. This implies that the space of cycles of a Kähler space X is always a Kähler space, and therefore that any (reduced) image of such a space by a proper flat map is again kähler.

0. Introduction

Le but de cet article est d'établir le

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soient*

- *X, S deux espaces complexes avec S réduit,*
- *Φ, Ψ deux familles de supports de X avec Φ paracompactifiante et $\Phi \cap \Psi$ compacte,*
- *$\xi \in H_\Phi^m(X, \Omega_X^m)$ où Ω_X^m est le faisceau des m-formes holomorphes sur X,*
- *$\varphi \in \Gamma_\Phi(X, A_X^{m,m})$ un représentant $\bar\partial$-fermé de ξ à support dans Φ,*
- *$(c_s)_{s \in S}$ une famille analytique de m-cycles de X à supports dans Ψ paramétrée par S.*

(*) Texte reçu le 27 juin 1988, révisé le 25 novembre 1988.
D. BARLET, Université de Nancy I, Dépt. de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France.
J. VAROUCHAS, Université de Nancy I, U.A. du CNRS n° 750, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/327/$ 5.00

Alors la fonction

$$F : s \longmapsto (c_s \cdot \xi) := \int_{c_s} \varphi$$

est holomorphe sur S.

Pour comprendre cet énoncé, il est bon de connaître :

(a) La définition des faisceaux de formes différentielles holomorphes et $\mathcal{C}^\infty$ sur un espace complexe non nécessairement lisse.

(b) La définition des groupes de cohomologie à supports dans une famille paracompactifiante de fermés (f.p.f.) Φ par des cochaînes de Čech ainsi que la forme explicite du morphisme canonique

$$H^s_\Phi(X, \Omega^r_X) \xrightarrow{\gamma^{r,s}} H^{r,s}_{\Phi,\bar\partial}(X) := \frac{\operatorname{Ker}(\bar\partial : \Gamma_\Phi(X, A^{r,s}_X \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, A^{r,s+1}_X))}{\operatorname{Im}(\bar\partial : \Gamma_\Phi(X, A^{r,s-1}_X \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, A^{r,s}_X))}.$$

(c) La notion de famille analytique de m-cycles (sous-entendu : analytiques complexes) de X à supports dans une famille Ψ de fermés, paramétrée par un espace réduit S. Un m-cycle de X est une combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers ≥ 0 de sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension m de X. Il est délicat de définir quand une famille de m-cycles dépend analytiquement d'un paramètre $s \in S$.

Notons que le lecteur n'a pas besoin de connaître l'existence de l'espace $B_m(X)$ des m-cycles compacts de X (c'est-à-dire que le foncteur "familles analytiques de m-cycles compacts de X paramétrées par —" est représentables) pour comprendre l'énoncé, et même la démonstration, du théorème principal. Toutefois, si l'on sait que cet espace existe, le théorème principal implique qu'il existe un morphisme canonique de $H^m(X, \Omega^m_X)$ dans $\mathcal{O}(B_m(X))$ donné par l'accouplement

$$(c, \xi) \longmapsto (c \cdot \xi)$$

qu'on appellera aussi intégration de ξ sur le cycle c.

Pour comprendre la portée du théorème, il est également utile de connaître la notion de *fonction faiblement holomorphe* (= continue génériquement holomorphe, donc méromorphe) et d'*espace faiblement normal* (un espace réduit où toute fonction faiblement holomorphe est holomorphe). La principale information de notre énoncé est que la fonction F est non seulement faiblement holomorphe (ce qui est connu depuis longtemps) mais holomorphe.

Pour (a) nous renvoyons le lecteur à [7], [10], ou [15].

Pour (b) nous donnons toutes les explications nécessaires dans le texte et l'Appendice I, où on lève l'ambiguïté de la notion de "support d'une cochaîne de Čech".

Maintenant passons à (c). Il existe plusieurs définitions *équivalentes* de la notion de famille analytique de m-cycles paramétrée par un espace réduit. La première est celle donnée dans [3], [4], [5] et [15]. La seconde, que nous choisissons dans le texte, s'exprime par la possibilité de considérer des traces de formes différentielles holomorphes qui dépendent holomorphiquement des paramètres choisis. Il est établi dans [3, Chapitre VII, Proposition 2] que la première définition implique la seconde. La réciproque est également vraie, mais nous ne nous en servons pas puisque nous déduisons le théorème principal directement de la seconde définition.

L'idée d'accoupler une classe de $H^m(X, \Omega_X^m)$ avec une famille analytique de m-cycles compacts pour obtenir des fonctions holomorphes sur l'espace des paramètres apparaît pour la première fois (à notre connaissance) dans l'article d'ANDREOTTI–NORGUET [2]. Ceci ouvrait la voie à une méthode d'utilisation de la notion de convexité intermédiaire introduite par ANDREOTTI–GRAUERT (où nous conviendrons d'appeler q-convexes (*resp.* q-complets) les espaces appelés $(q+1)$-convexes et $(q+1)$-complets dans [1]) suivant le principe général suivant : la m-convexité d'un espace X permet, sous certaines hypothèses, d'obtenir des conditions de 0-convexité sur l'espace des m-cycles de X. Les auteurs de [2] étudiaient le cas où X est quasi-projectif et considéraient le normalisé faible de l'espace des cycles. En effet, en l'absence de notre théorème principal (*), il n'était pas facile de vérifier que la structure complexe de la variété de Chow (espace des cycles) d'une variété quasi-projective X, lisse ou non, ne dépend pas du choix du plongement de X dans un espace projectif. Le théorème étant établi, nous pouvons, en accouplant les m-cycles avec des classes de cohomologie, obtenir des coordonnées locales au voisinage de tout point de l'espace des m-cycles compacts de X, ceci pour un espace complexe arbitraire ([5, Théorème 2]).

Pour X quasi-projectif, le théorème principal est démontré par le premier auteur dans [3, Chapitre VII]. Plus tard, deux démonstrations étaient données [4] et [5] sous la restriction que X est lisse. Le cas général (X espace complexe arbitraire) n'était toujours pas résolu (voir à ce propos la remarque de [6, p. 381]) au moment de la thèse du second auteur qui consiste à munir d'une métrique Kählérienne l'espace des cycles d'un espace Kählérien. Les résultats établis dans [15, Théorèmes 3 et 4]

(*) Il est instructif de remarquer les passages de [2, Remarque η, p. 52, et Théorème 5, p. 71] où notre résultat peut être utilisé pour éviter de normaliser faiblement la variété de Chow.

sont accompagnés d'hypothèses supplémentaires artificielles dont il était naturel de croire qu'elles étaient superflues. Ayant établi le théorème principal nous obtenons comme conséquence

THÉORÈME 2. — *L'espace des m-cycles compacts d'un espace Kählérien est un espace Kählérien.*

COROLLAIRE (Problème de HIRONAKA, [10, p. 35–36]).
Si $\pi : X \to Y$ est un morphisme propre et plat à fibres de dimension pure avec X Kählérien et Y réduit alors Y est Kählérien.

Pour notre démontration nous utilisons un résultat (lemme de découpage) essentiellement dû à REIFFEN [14]. Du lemme de découpage nous pouvons déduire le

COROLLAIRE. — *Soit $\pi : X \to S$ un morphisme d'espace complexes et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Supposons que* $\dim \pi^{-1}(s) \leq m$ *pour tout $s \in S$. Alors :*

(i) $R^{q+1}\pi_! \mathcal{F} = 0$ *pour tout* $q \geq m$.

(ii) *Pour tout recouvrement ouvert $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X on a une surjection de faisceaux sur S*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} R^m(\pi_\alpha)_! \left(F|_{X_\alpha}\right) \longrightarrow R^m\pi_! \mathcal{F} \qquad (\textit{où } \pi_\alpha := \pi|_{X_\alpha}).$$

Remarque. — La partie (i) du corollaire est classique quand π est propre, [12].

1. Cohomologie à supports

Nous renvoyons le lecteur à [8] ou [11] pour la définition d'une famille paracompactifiante de fermés (f.p.f.) d'un espace topologique séparé X et des groupes $H^q_\Phi(X, \mathcal{F})$ quand Φ est une f.p.f. de X et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Voir aussi l'Appendice I.

Nous aurons besoin des propriétés fondamentales suivantes : X sera un espace localement compact complètement paracompact (tout ouvert donc tout sous-espace de X est paracompact), Φ une f.p.f. de X et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. La lettre c désigne la famille des compacts de X. Pour tout espace topologique X', $c \times X'$ désignera la famille des fermés de $X \times X'$ dont la première projection est relativement compacte dans X.

1.1. — Si $Y \subset X$ notons par $\mathcal{V}(Y)$ l'ensemble des voisinages de Y dans X et pour $U \subset X$, $\Phi \cap U := \{F \cap U \mid F \in \Phi\}$. Alors

$$H^q_{\Phi \cap Y}(Y, \mathcal{F}|_Y) \cong \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(Y)} H^q_{\Phi \cap U}(U, \mathcal{F}).$$

De la suite de Mayer–Vietoris on peut facilement déduire :

LEMME 1.2. — *Si $m \geq 0$ est fixé et si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X telle que $H^{q+1}_c(U, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq m$ et tout $U \in \mathcal{B}$ alors :*

(i) *$H^{q+1}_c(U, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq m$ et tout ouvert $U \subset X$.*

(ii) *Si (U_α) est un recouvrement ouvert de X alors le morphisme naturel*

$$\bigoplus_\alpha H^m_c(U_\alpha, \mathcal{F}) \longrightarrow H^m_c(X, \mathcal{F})$$

est surjectif.

LE LEMME DE DÉCOUPAGE 1.3. — *Soient X un espace analytique complexe, Y un sous-ensemble analytique complexe de dimension $\leq m$ de X et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Soit Z la réunion du lieu singulier de Y et de ses composantes de dimension $< m$ (de sorte que $Y \setminus Z$ est lisse de dimension pure m). Alors*

(i) *Pour tout $q \geq m$, $H^{q+1}_c(Y, \mathcal{F}|_Y) = 0$.*

(ii) *Pour tout recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $Y \setminus Z$, le morphisme naturel*

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H^m_c(U_\alpha, \mathcal{F}|_{U_\alpha}) \longrightarrow H^m_c(Y, \mathcal{F}|_Y)$$

est surjectif.

On notera que $\mathcal{F}|_Y$ n'a pas une structure naturelle de $\mathcal{O}_Y$-module, mais que c'est un faisceau cohérent sur l'espace annelé $(Y, \mathcal{O}_X|_Y)$.

Démonstration.

(i) est établi dans [14, Satz 2].

(ii) est une conséquence de [14, Satz 3] et du LEMME 1.2 ci-dessus.

LEMME 1.4. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^m$, B un polydisque de $\mathbb{C}^N$ et $\sigma : V \to U \times B$ un plongement d'un espace analytique complexe dans $U \times B$. Soit Φ la f.p.f. de V définie par $\Phi := \sigma^{-1}(c \times B)$. Alors pour toute classe $\xi \in H^m_\Phi(V, \Omega^m_V)$ il existe un polydisque $B' \subset B$ centré en 0 tel que, si $V' := \sigma^{-1}(U \times B')$ et $\Phi' := \Phi \cap V'$, $\xi|_{V'}$ soit dans l'image du morphisme canonique*

$$\pi_{B'} : H^m_{c \times B'}(U \times B', \Omega^m_{U \times B'}) \longrightarrow H^m_\Phi(V', \Omega^m_{V'}).$$

Démonstration. — Il s'agit de démontrer la surjectivité du morphisme $\varinjlim_{B'} \pi_{B'}$ où B' parcourt l'ensemble des polydisques centrés en 0 et contenus dans B. Soit $\mathcal{N}$ le faisceau cohérent défini par la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \Omega_{U\times B} \longrightarrow \sigma_*(\Omega_V^m) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

En identifiant U à $U \times \{0\}$, on a par 1.1 et 1.2 (i)

$$\varinjlim_{B'} H^{m+1}_{c\times B'}(U \times B', \mathcal{N}) = H_c^{m+1}(U, \mathcal{N}|_U) = 0.$$

Le résultat découle alors de la longue suite exacte de cohomologie associée à (1) et de l'égalité

$$H^m_\Phi(V', \Omega^m_{V'}) = H^m_{c\times B'}(U \times B', \sigma_*(\Omega^m_{V'})).$$

2. Familles analytiques de cycles

2.1. Cycles analytiques complexes. — Soit X un espace analytique complexe et $m \geq 0$ un entier. Un *m-cycle analytique complexe* (ou m-cycle) de X est par définition une combinaison linéaire localement finie

$$c = \sum_{i\in I} n_i Y_i$$

où $n_i \geq 1$ sont des entiers et Y_i des sous-ensembles analytiques complexes irréductibles de dimension m deux à deux distincts de X. On définit de la manière évidente la somme d'un nombre fini de m-cycles, ainsi que le m-cycle $c|_U$ induit par c sur un ouvert arbitraire U de X.

Le *support* de c est l'ensemble analytique

$$|c| := \bigcup_{i\in I} Y_i.$$

Une *carte adaptée à c* (ou *écaille adaptée à c*) est la donnée de $(C, \sigma, U \times B)$ où $V \subset\subset X$, $U \subset\subset \mathbb{C}^m$, $B \subset\subset \mathbb{C}^N$ sont des ouverts (*) et $\sigma : \overline{V} \to \overline{V} \times \overline{B}$ un germe de plongement tel que

$$\sigma(|c| \cap \overline{V}) \cap (\overline{U} \times \partial B) = \emptyset.$$

(*) N entier arbitraire

Dans ce cas, chaque $\pi_i : Y_i \cap V \to U \times B$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_i \cap V \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & U \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

est propre donc fini d'un certain degré $k_i \geq 0$ (k_i est défini si U est connexe. Sinon c'est une fonction localement constante à valeurs entières sur U). On appelle

$$k := \sum n_i k_i$$

le *degré de* c par rapport à la carte $(V, \sigma, U \times B)$. Notons que $\sigma(Y_i \cap V)$ est un sous-ensemble analytique complexe de dimension m de $U \times B$, propre (donc fini) au-dessus de U.

Maintenant soit q un entier telque $0 \leq q \leq m$ et soit $\omega \in \Omega^q(U \times B)$ une forme différentielle holomorphe de degré q. Pour toute forme différentielle $\psi \in A_c^{m-q,m}(U)$ à support compact dans U posons

$$L_\omega(\psi) := \sum_{i \in I} n_i \int_{\sigma(Y_i \cap V)} \omega \wedge pr_1^* \psi.$$

Il est clair, d'après le théorème d'intégration sur un ensemble analytique complexe [13], que L_ω est un courant $\overline{\partial}$-fermé de bidegré $(q, 0)$ sur U. Donc il lui correspond une unique forme holomorphe $T\omega$ vérifiant

$$\int_U T\omega \wedge \psi = \sum_{i \in I} n_i \int_{\sigma(Y_i \cap V)} \omega \wedge pr_1^* \psi.$$

On obtient donc un *opérateur trace*

$$T = T_{c,V,U \times B} : \Omega(U \times B) \longrightarrow \Omega(U)$$

qui a les propriétés suivantes :

(i) $T_{c,V,U \times B}$ est local en U, Ω_U-linéaire et compatible aux différentielles.

(ii) Si $\sigma(|c| \cap \overline{V}) \subset \overline{U} \times (B' \cup B'')$ où B', B'' sont deux ouverts disjoints de B et si $V' := \sigma^{-1}(U \times B')$, $V'' := \sigma^{-1}(U \times B'')$ alors

$$T_{c,V,U \times B} = T_{c,V',U \times B'} + T_{c,V'',U \times B''}.$$

(iii) $T_{c,V,U\times B}$ est additif par rapport c. Ceci signifie que si c_1, c_2 sont deux m-cycles et si $(V, \sigma, U \times B)$ est adaptée à c_1 et à c_2, alors elle est adaptée à $c_1 + c_2$ et on a

$$T_{c_1+c_2,V,U\times B} = T_{c_1,V,U\times B} + T_{c_2,V,U\times B}.$$

(iv) Si U est connexe et $(U, \sigma, V \times B)$ est adapté à c alors $T_{c,V,U\times B}$ (1) est égal au degré de c par rapport à la carte $(V, \sigma, U \times B)$.

2.2. Analyticité d'une famille de cycles. — Soient X, S deux espaces analytiques complexes, S réduit et soit $m \geq 0$ un entier. Supposons d'abord qu'à tout point s de S nous avons associé un m-cycle c_s de X. Pour toute partie S' de S, *une carte adaptée à* S sera la donnée d'un germe de plongement

$$\sigma : \overline{V} \longrightarrow \overline{U} \times \overline{B}$$

comme avant ($V \subset\subset X, U \subset\subset \mathbb{C}^m, B \subset\subset \mathbb{C}^N, N$ arbitraire) vérifiant la condition

$$\overline{\bigcup_{s\in S'} \sigma(|c_s| \cap \overline{V})} \cap (\overline{U} \times \partial B) = \emptyset$$

l'adhérence du membre de gauche étant prise dans $\overline{U} \times \overline{B}$. Ceci donc signifie qu'il existe un compact K de B tel que $\sigma(|c_s| \cap \overline{V}) \subset U \times K$ pour tout $s \in S'$.

Maintenant nous pouvons poser, pour U ouvert de $\mathbb{C}^m$

$$\Omega^q_{(U\times S)/S}(U \times S) := \Gamma\big(U, \mathcal{O}_{U\times S} \underset{\mathcal{O}_U}{\otimes} \Omega^q_U\big) = \sum_{|I|=q} \mathcal{O}(U \times S)\, dt^I \qquad (t = (t_1, \ldots, t_m) \in U)$$

ce qui n'est autre que l'espace vectoriel des q-formes holomorphes sur U dépendant holomorphiquement d'un paramètre dans S.

Soit Ψ une famille de supports dans X (non nécessairement paracompactifiante).

Une *famille analytique de m-cycles de X à supports dans Ψ paramétrée par S* sera par définition

(1) La donnée d'une application $s \mapsto c_s$ qui à tout point s de S associe un m-cycle c_s de X.

(2) La donnée, pour tout ouvert S' de S et pour toute carte $\mathcal{V} = (V, \sigma, U \times B)$ adaptée à S' d'un morphisme (opérateur trace)

$$T_{S',V,U\times B} : \Omega(U \times B) \longrightarrow \Omega_{(U\times S')/S'}(U \times S')$$

vérifiant :

(i) Tout point de S a un voisinage Ω dans S tel que $\bigcup_{s\in\Omega}|c_s|$ soit contenu dans un élément de Ψ.

(ii) Pour tout point s de S et toute carte $\mathcal{V}$ adaptée à c_s il existe un voisinage S' de s dans S tel que $\mathcal{V}$ soit adaptée à S'.

(iii) $T_{S',V,U\times B}$ est local en U, Ω_U-linéaire et compatible aux différentielles.

(iv) $T_{S',V,U\times B}$ est local en S' et pour tout point s de S' le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{(U\times S')/S'}(U\times S') \arrow[dd, "\text{évaluation en } s"] \\
\Omega(U\times B) \arrow[ur, "T_{S'.V.U\times B}"] \arrow[dr, "T_{c_s.V.U\times B}"'] & \\
 & \Omega(U)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(v) Si B', B'' sont deux ouverts disjoints de B tels que

$$\overline{\bigcup_{s\in S'}\sigma(|c_s|\cap\overline{V})}\subset\overline{U}\times(B'\cup B'')$$

et si $V' := \sigma^{-1}(U\times B')$, $V'' := \sigma^{-1}(U\times B'')$, alors

$$T_{S',V,U\times B} = T_{S',V',U\times B'} + T_{S',V'',U\times B''}.$$

Remarque. — Les conditions ci-dessus impliquent que, si U et S' sont connexes, alors le degré de c_s relativement à $(V,\sigma,U\times B)$ est constant sur S'.

Nous pouvons définir la somme de deux familles analytiques de cycles en prenant les sommes point par point des cycles correspondants ainsi que des opérateurs trace respectifs dès que leurs domaines de définition coïncident. Nous obtenons ainsi un faisceau de monoïdes additifs (ou semi-groupes) sur S en associant à tout ouvert S' de S l'ensemble des familles de m-cycles de X paramétrées par S'.

Notons qu'il ne suffit pas que $|c_s|\in\Psi$ pour tout $s\in S$ pour que la condition (i) ci-dessus soit vérifiée.

2.3. Accouplement d'une famille analytique de cycles avec une classe de cohomologie.

(a) *Le cas d'un cycle.* — Si $c = \sum n_i Y_i$ est un m-cycle de X et Ψ une f.p.f. de X telle que $F \in \Psi$ implique que $|c| \cap F$ est compact, nous pouvons considérer pour toute classe de cohomologie $\xi \in H^m_\Psi(X, \Omega^m_X)$ un élément $\overline{\partial}$-fermé $\varphi \in \Gamma_\Psi(X, A^{m,m}_X)$ représentant ξ comme suit : Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de X dans lequel ξ est représentée par un cocycle de Čech $(\xi_{\alpha_0,\dots,\alpha_m}) \in Z^m_\Psi(\mathcal{U}, \Omega^m_X)$. Soit (ρ_α) une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée à $\mathcal{U}$. Alors l'élément

$$\varphi := (-1)^{m(m+1)/2} \sum_{\alpha_0 \dots \alpha_m} \rho_{\alpha_O} \overline{\partial} \rho_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} \rho_{\alpha_m} \wedge \xi_{\alpha_0 \dots \alpha_m}$$

de $\Gamma_\Psi(X, A^{m,m})$ vérifie $\overline{\partial}\varphi = 0$ et sa classe dans $H^{m,m}_{\Psi,\overline{\partial}}(X)$ ne dépend que de ξ. On pose

$$(c \cdot \xi) := \sum n_i \int_{Y_i} \varphi.$$

(b) *Accouplement local avec une famille de cycles.* — Nous montrerons que, si $\gamma = (c_s)_{s \in S}$ est une famille analytique de m-cycles de X paramétrée par un espace réduit S, S' un ouvert de S et $(V, \sigma, U \times B)$ une carte adaptée à S', alors il existe un morphisme canonique

$$I_\gamma : H^m_{c \times B}(U \times B, \Omega^m_{U \times B}) \longrightarrow \mathcal{O}(S')$$

tel que pour tout $s \in S'$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}(S') \arrow[d, "\text{évaluation en } s"] \\ H^m_{c \times B}(U \times B, \Omega^m_{U \times B}) \arrow[ur, "I_\gamma"] \arrow[r, "(c_s \cdot -)"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Pour cela, soit $\xi \in H^m_{c \times B}(U \times B, \Omega^m_{U \times B})$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $U \times B$ tel que ξ soit représenté par un cocycle de Čech

$$(\xi_{\alpha_0 \dots \alpha_m}) \in Z^m(\mathcal{W}, \Omega^m_{U \times B})$$

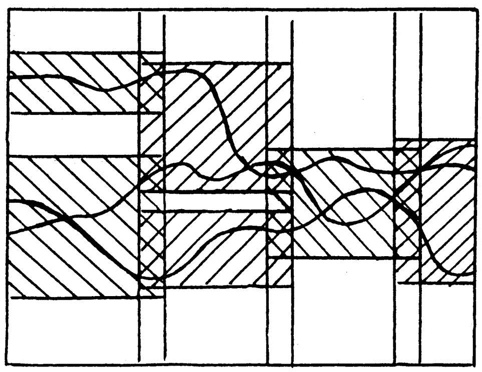
tel que $\Sigma_3((\xi_{\alpha_0\ldots\alpha_m})) \subset K \times B$ pour un compact K de U (Σ_3 étant défini dans l'Appendice). Fixons un point s de S'.

Prenons un recouvrement fini de K par des ouverts $U_\lambda \subset\subset U(\lambda \in \Lambda, \Lambda$ fini) tels que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe une famille finie $(B_\lambda^j)_{j\in J(\lambda)}$ d'ouverts de B deux à deux disjoints vérifiant les deux conditions

(i) $\pi_s^{-1}(\overline{U}_\lambda) \subset \bigcup_{j\in J(\lambda)} \sigma^{-1}(\overline{U}_\lambda \times B_\lambda^j)$ où π_s est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {|c_s| \cap V} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi_s"'] & & U \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(ii) $U_\lambda \times B_\lambda^j \subset W_{\alpha_\lambda^j}$ pour un certain $\alpha_\lambda^j \in A$.



Considérons maintenant l'ensemble E des multi-indices

$$(\lambda, j) := (\lambda_0, \ldots, \lambda_m ; j_0, \ldots, j_m)$$

tels que $j_0 \in J(\lambda_0), \ldots, j_m \in J(\lambda_m)$. Pour $(\lambda, j) \in E$ posons

$$\begin{aligned} &U_\lambda := U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_m} ; && B_\lambda^j := B_{\lambda_0}^{j_0} \cap \cdots \cap B_{\lambda_m}^{j_m} ; \\ &V_\lambda^j := \sigma^{-1}(U_\lambda \times B_\lambda^j) ; && \sigma_\lambda^j := \sigma|_{V_\lambda^j} ; \\ &\xi_\lambda^j := \xi_{\alpha_{\lambda_0}^{j_0} \ldots \alpha_{\lambda_m}^{j_m}} |_{U_\lambda \times B_\lambda^j} . && \end{aligned}$$

Comme chaque carte $(V_\lambda^j, \sigma_\lambda^j, U_\lambda \times B_\lambda^j)$ est adaptée à c_s et il n'y en a qu'un nombre fini, il existe un voisinage S'' de s dans S' tel que chacune de ces cartes soit adaptée à S''. Pour cet ouvert S'' posons

$$T_\lambda^j := T_{S'', V_\lambda^j, U_\lambda \times B_\lambda^j}.$$

Maintenant nous pouvons définir un élément de $\mathcal{O}(S'')$ à savoir

$$g_{S''} := (-1)^{m(m+1)/2} \sum_{(\lambda,j)\in E} \int_{U_\lambda} \rho_{\lambda_0} \overline{\partial} \rho_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} \rho_{\lambda_m} \wedge T_\lambda^j(\xi_\lambda^j)$$

où (ρ_λ) est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_λ). D'après ce qui précède, la valeur en $s \in S''$ de $g_{S''}$ est exactement $(c_s \cdot \xi)$. La fonction $s \mapsto (c_s \cdot \xi)$ est holomorphe dans ce cas puisqu'elle s'exprime au voisinage de tout point comme somme finie d'intégrales dépendant holomorphiquement de s.

2.4. Démonstration du Théorème principal. — Fixons $s_0 \in S$ et posons $Y := |c_{s_0}|$. Nous montrerons que $s \mapsto (c_s \cdot \xi)$ est holomorphe au voisinage de s_0 dans S. Posons $X_0 := \bigcup_{F\in\Psi} F$ (*l'étendue* de Ψ) qui est un ouvert car Ψ est paracompactifiante. Quitte à intersecter Y avec X_0, nous pouvons supposer que $X_0 = X$. Alors $\Psi \cap Y$ est la famille de tous les compacts de Y. Recouvrons la partie lisse $Y \backslash Z$ de Y par des ouverts $V_\alpha \subset X\backslash Z$ $(\alpha \in A)$ admettant des plongements $\sigma_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \times B_\alpha$ avec $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$ et $\sigma_\alpha|_{U_\alpha} = (Id, 0)$, B_α étant un polydisque de dimension arbitraire centré en 0. Commençons par prendre l'image $\xi|_Y$ de ξ dans

$$H_c^m(Y, \Omega_X^m|_Y) = \varinjlim_{W\supset Y} H_{\Psi\cap W}^m(W, \Omega_W^m).$$

D'après le lemme de découpage appliqué au faisceau cohérent Ω_X^m, $\xi|_Y$ est dans l'image du morphisme canonique

$$\bigoplus_\alpha H_c^m(U_\alpha, \Omega_{V_\alpha}^m|_{U_\alpha}) \longrightarrow H_c^m(Y, \Omega_X^m|_Y).$$

Il existe donc un sous-ensemble fini $A' \subset A$ tel que pour $\alpha \in A'$ il existe des classes $\xi_\alpha \in H_c^m(U_\alpha, \Omega_{V_\alpha}^m|_{U_\alpha})$ telles que $\xi|_Y$ soit somme de leurs images canoniques dans $H_c^m(Y, \Omega_X^m|_Y)$. D'après 1.1, pour chaque $\alpha \in A'$ il existe un polydisque centré en 0, $B'_\alpha \subset B_\alpha$ tel que si $V'_\alpha := \sigma_\alpha^{-1}(U_\alpha \times B'_\alpha)$ et $\Phi'_\alpha := \sigma_\alpha^{-1}(c \times B'_\alpha)$, ξ_α soit dans l'image du morphisme canonique

$$H_{\Psi'_\alpha}^m(V'_\alpha, \Omega_{V'_\alpha}^m) \longrightarrow H_c^m(U_\alpha, \Omega_{V_\alpha}^m|_{U_\alpha}).$$

D'après le LEMME 1.4 et quitte à remplacer B'_α par un polydisque plus petit, ξ_α est dans l'image de

$$H^m_{c\times B'_\alpha}(U_\alpha \times B'_\alpha, \Omega^m_{U_\alpha\times B'_\alpha}) \longrightarrow H^m_c(U_\alpha, \Omega^m_{V_\alpha} \mid U_\alpha).$$

Finalement $\xi|_Y$ est dans l'image de

$$\bigoplus_{\alpha\in A} H^m_{c\times B'_\alpha}(U_\alpha \times B'_\alpha, \Omega^m_{U_\alpha\times B'_\alpha}) \longrightarrow H^m_c(Y, \Omega^m_X|_Y).$$

Ceci à son tour signifie que le germe en s_0 de la fonction $s \mapsto (c_s \cdot \xi)$ est somme d'un nombre fini de germes provenant chacun de l'accouplement d'une classe de $H_{c\times B'_\alpha}(U_\alpha \times B'_\alpha, \Omega^m_{U_\alpha\times B'_\alpha})$ avec une famille analytique de cycles dans une écaille donnée, ce qui fournit des fonctions holomorphes d'après 2.3.

Appendice

Soit X un espace topologique séparé et Ψ une famille de fermés de X. On dit que Ψ est une *famille de supports* si :

(1) $F \in \Psi, F' \subset F, F'$ fermé $\Rightarrow F' \in \Psi$;

(2) $F_1, F_2 \in \Psi \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \Psi$.

On dit que Ψ est *paracompaticfiante* si en plus :

(3) $F \in \Psi \Rightarrow F$ est paracompact ;

(4) Tout $F \in \Psi$ a un voisinage U tel que $\overline{U} \in \Psi$.

En pratique nous considérerons des espaces X localement compacts paracompacts *ainsi que tous leurs ouverts.* On écrira f.p.f. pour famille paracompactifiante de fermés. Soit maintenant $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Si $f = (f_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est une q-cochaîne de $\mathcal{U}$ à coefficients dans $\mathcal{F}$, pour tout ouvert U de X on note $f|_U := \tilde{f}$ où $\tilde{f}_{\alpha_0\ldots\alpha_q} = f_{\alpha_0\ldots\alpha_q}|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}\cap U}$. Nous pouvons alors définir de trois façons différentes le support de f :

- $\Sigma_1(f)$ est par définition le plus petit fermé de F de X tel que $f|_{X\setminus F} = 0$;
- $\Sigma_2(f) := \overline{\bigcup_{f_{\alpha_0\ldots\alpha_q}\neq 0} U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}}$;
- $\Sigma_3(f) := \overline{\bigcup_{f_{\alpha_0\ldots\alpha_q}\neq 0} U_{\alpha_0} \cup \cdots \cup U_{\alpha_q}}$.

Il est clair que :

(i) $\Sigma_1(f) \subset \Sigma_2(f) \subset \Sigma_3(f)$.

(ii) Si δ désigne la différentielle de Čech alors $\Sigma_j(\delta f) \subset \Sigma_j(f)$ pour $j = 1, 2, 3$.

(iii) Si $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$ alors $\Sigma_j(\sigma^* f) \subset \Sigma_j(f)$ pour $j = 1, 2, 3$, où $\sigma^* : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ désigne la restriction simpliciale.

(iv) Si U est ouvert dans X et $\Sigma_1(f) \subset U$ alors il existe un raffinement $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\Sigma_3(\sigma^* f) \subset U$. (Pour montrer (iv) il suffit de prendre un ouvert V tel que $\partial_1(f) \subset V$ et $\overline{V} \subset U$ et ensuite un raffinement (V_λ) de $\mathcal{U}$ tel que $V_\lambda \cap \Sigma_1(f) \neq \emptyset$ implique $V_\lambda \subset V$.) Maintenant définissons

$$\begin{aligned} C^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \{ f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid \Sigma_1(f) \in \Psi \} \\ H^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \frac{\operatorname{Ker}(\delta : C^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}{\operatorname{Im}(\delta : C^{q-1}_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}))} \\ H^q_\Psi(X, \mathcal{F}) &:= \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

la limite étant prise sur tous les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X. La propriété (iv) ci-dessus montre que $H^q_\Psi(X, \mathcal{F})$ serait le même si $C^q_\Psi(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ était défini à l'aide de Σ_1 ou Σ_2 à la place de Σ_3. Remarquons que la définition de GODEMENT dans [11] se fait à l'aide de Σ_1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France*, t. **90**, 1962, p. 193–259.

[2] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.). — La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, t. **21**, 1967, p. 31–82.

[3] BARLET (D.). — Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie, [Séminaire F. NORGUET], *Lecture Notes in Math.*, t. **482**, 1975, p. 1–158.

[4] BARLET (D.). — Familles analytiques de cycles et classes fondamentales relatives, [Séminaire F. NORGUET], *Lecture Notes in Math.*, t. **807**, 1980, p. 1–24.

[5] BARLET (D.). — Convexité au voisinage d'un cycle, [Séminaire F. NORGUET], *Lecture Notes in Math.*, t. **807**, 1980, p. 102–121.

[6] BARLET (D.). — Convexité de l'espace des cycles, *Bull. Soc. Math. France*, t. **106**, 1978, p. 373–397.
[7] BINGENER (J.). — Deformations of Kähler spaces *I*, *Math. Z.*, t. **182**, 1983, p. 505–535.
[8] BREDON (G.). — *Sheaf Theory*. — New York, McGraw-Hill, 1967.
[9] FISCHER (G.). — Complex-Analytic Geometry, *Lecture Notes in Math.*, t. **538**, 1976, p. 1–201.
[10] FUJIKI (A.). — Closedness of the Douady space of compact Kähler spaces, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, t. **14**, 1978, p. 1–52.
[11] GODEMENT (R.). — *Théorie des faisceaux*. — Paris, Hermann, 1958.
[12] GRAUERT (H.). — Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **5**, 1960, p. 1–64.
[13] LELONG (P.). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, t. **85**, 1957, p. 239–262.
[14] REIFFEN (H.-J.). — Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger, *Math. Ann.*, t. **164**, 1966, p. 272–279.
[15] VAROUCHAS (J.). — Kähler spaces and proper open morphisms, *à paraître dans Math. Ann.*.