BULLETIN DE LA S. M. F.

CHANTAL TRAN-OBERLÉ

Analyse non linéaire de l'opérateur défini par l'intégrale de Cauchy

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 1 (1989), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 1–18.

ANALYSE NON LINÉAIRE DE L'OPÉRATEUR DÉFINI PAR L'INTÉGRALE DE CAUCHY

PAR

CHANTAL TRAN-OBERLÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous considérons une réalisation $\mathcal{C}(a)$ de l'opérateur de Cauchy associé au graphe Γ_a d'une fonction A de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, où $A' = a$, et nous étudions l'analyticité de $\mathcal{C}(a)$ comme fonction de a.

Nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les opérateurs multilinéaires du développement en série au voisinage de 0 soient bornés sur $L^2(\mathbf{R})$.

ABSTRACT. — We consider a version $\mathcal{C}(a)$ of the Cauchy integral along the graph Γ_a of the real-valued function A on $\mathbf{R}$, where $A' = a$, and we study the analyticity of $\mathcal{C}(a)$ viewed as an operator valued functional in a.

We prove necessary and sufficient conditions of boundedness in $L^2(\mathbf{R})$ of the multilinear operators of the Taylor expansion.

Introduction

Nous nous proposons d'étudier la dépendance non-linéaire d'une des réalisations de l'opérateur de Cauchy par rapport au graphe de la courbe correspondante.

Pour être plus précis, considérons tout d'abord une fonctionnelle $F : B_1 \to B_2$, où B_1 et B_2 sont deux espaces de Banach et où, sans perdre de généralité, on peut supposer F définie au voisinage de l'origine dans B_1.

Rappelons que F est analytique réelle au voisinage de 0 si on peut la développer, au voisinage de 0, en série

$$F(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Lambda_k(f)$$

où $\Lambda_k(f)$ est un polynôme homogène de degré k en f ; ceci signifie qu'il existe une application multilinéaire $\Lambda_k(f_1, \cdots, f_k) : B_1 \times \cdots \times B_1 \to B_2$

(*) Texte reçu le 2 avril 1987, révisé le 21 octobre 1988.
Chantal TRAN-OBERLÉ, Université Paris-Dauphine, CEREMADE, Place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

© Société mathématique de France

telle que $\Lambda_k(f) = \Lambda_k(f, \dots, f)$ et

$$\|\Lambda_k(f_1, \dots, f_k)\|_{B_2} \leq C^k \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_{B_1}$$

pour une constante C.

Dans ce cas, F peut être prolongée à un voisinage de 0 dans B_1^c (le complexifié de B_1) et le prolongement est holomorphe de B_1^c dans B_2^c (c'est-à-dire : quels que soient f et g dans un voisinage de 0 dans B_1^c, $F(f + zg)$ est une fonction holomorphe de la variable $z \in \mathbb{C}$ pour $|z| < 1$).

Dans les exemples naturels (équations aux dérivées partielles ou analyse complexe), B_2 est donné ainsi que la restriction de F à un espace quelquefois artificiel V. Les données initiales et la solution cherchée correspondent à B_2, tandis que V représente l'espace fonctionnel des coefficients ou de la géométrie (F représente donc l'algorithme qui donne la solution).

Le problème que l'on cherche à résoudre est celui du domaine naturel B_1 d'existence de la fonctionnelle F, c'est-à-dire du plus grand espace de Banach (contenant V comme un sous-espace dense) sur lequel F reste holomorphe. Dans la pratique, cela revient à affaiblir le plus possible les hypothèses de régularité que l'on est amené à faire sur les coefficients.

Un exemple historique de ce programme a été proposé par A. P. CALDERON dans les années 1960. Il considérait le noyau singulier

$$\text{v.p.} \frac{1}{x - y + i\big[A(x) - A(y)\big]} = \sum_{k=0}^{\infty} \text{v.p.} \frac{(-i)^k \big[A(x) - A(y)\big]^k}{(x - y)^{k+1}}.$$

Dans l'exemple de CALDERON, ainsi que dans ce qui suit, $B_2 = L(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ est l'algèbre des opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R})$.

La condition $A' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est nécessaire pour que le terme linéaire du développement soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$. CALDERON démontre en 1965 que cette condition est suffisante, puis en 1977, que $B_1 = L^\infty(\mathbb{R})$ est l'espace d'holomorphie du problème.

Une autre réalisation de l'opérateur de Cauchy, qui est celle que nous allons étudier, a été proposée en septembre 1984 par R. R. COIFMAN, lors d'un cours donné à Pékin. Il s'agit de l'opérateur $\mathcal{C}(a)$ (associé au graphe Γ_a d'une fonction $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $A' = a$) défini par le noyau

$$C(x, y) = \frac{1 + ia(y)}{x - y + i\big[A(x) - A(y)\big]} = \frac{z'(y)}{z(x) - z(y)}.$$

Ce noyau définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ dès que a appartient à BMO($\mathbb{R}$), l'espace de JOHN et NIRENBERG [7].

Nous allons montrer au paragraphe 3 que la condition $a \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ est nécessaire et suffisante pour que $\Lambda_1(a)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$. Mais ici, le terme linéaire du développement ne suffit pas pour donner l'espace d'holomorphie. En effet, le théorème principal, que nous démontrerons au paragraphe 4, établit la caractérisation suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les opérateurs $\Lambda_k(a)$, $0 \leq k \leq n$, sont tous bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si les fonctions a^k, pour $0 \leq k \leq n$, appartiennent toutes à* BMO($\mathbb{R}$).

Indiquons que l'on sait montrer ce fait encore plus surprenant : un espace (comme celui décrit dans [6] par exemple) peut assurer la continuité sur $L^2(\mathbb{R})$ de tous les opérateurs $\Lambda_k(a)$, sans être un espace d'holomorphie (voir [7]).

Notons $m_{[x,y]}a$ la moyenne de la fonction a sur l'intervalle $[x,y]$. Le noyau définissant $\Lambda_k(a)$ est, au produit par une constante près,

$$\left[\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right]^{k-1}\left[\frac{A(x)-A(y)-(x-y)a(y)}{(x-y)^2}\right] = -\frac{1}{x-y}\Big(m_{[x,y]}a\Big)^{k-1}\big(a(y)-m_{[x,y]}a\big)$$

si $k \geq 1$. ($\Lambda_0(a)$ est simplement la transformation de Hilbert.)

La démonstration du THÉORÈME 1 se fera par récurrence et nous serons amenés à introduire des noyaux auxiliaires que nous étudierons grâce au théorème T(1) de DAVID et JOURNÉ [4] et à des inégalités "aux bons λ" de BURKHOLDER et GUNDY.

Auparavant, nous allons donner quelques résultats préliminaires : sur les fonctions de BMO($\mathbb{R}$) au paragraphe 1 et sur des opérateurs maximaux au paragraphe 2.

1. Quelques estimations sur les fonctions de BMO($\mathbb{R}$)

Nous utiliserons généralement la norme suivante sur BMO($\mathbb{R}$) :

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I \big|b(t)-m_I b\big|\,dt\right\}$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle borné I et $m_I b$ la moyenne de b sur I. Parfois, nous ferons appel aux normes équivalentes

$$\|b\|_{\mathrm{BMO},p} = \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I \big|b(t)-m_I b\big|^p\,dt\right\}^{1/p} \quad \text{où} \quad p \geq 1.$$

La PROPOSITION 1 rappelle quelques estimations de base.

PROPOSITION 1. — *Soit* $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ *avec* $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. *Soient* x, x', y *des réels tels que* $|x - x'| \leq \ell$ *et* $|x - y| \geq 2\ell$ *pour un réel* $\ell > 0$. *Alors on a :*

$$(1) \qquad \left|m_{[x,y]}b - m_{[x',y]}b\right| \leq C \left|\frac{x-x'}{x-y}\right| \log \frac{|x-y|}{\ell} \leq C' \left|\frac{x-x'}{x-y}\right|^{1/2}$$

$$(2) \qquad \left|\frac{x-x'}{x-y}\right| m_{[x,x']}\left|b - m_{[x,y]}b\right|^k \leq C_k \left|\frac{x-x'}{x-y}\right|^{1/2}, \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$(3) \qquad m_{[x',y]}\left|b - m_{[x,y]}b\right|^k \leq C_k\,, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La démonstration utilise la remarque suivante :

LEMME 1. — *Soit* $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ *avec* $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. *Si* I_1 *et* I_2 *sont deux intervalles tels que* $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ *et* $2^{N-1}|I_1| \leq |I_2| \leq 2^N|I_1|$ *pour un entier* $N \geq 1$, *alors* $|m_{I_1}b - m_{I_2}b| \leq 6N$.

On vérifie d'abord ce lemme pour $N = 1$ en remarquant que I_1 et I_2 sont contenus dans un intervalle I de longueur $3|I_1|$ et en remplaçant b par $b - m_I b$. Le cas général en découle immédiatement.

L'assertion (1) découle du LEMME 1 en posant $I_1 = [x - \ell, x + \ell]$ et $I_2 = [x, y]$. En effet, en remplaçant b par $b - m_{I_1}b$ dans le membre de gauche de (1), on a :

$$\begin{aligned}
&\left|m_{[x,y]}b - m_{[x',y]}b\right| \\
&\quad \leq \left|\frac{x-x'}{x'-y}\right| \left|m_{I_1}b - m_{I_2}b\right| + \frac{1}{|x'-y|}\left|\int_{[x,x']} \big(b(t) - m_{I_1}b\big)\,dt\right| \\
&\quad \leq C \left|\frac{x-x'}{x-y}\right| \log \frac{|x-y|}{\ell} + C \left|\frac{x-y}{x-y}\right|.
\end{aligned}$$

Pour obtenir (2), on remplace tout d'abord b par $(b - m_{[x,x']}b)$ dans $(b - m_{I_2}b)^k$; en développant, on a

$$\left|b - m_{I_2}b\right|^k \leq C_k \sum_{\ell=0}^{k} \left|b - m_{[x,x']}b\right|^\ell \left|m_{[x,x']}b - m_{I_2}b\right|^{k-\ell};$$

puis on prend la moyenne des deux membres de cette inégalité sur $[x, x']$ et on applique le LEMME 1 avec les intervalles $[x, x']$ et I_2.

On procède de la même façon pour (3) en remplaçant b par $b - m_{[x',y]}b$ et en utilisant (1).

Indiquons immédiatement une conséquence de la PROPOSITION 1 qui nous servira plusieurs fois.

PROPOSITION 2. — *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u_1, \dots, u_n$ *des éléments de* BMO($\mathbb{R}$) *de norme* 1. *Posons*

$$M_n(x,y) = m_{[x,y]} \prod_{i=1}^{n} \big(u_i - m_{[x,y]} u_i\big).$$

Alors, quels que soient les réels x, x', y *vérifiant* $|x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ *et* $x \neq y$ *on a :*

$$\left| M_n(x,y) - M_n(x',y) \right| \leq C_n \left| \frac{x - x'}{x - y} \right|^{1/2}. \tag{4}$$

Il suffit de vérifier que les quantités

$$A = \left| M_n(x,y) - m_{[x',y]} \prod_{i=1}^{n} (u_i - m_{[x,y]} u_i) \right|,$$

et

$$B = \left| M_n(x',y) - m_{[x',y]} \prod_{i=1}^{n} (u_i - m_{[x,y]} u_i) \right|$$

sont majorées par $C_n(|x - x'|/|x - y|)^{1/2}$. Pour A, on remarque que :

$$A \leq \frac{|x - x'|}{|x' - y||x - y|} \int_{[x,y]} \prod_{i=1}^{n} \left| u_i(t) - m_{[x,y]} u_i \right| dt + \frac{1}{|x' - y|} \int_{[x,x']} \prod_{i=1}^{n} \left| u_i(t) - m_{[x,y]} u_i \right| dt$$

et on conclut grâce à (2) et à l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO},n}$ ainsi que $\|\cdot\|_{BMO,1}$ après avoir appliqué l'inégalité de Hölder. Pour B, on écrit :

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} \left| m_{[x,y]} u_i - m_{[x',y]} u_i \right| \times m_{[x',y]} \left\{ \left| \prod_{j=1}^{i-1} |u_j - m_{[x,y]} u_j| \right| \times \left| \prod_{j=i+1}^{n} |u_j - m_{[x',y]} u_j| \right| \right\}$$

et on conclut avec (1) et (3).

2. Résultats préliminaires sur des opérateurs maximaux

PROPOSITION 3. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $r \geq 1$, il existe une constante C_M telle que pour toutes fonctions $u_1, \ldots, u_n, f$ bornées et à support compact, on ait :*

$$\|\mathcal{K}^*(u_1, \ldots, u_n, f)\|_r \leq C_M \Big\| \Big(\prod_{i=1}^n u_i^*\Big) f^* \Big\|_r \tag{5}$$

avec

$$\mathcal{K}^*(u_1, \ldots, u_n, f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \Big| \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{x-y} \Big(\prod_{i=1}^n m_{[x,y]} u_i\Big) f(y)\, dy \Big|.$$

La constante C_M dépend de n et r.

On a noté g^* la fonction maximale de Hardy–Littlewood de g.

Remarque 1. — Soient $p > n$ et $q > 1$ avec $(n/p) + (1/q) = 1$. Alors la PROPOSITION 3 est vraie pour $u_1, \ldots, u_n$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et f dans $L^q(\mathbb{R})$. En effet, ce passage se fait de manière classique, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ et le lemme de Fatou. En particulier, la PROPOSITION 3 entraîne que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1, \ldots, u_n, f)(x) > \lambda\Big\}\Big| \leq \frac{C_M}{\lambda} \Big(\prod_{i=1}^n \|u_i\|_p\Big) \|f\|_q. \tag{6}$$

Nous utiliserons cette inégalité de type faible dans la démonstration de la PROPOSITION 4.

Remarque 2. — Le noyau $K(x,y) = (1/x-y) \prod_{i=1}^n m_{[x,y]} u_i$ est un noyau de Calderon–Zygmund lorsque les u_i appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R})$ et sa norme de Calderon–Zygmund est majorée par $C_n \prod_{i=1}^n \|u_i\|_\infty$. Dès lors, la limite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x,y) f(y)\, dy$$

existe pour presque tout x et nous la noterons $(u_1, \ldots, u_n, f)(x)$. De plus, $\mathcal{K}(u_1, \ldots, u_m)$ envoie L^1 dans L^1-faible; précisément : pour tout $\lambda > 0$,

$$\Big|\Big\{x\,;\ |\mathcal{K}(u_1, \ldots, u_n, f)|(x) > \lambda\Big\}\Big| \leq \frac{C_n}{\lambda} \Big(\prod_{i=1}^n \|u_i\|_\infty\Big) \|f\|_1. \tag{7}$$

La démonstration qui suit reprend celle de R. R. COIFMAN et Y. MEYER dans [1] où la proposition a été établie dans le cas $n = 2$.

Pour $0 \leq i \leq n$, appelons (P_i) la propriété :

$$\text{Pour tout } \lambda > 0, \quad \Big|\Big\{x\,;\ \big|\mathcal{K}(u_1,\dots,u_n,f)\big|(x) > \lambda\Big\}\Big| \leq C_n\Big\{\frac{1}{\lambda}\Big(\prod_{j=1}^{i}\|u_j\|_1\Big)\Big(\prod_{k=i+1}^{n}\|u_k\|_\infty\Big)\|f\|_1\Big\}^{\frac{1}{i+1}}.$$

LEMME 2. — *La propriété (P_n) est vérifiée.*

Observons que (P_0) est vérifiée : c'est la propriété 7. On va démontrer l'implication $(P_{i-1}) \Rightarrow (P_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, en faisant une décomposition de Calderon–Zygmund de u_i au niveau $\lambda^{1/(i+1)}$. De manière précise, on peut d'abord se ramener au cas où $\|u_j\|_1 = \|u_k\|_\infty = \|f\|_1 = 1$ pour tout $j = 1,\dots,i$ et $k = i+1,\dots,n$. Puis on décompose

$$u_i = b_i + \sum_{j=1}^{\infty} m_{i,j}\,, \quad \text{avec} \quad \|b_i\|_\infty \leq \lambda^{1/(i+1)},$$

les $m_{i,j}$ étant de moyenne nulle, à support dans $I_{i,j}$ (les $I_{i,j}$ sont disjoints) et $\sum_{j=1}^{\infty}|I_{i,j}| \leq C\lambda^{-1/(i+1)}$, avec $(1/|I_{i,j}|)\int_{I_{i,j}}|m_{i,j}(t)|\,dt \leq C\lambda^{1/(i+1)}$.

Ainsi, l'hypothèse (P_{i-1}) entraîne

$$\Big|\Big\{x\,;\ \big|\mathcal{K}(u_1,\dots,u_{i-1},b_i,u_{i+1},\dots,u_n,f)(x)\big| > \lambda\Big\}\Big| \leq C_n\lambda^{-1/(i+1)}. \tag{8}$$

D'autre part, en appelant $M_{i,j}$ une primitive convenable de $m_{i,j}$, on est assuré que $M_{i,j}(x) = 0$ si $x \notin I_{i,j}$ et $|M_{i,j}(y)| \leq C\lambda^{1/(i+1)}|I_{i,j}|$ si $y \in I_{i,j}$. Donc, pour x n'appartenant pas à $2I_{i,j}$, on a :

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{K}\big(u_1,\dots,u_{i-1},m_{i,j},u_{i+1},\dots,u_n,f\big)(x)\Big| &= \Big|-\int_{I_{i,j}}\frac{M_{i,j}(y)}{(x-y)^2}\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} m_{[x,y]}u_k\Big)f(y)\,dy\Big| \\ &\leq C\lambda^{1/i+1}\Delta_{i,j}(x)\prod_{k=1}^{i-1}u_k^*(x)\end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$\Delta_{i,j}(x) = \frac{|I_{i,j}|}{(x-y_{i,j})^2 + |I_{i,j}|^2}\int_{I_{i,j}}|f(y)|\,dy,$$

($y_{i,j}$ désigne le centre de $I_{i,j}$).

Comme $\|\sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{i,j}\|_1 \leq C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{I_{i,j}}|f(y)|\,dy \leq C\|f\|_1$ et que $u_1^*,\dots,u_{i-1}^*$ sont dans L^1-faible, on obtient en sommant (9) :

$$(10)\quad \Big|\Big\{x\,;\ \big|\mathcal{K}(u_1,\dots,u_{i-1},\sum_{j=1}^{\infty}m_{i,j},u_{i+1},\dots,u_n,f)\big|(x)>\lambda\Big\}\Big|$$
$$\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}|I_{i,j}|+\Big|\Big\{x\,;\ \sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{i,j}(x)>\lambda^{1/i+1}\Big\}\Big|$$
$$+\sum_{k=1}^{i-1}\Big|\Big\{x\,;\ u_k^*(x)>\lambda^{1/i+1}\Big\}\Big|$$
$$\leq C\lambda^{-1/i+1}.$$

Le LEMME 2 découle alors de (8) et (10).

La fin de la démonstration de la PROPOSITION 3 se déroule maintenant comme dans [1]. On vérifie immédiatement (comme dans le LEMME (4.1) p. 327) que

$$(11)\qquad \Big|\int_{|y-x_1|<\varepsilon}[K(x,y)-K(x_1,y)]\,f(y)\,dy\Big|\leq C_n f^*(x_2)\prod_{i=1}^{n}u_i^*(x_2)$$

si $|x-x_1|<\frac{1}{4}\varepsilon$ et $|x-x_2|<\frac{1}{4}\varepsilon$ pour un $\varepsilon>0$.

La même démonstration que celle du lemme (4.2) de [1] montre alors que l'opérateur maximal $\mathcal{K}^*(u_1,\dots,u_n)$ vérifie (P_n), c'est-à-dire : pour tout $\lambda>0$,

$$(12)\qquad \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\dots,u_n,f)(x)>\lambda\Big\}\Big|\leq C_n\Big\{\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_1\Big\}^{1/n+1}.$$

Enfin, la PROPOSITION 3 découle d'une inégalité "aux bons λ" comme celle du lemme (4.5) de [1] et qui s'énonce : il existe $\gamma_0>0$ et $C_n>0$ tels que

$$(13)\quad \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\dots,u_n,f)(x)>2\lambda,\ f^*(x)\prod_{i=1}^{n}u_i(x)\leq\gamma\lambda\Big\}\Big|$$
$$\leq C_n\gamma^{1/n+1}\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\dots,u_n,f)(x)>\lambda\Big\}\Big|$$

pour tout $\lambda>0$ et tout $\gamma\in\,]0,\gamma_0[$.

Pour la démonstration des inégalités (11), (12) et (13), nous renvoyons le lecteur à [1].

3. Le terme linéaire du développement

Dans la proposition suivante, on s'intéresse à des noyaux plus généraux que celui de $\Delta_1(a)$. Ces noyaux nous serviront dans la démonstration du THÉORÈME 1.

PROPOSITION 4. — *Soient $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p$ des éléments de* BMO($\mathbb{R}$), *$(n, p \in \mathbb{N}^*)$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers naturels. On pose*

$$L(x,y) = \frac{1}{x-y}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\big(u_i(y) - m_{[x,y]}u_i\big)\Big\}\prod_{j=1}^{p} m_{[x,y]}\big(v_j - m_{[x,y]}v_j\big)^{\alpha_j}.$$

Alors, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, la limite suivante existe pour presque tout x de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,y)f(y)\,dy.$$

En appelant $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_m\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \dots\,;\ v_p^{(\alpha_p)}\,;\ f)(x)$ cette limite, on a :

$$\big\|\mathcal{L}\big(u_1, \dots, u_m\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \dots\,;\ v_p^{(\alpha_p)}\big)\big\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \le C_M\Big(\prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_{\mathrm{BMO}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{p}\|v_j\|_{\mathrm{BMO}}^{\alpha_j}\Big).$$

La constante C_M dépend de n, p, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Ce résultat a été montré par R. R. COIFMAN et Y. MEYER [2] dans le cas $n = 2$, $p = 1$ et $\alpha_1 = 0$. Nous suivrons leur méthode de démonstration, pour obtenir la proposition dans le cas général.

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\begin{aligned}
L_0(x,y) &= \prod_{j=1}^{p} m_{[x,y]}(v_j - m_{[x,y]}v_j)^{\alpha_j},\\
L_i(x,y) &= u_i(y) - m_{[x,y]}u_i \qquad (i = 1, \dots, n),\\
\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x) &= \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,y)f(y)\,dy, \quad \mathcal{L}^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0}\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x)\big|,\\
\mathcal{L}(f)(x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Quitte à multiplier chaque u_i et v_j par une constante, on peut supposer que $\|u_i\|_{\mathrm{BMO}} = \|v_j\|_{\mathrm{BMO}} = 1$ pour tous les indices i, j.

La démonstration va se dérouler en deux parties :

(i) $\|\mathcal{L}^*(f)\|_2 \leq C_M \|f\|_2$;

(ii) la limite au second membre de (14) existe pour presque tout x.

(i) *Première partie.* Fixons $q \in]1,2[$ et posons $M_q f = \{(|f|^q)^*\}^{1/q}$. Comme $\|M_q f\|_2 \leq C\|f\|_2$ (puisque $q < 2$), il suffit de montrer que

$$\|\mathcal{L}^*(f)\|_2 \leq C_M \|M_q f\|_2 \tag{15}$$

pour f dans un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$, par exemple f bornée à support compact. Le lemme suivant précise la régularité du noyau $L(x,y)$.

LEMME 3. — *Soient x, y, ξ, ℓ des réels tels que $\ell > 0$, $|x-\xi| \leq \ell$ et $|y-\xi| \geq 2\ell$. Alors*

$$\begin{aligned}\big|L(x,y) - L(\xi,y)\big| &\leq C_M \frac{\ell^{1/2}}{|y-\xi|^{3/2}} \prod_{i=1}^{n} \big|L_i(\xi,y)\big| \\ &+ \sum_{\substack{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n \\ \delta = n-(\delta_1+\cdots+\delta_n)\geq 1}} C_M \frac{\ell^{\delta}}{|y-\xi|^{\delta+1}} \Big(\log \frac{|y-\xi|}{\ell}\Big)^{\delta} \prod_{i=1}^{n} \Big|L_i(\xi,y)\Big|^{\delta_i}.\end{aligned}$$

Compte tenu des inégalités (1) et (4), on peut majorer la différence $|L_i(x,y) - L_i(\xi,y)|$ par $(C\ell/|y-\xi|)\log(|y-\xi|/\ell)$ si $i \neq 0$ et par $C_M(\ell/|y-\xi|)^{1/2}$ si $i = 0$. Il suffit ensuite d'écrire :

$$\begin{aligned}\big|L(x,y) - L(\xi,y)\big| &\leq \left|\frac{x-\xi}{x-y}\right| \big|L(\xi,y)\big| \\ &+ \frac{1}{|x-y|} \sum_{i=0}^{n} \left\{ \Big[\prod_{j=0}^{i-1} \big|L_j(\xi,y)\big|\Big] \big|L_j(x,y) - L_j(\xi,y)\big| \Big[\prod_{j=i+1}^{n} \big|L_j(x,y)\big|\Big] \right\}\end{aligned}$$

avec $|L_j(x,y)| \leq |L_j(x,y) - L_j(\xi,y)| + |L_j(\xi,y)|$, pour obtenir l'estimation du LEMME 3.

LEMME 4. — *Soient $I =]a, a+\ell[$ un intervalle de longueur ℓ et $J =]a-3\ell, a+3\ell[$. Pour toute fonction g bornée à support compact et identiquement nulle sur J, on a :*

$$\forall \xi \in I,\ \forall \varepsilon > 0, \quad \Big|\int_{(\varepsilon/2)\leq|y-\xi|\leq\varepsilon} L(\xi,y) g(y)\, dy\Big| \leq C_M M_q g(\xi)\,; \tag{16}$$

$$\forall x \in I,\ \forall \xi \in I, \quad \big|\mathcal{L}(g)(x) - \mathcal{L}(g)(\xi)\big| \leq C_M M_q g(\xi). \tag{17}$$

Remarquons d'abord que, quels que soient les réels ξ, $p > 1$ et $\varepsilon > 0$,

$$(18)\qquad \Big(\int_{\varepsilon/2\le|y-\xi|\le\varepsilon} \big|L_i(\xi,y)\big|^p\,dy\Big)^{1/p} \le 5\|u_i\|_{\mathrm{BMO},p}(2\varepsilon)^{1/p},\quad (i\ge 1).$$

Cette majoration est évidente et (16) en découle directement.

Par ailleurs, le LEMME 3 montre que $|\mathcal{L}(g)(x)-\mathcal{L}(g)(\xi)|$ est majoré par une somme de termes du type

$$C_M\,\ell^{1/2}\int_{J^c}|g(y)|\Big(\prod_{i=1}^n|L_i(\xi,y)|\Big)\frac{dy}{|y-\xi|^{3/2}}$$

et du type

$$(19)\qquad C_M\,\ell^{\delta}\int_{J^c}|g(y)|\Big(\log\frac{|y-\xi|}{\ell}\Big)^{\delta}\Big(\prod_{i=1}^n|L_i(\xi,y)|^{\delta_i}\Big)\frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}},$$

avec $\delta_i\in\{0,1\}$ et $\delta = n-(\delta_1+\cdots+\delta_n)\ge 1$.

Chacun de ces termes est majoré par $C_M M_q g(\xi)$: nous allons le vérifier pour les termes du deuxième type (ceux du premier type se traitant de manière similaire). Pour cela, on découpe $\{y\,;\ |y-\xi|\ge 2\ell\}$ en couronnes Γ_j $(j\ge 1)$ où $\Gamma_j=\{y\,;\ 2^j\ell\le|y-\xi|\le 2^{j+1}\ell\}$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder avec $(n/p)+(1/q)=1$, et en utilisant la remarque (18), on peut majorer l'expression (19) par

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} C_M\ell^{\delta}\left\{\int_{\Gamma_j}\Big(\log\frac{|y-\xi|}{\ell}\Big)^p\frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\right\}^{\delta/p}\\
&\qquad\times\left\{\prod_{i=1}^n\Big(\int_{\Gamma_j}|L_i(\xi,y)|^p\frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\Big)^{\delta_i/p}\right\}\left\{\int_{\Gamma_j}|g(y)|^q\frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\right\}^{1/q}\\
&\qquad\le\sum_{j=1}^{\infty}C_M\ell^{\delta}\Big(\int_2^{+\infty}\log|u|\frac{du}{u^{\delta+1}}\Big)^{\delta/p}\frac{1}{(2^j\ell)^{\delta}}M_q g(\xi)\\
&\qquad\le C_M M_q g(\xi).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du LEMME 4.

L'inégalité (15) est une conséquence de l'inégalité "aux bons λ" que voici.

LEMME 5. — *Il existe un réel $\gamma_0>0$ et une constante $C_M>0$ tels que, pour tout $\lambda>0$ et tout $\gamma\in\,]0,\gamma_0[$, on ait :*

$$\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x)>2\lambda,\ M_q f(x)\le\gamma\lambda\Big\}\Big|\le C_M\gamma\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x)>\lambda\Big\}\Big|.$$

Comme $\Omega = \{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > \lambda\}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, on peut l'écrire $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$ où les $I_k =]a_k, a_k + \ell_k[$ sont des intervalles disjoints.

Notons

$$J_k =]a_k - 3\ell_k, a_k + 3\ell_k[,$$
$$E = \{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > 2\lambda,\ \ M_1 f(x) \le \gamma\lambda\},$$

et vérifions que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$|E \cap I_k| \le C\gamma |I_k|. \tag{20}$$

Si $E \cap I_k = \emptyset$, la majoration (20) est évidente; sinon, il existe $\xi \in E \cap I_k$. On décompose alors :

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{avec} \quad f_1 = f\mathbf{1}_{J_k}.$$

Occupons-nous d'abord de f_2. Pour tout x de I_k et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) - \mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(\xi)\big| \le C_M M_q f(\xi) \le C_M \gamma\lambda. \tag{21}$$

En effet, si $0 < \varepsilon \le 2\ell_k$, c'est immédiat à l'aide de (17) car $\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) = \mathcal{L}(f_2)(x)$. Si $\varepsilon > 2\ell_k$, on pose $\chi(y) = \mathbf{1}_{|y-x|\ge\varepsilon}$, $\chi'(y) = \mathbf{1}_{|y-\xi|\ge\varepsilon}$ et $\chi_1 = \chi - \chi'$. Il suffit alors de remarquer que

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) - \mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(\xi)\big| &= \big|\mathcal{L}(\chi f_2)(x) - \mathcal{L}(\chi' f_2)(\xi)\big| \\ &\le \big|\mathcal{L}(\chi f_2)(x) - \mathcal{L}(\chi f_2)(\xi)\big| + \big|\mathcal{L}(\chi_1 f_2)(\xi)\big|,\end{aligned}$$

et d'appliquer (17) avec $g = \chi f_2$ et (16) avec $g = \chi_1 f_2$.

De (21) on déduit que, pour tout x de $E \cap I_k$, on a successivement :

$$\big|\mathcal{L}^*(f_2)(x) - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k)\big| \le C_M M_q f(\xi), \quad \text{puis}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(f_1)(x) &\ge \mathcal{L}^*(f)(x) - \big[\mathcal{L}^*(f_2)(x) - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k)\big] - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k) \\ &> \lambda - C_M\gamma\lambda.\end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration de (20), il suffit donc de vérifier que :

$$\Big|\{x \in I_k\,;\ \mathcal{L}^*(f_1)(x) > \lambda\}\Big| \le \frac{C_M}{\lambda}|I_k|\, M_q f(\xi). \tag{22}$$

Remarquons que si x et y appartiennent à J_k, $L(x,y)$ ne change pas si on remplace les u_i, v_j par les $\tilde{u}_i = (u_i - m_{J_k} u_i)\mathbf{1}_{J_k}$, $\tilde{v}_j = (v_j - m_{J_k} v_j)\mathbf{1}_{J_k}$. Ainsi, en développant $L(x,y)$, on a, pour $x \in I_k$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(f_1)(x) \le C_M \sum_{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n} \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_p=0}^{\alpha_p} \\ \Big(\tilde{u}_1^{\delta_1}, \dots, \tilde{u}_n^{\delta_n}, \tilde{v}_1^{\gamma_1}, \dots, \tilde{v}_p^{\gamma_p}, \underbrace{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_1}_{(\alpha_1-\gamma_1)\text{ fois}}, \dots, \underbrace{\tilde{v}_p, \dots, \tilde{v}_p}_{(\alpha_p-\gamma_p)\text{ fois}}, h\Big)(x)\end{aligned}$$

avec $h = \tilde{u}_1^{1-\delta_1} \cdots \tilde{u}_n^{1-\delta_n} f_1$.

En introduisant p' tel que $1/q + (1/p')\{n + \sum_{j=1}^{p}(\alpha_j - \gamma_j + 1)\} = 1$, l'estimation (6) fournit alors :

$$\begin{aligned}\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(\tilde{u}_1^{\delta_1},\dots,\tilde{u}_n^{\delta_n},\tilde{v}_1^{\gamma_1},\dots,\tilde{v}_p^{\gamma_p},\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_p,\dots,\tilde{v}_p,h)(x) > \lambda\Big\}\Big| \\ \leq \frac{C_M}{\lambda}\Big(\prod_{i=1}^{n}\|\tilde{u}_i\|_{p'}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{p}\|\tilde{v}_j\|_{p'}^{\alpha_j-\gamma_j}\|\tilde{v}_j^{\gamma_j}\|_p\Big)\|f_1\|_q \\ \leq \frac{C_M}{\lambda}|I_k|M_q f(\xi). \qquad (23)\end{aligned}$$

L'inégalité (23) entraîne (22) et termine la démonstration de (20) et (15).

(ii) *Deuxième partie.* Pour montrer que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x)$ existe pour presque tout x, il suffit, compte tenu de (i), de le faire pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Remplaçons les u_i, v_j par les $\tilde{u}_i = u_i\mathbf{1}_I$, $\tilde{v}_j = v_j\mathbf{1}_I$ (I est un intervalle contenant x et le support de f) qui appartiennent à tout $L^r(\mathbb{R})$, $(r \geq 1)$. En développant $L(x,y)$, on est alors ramené à voir que :

LEMME 6. — *Quelles que soient les fonctions $a_1,\dots,a_n$ $(n \geq 1)$ de $L^{2n}(\mathbb{R})$, et g de $L^2(\mathbb{R})$, la limite*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g(y)\frac{dy}{x-y}$$

existe pour presque tout x.

Il suffit de faire la vérification pour $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (puisque $\mathcal{K}^*(a_1,\dots,a_n)$ envoie L^2 dans L^1 d'après (5)). En intégrant

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)\frac{g(y)}{x-y} = \frac{g(y)}{(x-y)^{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\Big(A_i(x) - A_i(y)\Big)$$

par parties, on obtient une somme de trois termes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\Big[\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g(y)\Big]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} - \int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g'(y)\,dy \\ + \sum_{i_0=1}^{n}\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)a_{i_0}(y)g(y)\frac{dy}{x-y}\end{aligned}$$

Les deux premiers termes ont évidemment des limites presque partout ; pour le troisième, on conclut par récurrence sur n.

La preuve de la PROPOSITION 4 est maintenant complète.

Pour terminer l'étude de $\Lambda_1(a)$, il reste à voir que :

PROPOSITION 5. — *Si $\Lambda_1(a)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ alors a appartient à* BMO($\mathbb{R}$) *et* $\|\Lambda_1(a)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \geq C\|a\|_{\mathrm{BMO}}$.

Remarquons d'abord que l'opérateur $T = \Lambda_1(a) - [\Lambda_1(a)]^* \ [\Lambda_1(a)]^*$ est le transposé de $\Lambda_1(a)$) défini par le noyau $(a(x) - a(y))/(x - y)$ est également borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

On va minorer $\|Tf\|_2$ pour $f = \mathbf{1}_I$ où $I =]\alpha, \alpha + \ell[$ est un intervalle de longueur ℓ. Considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = x$ pour $x \in [1, 3]$ et posons $\varphi_\ell(x) = \ell\varphi(x/\ell)$. Le noyau $((a(x) - a(y))/(x - y)\varphi_\ell(x - y)$ définit un opérateur T_{φ_ℓ} pour lequel on minore $\|T_{\varphi_\ell} f\|_2$ sans difficulté : en posant $J =]\alpha + 2\ell, \alpha + 3\ell[$, on a $\|T_{\varphi_\ell} f\|_2 \geq \|\mathbf{1}_J T_{\varphi_\ell} f\|_2$ et

$$\|\mathbf{1}_J T_{\varphi_\ell} f\|_2 = \ell\Big(\int_J \big|a(x) - m_I a\big|^2 dx\Big)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\Big(\int_J \big|a(x) - m_J a\big|\, dx\Big)\|f\|_2.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\|T_{\varphi_\ell}\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\|\varphi_\ell\|_1 \|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\ell\|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}.$$

En effet, on a en toute généralité :

LEMME 7. — *Soient $K(x, y)$ le noyau-distribution associé à un opérateur T borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors le noyau $K(x, y)\varphi(x - y)$ est encore associé à un opérateur T_φ borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et $\|T_\varphi\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\|\hat{\varphi}\|_1 \|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}$.*

La preuve est simple. Comme $\varphi(x - y) = (1/2\pi) \int e^{i\xi x} e^{-i\xi y} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$, on peut écrire $T_\varphi f(x) = (1/2\pi) \int T_\xi f(x)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$ avec $T_\xi = M_\xi T M_\xi^{-1}$ (on appelle M_ξ l'opérateur de multiplication ponctuelle par $e^{i\xi\cdot}$) ; or T et T_ξ ont même norme L^2.

4. Démonstration du théorème 1

On va obtenir le THÉORÈME 1 comme conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction dont toutes les puissances a^k pour $1 \leq k \leq n - 1$ appartiennent à* BMO($\mathbb{R}$). *Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(A) *La fonction a^n appartient à* BMO($\mathbb{R}$).

(B) *Le noyau $(x-y)^{-1}(m_{[x,y]}a)^{n-1}(a(y)-m_{[x,y]}a)$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.*

(C) *Le noyau*

$$\frac{1}{x-y}\big(m_{[x,y]}a\big)^{n-1}\big(a(y)-m_{[x,y]}a\big)^{k}\prod_{i=0}^{p}m_{[x,y]}\big(a-m_{[x,y]}a\big)^{\ell_i},$$

où k, p, $\ell_0,\dots,\ell_p$ sont des entiers, définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

L'affirmation (C) va permettre d'établir le THÉORÈME 2 par récurrence sur n. La démonstration nous amènera à introduire des noyaux auxiliaires, en particulier ceux décrits dans la proposition suivante.

PROPOSITION 6. — *Soient $u_1,\dots,u_n$, $v_1,\dots,v_p$ des éléments de* BMO($\mathbb{R}$), *$(n,p\in\mathbb{N}^*)$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des entiers naturels. Alors le noyau*

$$M(x,y)=\frac{1}{x-y}m_{[x,y]}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\big(u_i-m_{[x,y]}u_i\big)\Big\}\prod_{j=1}^{p}m_{[x,y]}\big(v_j-m_{[x,y]}v_j\big)^{\alpha_j}$$

définit un opérateur $\mathcal{M}(u_1,\dots,u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)})$ borné sur $L^2(\mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{M}\big(u_1,\dots,u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)}\big)\big\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}&\\ \leq C_M\Big(\prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_{\mathrm{BMO}}\Big)&\Big(\prod_{j=1}^{p}\|v_j\|_{\mathrm{BMO}}^{\alpha_j}\Big)\end{aligned}$$

La constante C_M dépend de n, p, $\alpha_1,\dots,\alpha_p$.

Remarquons d'abord que le noyau $M(x,y)$ satisfait des estimations de Calderon-Zygmund. En effet :

LEMME 8.

a) $|M(x,y)|\leq C_M|x-y|^{-1}$ *si $x\neq y$;*

b) $|M(x,y)-M(x',y)|\leq C_M|x-x'|^{1/2}|x-y|^{-3/2}$ *si l'on a l'inégalité $|x-x'|\leq\frac{1}{2}|x-y|$ et $x\neq y$.*

La démonstration du LEMME 8 est évidente, compte-tenu de la PROPOSITION 2 et de l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO},p}$.

Les estimations du LEMME 8, alliées au fait que le noyau $M(x,y)$ est antisymétrique, ramènent la démonstration de la PROPOSITION 6 à la vérification

$$\mathcal{M}(\mathbf{1})\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}),\tag{24}$$

ceci grâce au théorème $T(\mathbf{1})$ de G. DAVID et J.L. JOURNÉ.

Pour cela, fixons un intervalle I (de longueur finie non nulle), et soit J l'intervalle de même centre que I et de longueur $2|I|$. En notant $\tilde{u}_i = (u_i - m_J u_i)\mathbf{1}_J$ et $\tilde{v}_j = (v_j - m_J v_j)\mathbf{1}_J$, on a :

$$\begin{aligned}(25)\qquad & \mathbf{1}_I \mathcal{M}\big(u_1, \dots, u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)}\big)(\mathbf{1}_J) \\ & \qquad = \mathbf{1}_I \mathcal{M}\big(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n\,;\ \tilde{v}_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ \tilde{v}_p^{(\alpha_p)}\big)(\mathbf{1}_J).\end{aligned}$$

En développant l'égalité (25), on obtient :

$$\mathbf{1}_I \mathcal{M}(\mathbf{1}_J) = \mathbf{1}_I \sum_{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n} \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_p=0}^{\alpha_p} \mathcal{K}_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma_1,\dots,\gamma_p)}$$

où $\mathcal{K}_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma_1,\dots,\gamma_p)}$ est égal (à une constante près) à l'action sur $\mathbf{1}_J$ de

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\Big(\tilde{u}_1^{\delta_1}\,;\ \dots\,;\ \tilde{u}_n^{\delta_n}\,;\ \tilde{u}_1^{1-\delta_1}\,;\ \dots\,;\ \tilde{u}_n^{1-\delta_n}\,;\ \underbrace{\tilde{v}_1\,;\ \dots\,;\ \tilde{v}_1}_{\gamma_1 \text{ fois}}\,; \\ \tilde{v}_1^{\alpha_1-\gamma_1}\,;\ \dots\,;\ \underbrace{\tilde{v}_p\,;\ \dots\,;\ \tilde{v}_1 p}_{\gamma_p \text{ fois}}\,;\ \tilde{v}_p^{\alpha_p-\gamma_p}\Big)\end{aligned}$$

et vérifie (grâce à la PROPOSITION 3) :

$$\|\mathcal{K}_{(\delta_1,\dots,\delta_n,\gamma_1,\dots,\gamma_p)}\|_1 \le C_M |J|.$$

Par conséquent :

$$(26)\qquad m_I\Big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_J) - m_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_J)\Big| \le \frac{2}{|I|}\Big\|\mathbf{1}_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_J)\Big\|_1 \le C_M.$$

D'autre part, en appelant x_0 le centre de I et ℓ la longueur de I, on a immédiatement avec le LEMME 8 :

$$\begin{aligned}(27)\qquad m_I\big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c}) - m_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c})\big| & \le 2m_I\big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c}) - \mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c})(x_0)\big| \\ & \le C_M \int_{|x_0-y|>2\ell,\,|x-x_0|\le\ell} \frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x_0-y|^{3/2}}\,dy \le C_M.\end{aligned}$$

De (26) et (27) on déduit (24) et la PROPOSITION 6.

Démonstration du THÉORÈME 2. — Pour simplifier, on note I à la place de $[x, y]$. On va montrer les implications $(B) \Rightarrow (A)$ et $(A) \Rightarrow (C)$. Lorsque $n = 1$, elles ont été prouvées dans les PROPOSITIONS 4, 5 et 6.

Supposons donc le théorème vrai jusqu'au rang $n-1$ et soit a une fonction telle que a^k appartient à BMO($\mathbb{R}$) pour $1 \leq k \leq n-1$.

En écrivant $a^n = [(a - m_I a) + m_I a]^n$ et $m_I a^n = m_I[(a - m_I a) + m_I a]^n$ puis en développant ces deux expressions, on obtient par soustraction

$$\frac{1}{x-y}\{a^n - m_I a^n\} = \frac{1}{x-y}\sum_{j=2}^{n} C_n^j (a - m_I a)^j (m_I a)^{n-j} \tag{28}$$

$$- \frac{1}{x-y}\sum_{j=2}^{n} C_n^j (m_I a)^{n-j} m_I (a - m_I a)^j + \frac{n}{x-y}(m_I a)^{n-1}(a - m_I a).$$

Ceci prouve que $(B) \Rightarrow (A)$ grâce à l'hypothèse de récurrence. En effet, lorsque (B) est vérifié, la valeur en y du second membre de (28) est un noyau définissant un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$; par contre, la formule $(x-y)^{-1}\{a^n(y) - m_I a^n\}$ ne définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ que si $a^n \in$ BMO($\mathbb{R}$) d'après la Proposition 5.

Pour montrer $(A) \Rightarrow (C)$, on distingue les cas $k \geq 1$ et $k = 0$. Si $k \geq 1$, on multiplie les deux membres de (28) par l'expression

$$(a - m_I a)^{k-1} \prod_{i=0}^{p} m_I (a - m_I a)^{\ell_i}.$$

La valeur en y du second membre est alors une somme de noyaux, chacun définissant un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $a, \ldots, a^n$ appartiennent à BMO($\mathbb{R}$) grâce à la Proposition 4. Si $k = 0$, on peut supposer que l'un des ℓ_i (par exemple ℓ_p) est supérieur à 1. On multiplie alors les deux membres de (28) par

$$(a - m_I a)^{\ell_p - 1} \prod_{i=0}^{p-1} m_I (a - m_I a)^{\ell_i},$$

puis on prend la moyenne sur I des deux membres et on conclut encore grâce à l'hypothèse de récurrence et aux Propositions 4 et 6.

Finalement, le Théorème 2 est vrai à tout ordre. Ceci termine la démonstration du Théorème 1.

Notons que cette approche ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda_n(a)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque. — L'identité (28) et les estimations des normes d'opérateurs des Propositions 4, 5 et 6 montrent facilement par récurrence que

$$\|\Lambda_n(a)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|a^i\|_{\mathrm{BMO}} \, \|a\|_{\mathrm{BMO}}^{n-i} \simeq \sum_{i=1}^{n} \|a^i\|_{\mathrm{BMO}} \, \|a\|_{\mathrm{BMO}}^{n-i}$$

lorsque les a^k, pour $1 \leq k \leq n$, appartiennent à BMO($\mathbb{R}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] COIFMAN (R.R.) and MEYER (Y.). — On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **212**, 1975, p. 315–331.

[2] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — Le double commutateur, *Séminaire d'Analyse Harmonique*, Orsay 1976.

[3] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — Commutateurs d'intégrale singulière et opérateurs multilinéaires, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28**, t. **3**, 1978, p. 177–202.

[4] DAVID (G.) and JOURNÉ (J.L.). — A boundedness Criterion for generalized Calderon-Zygmund Operators, *Ann. of Math.*, t. **120**, 1984, p. 371–397.

[5] JOURNÉ (J.L.). — Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderon, *Lecture Notes in Math.* **994**, *Springer-Verlag*, 1983.

[6] MEYER (Y.) et TCHAMITCHIAN (P.). — Une remarque sur les fonctions dont les puissances appartiennent à BMO($\mathbf{R}^n$), *Centre de Math. de l'École Polytechnique, Palaiseau.*

[7] TRAN-OBERLÉ (C.). — Analyticité en dimension infinie et théorie des opérateurs, *Thèse*, Orsay, 1987.