BULLETIN DE LA S. M. F.

CHANTAL TRAN-OBERLÉ

Analyse non linéaire de l'opérateur défini par l'intégrale de Cauchy

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 1 (1989), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 1–18.

ANALYSE NON LINÉAIRE DE L'OPÉRATEUR DÉFINI PAR L'INTÉGRALE DE CAUCHY

PAR

CHANTAL TRAN-OBERLÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous considérons une réalisation $\mathcal{C}(a)$ de l'opérateur de Cauchy associé au graphe Γ_a d'une fonction A de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, où $A' = a$, et nous étudions l'analyticité de $\mathcal{C}(a)$ comme fonction de a.

Nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les opérateurs multilinéaires du développement en série au voisinage de 0 soient bornés sur $L^2(\mathbb{R})$.

ABSTRACT. — We consider a version $\mathcal{C}(a)$ of the Cauchy integral along the graph Γ_a of the real-valued function A on $\mathbb{R}$, where $A' = a$, and we study the analyticity of $\mathcal{C}(a)$ viewed as an operator valued functional in a.

We prove necessary and sufficient conditions of boundedness in $L^2(\mathbb{R})$ of the multilinear operators of the Taylor expansion.

Introduction

Nous nous proposons d'étudier la dépendance non-linéaire d'une des réalisations de l'opérateur de Cauchy par rapport au graphe de la courbe correspondante.

Pour être plus précis, considérons tout d'abord une fonctionnelle $F : B_1 \to B_2$, où B_1 et B_2 sont deux espaces de Banach et où, sans perdre de généralité, on peut supposer F définie au voisinage de l'origine dans B_1.

Rappelons que F est analytique réelle au voisinage de 0 si on peut la développer, au voisinage de 0, en série

$$F(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Lambda_k(f)$$

où $\Lambda_k(f)$ est un polynôme homogène de degré k en f ; ceci signifie qu'il existe une application multilinéaire $\Lambda_k(f_1, \cdots, f_k) : B_1 \times \cdots \times B_1 \to B_2$

(*) Texte reçu le 2 avril 1987, révisé le 21 octobre 1988.
Chantal TRAN-OBERLÉ, Université Paris-Dauphine, CEREMADE, Place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

telle que $\Lambda_k(f) = \Lambda_k(f, \dots, f)$ et

$$\|\Lambda_k(f_1, \dots, f_k)\|_{B_2} \leq C^k \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_{B_1}$$

pour une constante C.

Dans ce cas, F peut être prolongée à un voisinage de 0 dans B_1^c (le complexifié de B_1) et le prolongement est holomorphe de B_1^c dans B_2^c (c'est-à-dire : quels que soient f et g dans un voisinage de 0 dans B_1^c, $F(f + zg)$ est une fonction holomorphe de la variable $z \in \mathbb{C}$ pour $|z| < 1$).

Dans les exemples naturels (équations aux dérivées partielles ou analyse complexe), B_2 est donné ainsi que la restriction de F à un espace quelquefois artificiel V. Les données initiales et la solution cherchée correspondent à B_2, tandis que V représente l'espace fonctionnel des coefficients ou de la géométrie (F représente donc l'algorithme qui donne la solution).

Le problème que l'on cherche à résoudre est celui du domaine naturel B_1 d'existence de la fonctionnelle F, c'est-à-dire du plus grand espace de Banach (contenant V comme un sous-espace dense) sur lequel F reste holomorphe. Dans la pratique, cela revient à affaiblir le plus possible les hypothèses de régularité que l'on est amené à faire sur les coefficients.

Un exemple historique de ce programme a été proposé par A. P. CALDERON dans les années 1960. Il considérait le noyau singulier

$$\text{v.p.}\,\frac{1}{x - y + i\big[A(x) - A(y)\big]} = \sum_{k=0}^{\infty} \text{v.p.}\,\frac{(-i)^k \big[A(x) - A(y)\big]^k}{(x - y)^{k+1}}.$$

Dans l'exemple de CALDERON, ainsi que dans ce qui suit, $B_2 = L(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ est l'algèbre des opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R})$.

La condition $A' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est nécessaire pour que le terme linéaire du développement soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$. CALDERON démontre en 1965 que cette condition est suffisante, puis en 1977, que $B_1 = L^\infty(\mathbb{R})$ est l'espace d'holomorphie du problème.

Une autre réalisation de l'opérateur de Cauchy, qui est celle que nous allons étudier, a été proposée en septembre 1984 par R. R. COIFMAN, lors d'un cours donné à Pékin. Il s'agit de l'opérateur $\mathcal{C}(a)$ (associé au graphe Γ_a d'une fonction $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $A' = a$) défini par le noyau

$$C(x, y) = \frac{1 + ia(y)}{x - y + i\big[A(x) - A(y)\big]} = \frac{z'(y)}{z(x) - z(y)}.$$

Ce noyau définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ dès que a appartient à $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$, l'espace de JOHN et NIRENBERG [7].

Nous allons montrer au paragraphe 3 que la condition $a \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ est nécessaire et suffisante pour que $\Lambda_1(a)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$. Mais ici, le terme linéaire du développement ne suffit pas pour donner l'espace d'holomorphie. En effet, le théorème principal, que nous démontrerons au paragraphe 4, établit la caractérisation suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les opérateurs $\Lambda_k(a)$, $0 \leq k \leq n$, sont tous bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si les fonctions a^k, pour $0 \leq k \leq n$, appartiennent toutes à* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

Indiquons que l'on sait montrer ce fait encore plus surprenant : un espace (comme celui décrit dans [6] par exemple) peut assurer la continuité sur $L^2(\mathbb{R})$ de tous les opérateurs $\Lambda_k(a)$, sans être un espace d'holomorphie (voir [7]).

Notons $m_{[x,y]}a$ la moyenne de la fonction a sur l'intervalle $[x,y]$. Le noyau définissant $\Lambda_k(a)$ est, au produit par une constante près,

$$\left[\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right]^{k-1}\left[\frac{A(x)-A(y)-(x-y)a(y)}{(x-y)^2}\right] = -\frac{1}{x-y}\Big(m_{[x,y]}a\Big)^{k-1}\Big(a(y)-m_{[x,y]}a\Big)$$

si $k \geq 1$. ($\Lambda_0(a)$ est simplement la transformation de Hilbert.)

La démonstration du THÉORÈME 1 se fera par récurrence et nous serons amenés à introduire des noyaux auxiliaires que nous étudierons grâce au théorème T(1) de DAVID et JOURNÉ [4] et à des inégalités “aux bons λ” de BURKHOLDER et GUNDY.

Auparavant, nous allons donner quelques résultats préliminaires : sur les fonctions de $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ au paragraphe 1 et sur des opérateurs maximaux au paragraphe 2.

1. Quelques estimations sur les fonctions de $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$

Nous utiliserons généralement la norme suivante sur $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$:

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I \big|b(t)-m_I b\big|\,dt\right\}$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle borné I et $m_I b$ la moyenne de b sur I. Parfois, nous ferons appel aux normes équivalentes

$$\|b\|_{\mathrm{BMO},p} = \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I \big|b(t)-m_I b\big|^p\,dt\right\}^{1/p} \quad \text{où} \quad p \geq 1.$$

La PROPOSITION 1 rappelle quelques estimations de base.

PROPOSITION 1. — *Soit $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ avec $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. Soient x, x', y des réels tels que $|x - x'| \leq \ell$ et $|x - y| \geq 2\ell$ pour un réel $\ell > 0$. Alors on a :*

$$(1) \qquad \left|m_{[x,y]}b - m_{[x',y]}b\right| \leq C \left|\frac{x - x'}{x - y}\right| \log \frac{|x - y|}{\ell} \leq C' \left|\frac{x - x'}{x - y}\right|^{1/2}$$

$$(2) \qquad \left|\frac{x - x'}{x - y}\right| m_{[x,x']}\left|b - m_{[x,y]}b\right|^k \leq C_k \left|\frac{x - x'}{x - y}\right|^{1/2}, \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$(3) \qquad m_{[x',y]}\left|b - m_{[x,y]}b\right|^k \leq C_k, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La démonstration utilise la remarque suivante :

LEMME 1. — *Soit $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ avec $\|b\|_{\mathrm{BMO}} = 1$. Si I_1 et I_2 sont deux intervalles tels que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ et $2^{N-1}|I_1| \leq |I_2| \leq 2^N|I_1|$ pour un entier $N \geq 1$, alors $|m_{I_1}b - m_{I_2}b| \leq 6N$.*

On vérifie d'abord ce lemme pour $N = 1$ en remarquant que I_1 et I_2 sont contenus dans un intervalle I de longueur $3|I_1|$ et en remplaçant b par $b - m_I b$. Le cas général en découle immédiatement.

L'assertion (1) découle du LEMME 1 en posant $I_1 = [x - \ell, x + \ell]$ et $I_2 = [x, y]$. En effet, en remplaçant b par $b - m_{I_1}b$ dans le membre de gauche de (1), on a :

$$\begin{aligned}
&\left|m_{[x,y]}b - m_{[x',y]}b\right| \\
&\quad \leq \left|\frac{x - x'}{x' - y}\right| \left|m_{I_1}b - m_{I_2}b\right| + \frac{1}{|x' - y|}\left|\int_{[x,x']} \bigl(b(t) - m_{I_1}b\bigr)\, dt\right| \\
&\quad \leq C \left|\frac{x - x'}{x - y}\right| \log \frac{|x - y|}{\ell} + C \left|\frac{x - y}{x - y}\right|.
\end{aligned}$$

Pour obtenir (2), on remplace tout d'abord b par $(b - m_{[x,x']}b)$ dans $(b - m_{I_2}b)^k$; en développant, on a

$$\left|b - m_{I_2}b\right|^k \leq C_k \sum_{\ell=0}^{k} \left|b - m_{[x,x']}b\right|^\ell \left|m_{[x,x']}b - m_{I_2}b\right|^{k-\ell};$$

puis on prend la moyenne des deux membres de cette inégalité sur $[x, x']$ et on applique le LEMME 1 avec les intervalles $[x, x']$ et I_2.

On procède de la même façon pour (3) en remplaçant b par $b - m_{[x',y]}b$ et en utilisant (1).

Indiquons immédiatement une conséquence de la PROPOSITION 1 qui nous servira plusieurs fois.

PROPOSITION 2. — *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u_1, \dots, u_n$ *des éléments de* BMO($\mathbb{R}$) *de norme* 1. *Posons*

$$M_n(x,y) = m_{[x,y]} \prod_{i=1}^{n} \big(u_i - m_{[x,y]} u_i\big).$$

Alors, quels que soient les réels x, x', y *vérifiant* $|x - x'| \le \frac{1}{2}|x - y|$ *et* $x \ne y$ *on a :*

$$\Big|M_n(x,y) - M_n(x',y)\Big| \le C_n \left|\frac{x - x'}{x - y}\right|^{1/2}. \tag{4}$$

Il suffit de vérifier que les quantités

$$A = \Big|M_n(x,y) - m_{[x',y]} \prod_{i=1}^{n} (u_i - m_{[x,y]} u_i)\Big|,$$

et

$$B = \Big|M_n(x',y) - m_{[x',y]} \prod_{i=1}^{n} (u_i - m_{[x,y]} u_i)\Big|$$

sont majorées par $C_n(|x - x'|/|x - y|)^{1/2}$. Pour A, on remarque que :

$$A \le \frac{|x - x'|}{|x' - y||x - y|} \int_{[x,y]} \prod_{i=1}^{n} \Big|u_i(t) - m_{[x,y]} u_i\Big|\, dt + \frac{1}{|x' - y|} \int_{[x,x']} \prod_{i=1}^{n} \Big|u_i(t) - m_{[x,y]} u_i\Big|\, dt$$

et on conclut grâce à (2) et à l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO},n}$ ainsi que $\|\cdot\|_{BMO,1}$ après avoir appliqué l'inégalité de Hölder. Pour B, on écrit :

$$B \le \sum_{i=1}^{n} \Big|m_{[x,y]} u_i - m_{[x',y]} u_i\Big| \times m_{[x',y]} \Big\{ \Big|\prod_{j=1}^{i-1} |u_j - m_{[x,y]} u_j|\Big| \times \Big|\prod_{j=i+1}^{n} |u_j - m_{[x',y]} u_j|\Big| \Big\}$$

et on conclut avec (1) et (3).

2. Résultats préliminaires sur des opérateurs maximaux

PROPOSITION 3. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $r \geq 1$, il existe une constante C_M telle que pour toutes fonctions $u_1, \ldots, u_n, f$ bornées et à support compact, on ait :*

$$\left\| \mathcal{K}^*\big(u_1, \ldots, u_n, f\big) \right\|_r \leq C_M \left\| \Big(\prod_{i=1}^{n} u_i^*\Big) f^* \right\|_r \tag{5}$$

avec

$$\mathcal{K}^*\big(u_1, \ldots, u_n, f\big)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{x-y} \Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]} u_i\Big) f(y)\, dy \right|.$$

La constante C_M dépend de n et r.

On a noté g^* la fonction maximale de Hardy–Littlewood de g.

Remarque 1. — Soient $p > n$ et $q > 1$ avec $(n/p) + (1/q) = 1$. Alors la PROPOSITION 3 est vraie pour $u_1, \ldots, u_n$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et f dans $L^q(\mathbb{R})$. En effet, ce passage se fait de manière classique, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ et le lemme de Fatou. En particulier, la PROPOSITION 3 entraîne que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\left| \Big\{ x\, ;\ \mathcal{K}^*(u_1, \ldots, u_n, f)(x) > \lambda \Big\} \right| \leq \frac{C_M}{\lambda} \Big(\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_p\Big) \|f\|_q. \tag{6}$$

Nous utiliserons cette inégalité de type faible dans la démonstration de la PROPOSITION 4.

Remarque 2. — Le noyau $K(x,y) = (1/x-y) \prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]} u_i$ est un noyau de Calderon–Zygmund lorsque les u_i appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R})$ et sa norme de Calderon–Zygmund est majorée par $C_n \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_\infty$. Dès lors, la limite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x,y) f(y)\, dy$$

existe pour presque tout x et nous la noterons $(u_1, \ldots, u_n, f)(x)$. De plus, $\mathcal{K}(u_1, \ldots, u_m)$ envoie L^1 dans L^1-faible; précisément : pour tout $\lambda > 0$,

$$\left| \Big\{ x\, ;\ \big|\mathcal{K}(u_1, \ldots, u_n, f)\big|(x) > \lambda \Big\} \right| \leq \frac{C_n}{\lambda} \Big(\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_\infty\Big) \|f\|_1. \tag{7}$$

La démonstration qui suit reprend celle de R. R. COIFMAN et Y. MEYER dans [1] où la proposition a été établie dans le cas $n = 2$.

Pour $0 \leq i \leq n$, appelons (P_i) la propriété :

$$\text{Pour tout } \lambda > 0, \quad \Big|\Big\{x \,;\ \big|\mathcal{K}(u_1, \dots, u_n, f)\big|(x) > \lambda\Big\}\Big| \leq C_n \Big\{\frac{1}{\lambda}\Big(\prod_{j=1}^{i} \|u_j\|_1\Big)\Big(\prod_{k=i+1}^{n} \|u_k\|_\infty\Big)\|f\|_1\Big\}^{\frac{1}{i+1}}.$$

LEMME 2. — *La propriété (P_n) est vérifiée.*

Observons que (P_0) est vérifiée : c'est la propriété 7. On va démontrer l'implication $(P_{i-1}) \Rightarrow (P_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, en faisant une décomposition de Calderon–Zygmund de u_i au niveau $\lambda^{1/(i+1)}$. De manière précise, on peut d'abord se ramener au cas où $\|u_j\|_1 = \|u_k\|_\infty = \|f\|_1 = 1$ pour tout $j = 1, \dots, i$ et $k = i+1, \dots, n$. Puis on décompose

$$u_i = b_i + \sum_{j=1}^{\infty} m_{i,j}\,, \quad \text{avec} \quad \|b_i\|_\infty \leq \lambda^{1/(i+1)},$$

les $m_{i,j}$ étant de moyenne nulle, à support dans $I_{i,j}$ (les $I_{i,j}$ sont disjoints) et $\sum_{j=1}^{\infty} |I_{i,j}| \leq C\lambda^{-1/(i+1)}$, avec $(1/|I_{i,j}|)\int_{I_{i,j}} |m_{i,j}(t)|\,dt \leq C\lambda^{1/(i+1)}$.

Ainsi, l'hypothèse (P_{i-1}) entraîne

$$(8) \quad \Big|\Big\{x \,;\ \big|\mathcal{K}(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_n, f)(x)\big| > \lambda\Big\}\Big| \leq C_n \lambda^{-1/(i+1)}.$$

D'autre part, en appelant $M_{i,j}$ une primitive convenable de $m_{i,j}$, on est assuré que $M_{i,j}(x) = 0$ si $x \notin I_{i,j}$ et $|M_{i,j}(y)| \leq C\lambda^{1/(i+1)}|I_{i,j}|$ si $y \in I_{i,j}$. Donc, pour x n'appartenant pas à $2I_{i,j}$, on a :

$$(9) \qquad \Big|\mathcal{K}\big(u_1, \dots, u_{i-1}, m_{i,j}, u_{i+1}, \dots, u_n, f\big)(x)\Big| = \Big|-\int_{I_{i,j}} \frac{M_{i,j}(y)}{(x-y)^2}\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} m_{[x,y]}u_k\Big) f(y)\,dy\Big| \leq C\lambda^{1/i+1}\Delta_{i,j}(x)\prod_{k=1}^{i-1} u_k^*(x)$$

avec

$$\Delta_{i,j}(x) = \frac{|I_{i,j}|}{(x - y_{i,j})^2 + |I_{i,j}|^2}\int_{I_{i,j}} |f(y)|\,dy,$$

($y_{i,j}$ désigne le centre de $I_{i,j}$).

Comme $\|\sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{i,j}\|_1 \leq C\sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_{i,j}} |f(y)|\,dy \leq C\|f\|_1$ et que $u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*$ sont dans L^1-faible, on obtient en sommant (9) :

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \Big|\Big\{x\,;\ \big|\mathcal{K}\big(u_1,\ldots,u_{i-1},\sum_{j=1}^{\infty} m_{i,j}, u_{i+1},\ldots,u_n,f\big)\big|(x) > \lambda\Big\}\Big| \\
\leq 2\sum_{j=1}^{\infty} |I_{i,j}| + \Big|\Big\{x\,;\ \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{i,j}(x) > \lambda^{1/i+1}\Big\}\Big| \\
+ \sum_{k=1}^{i-1} \Big|\Big\{x\,;\ u_k^*(x) > \lambda^{1/i+1}\Big\}\Big| \\
\leq C\lambda^{-1/i+1}.
\end{aligned}
$$

Le LEMME 2 découle alors de (8) et (10).

La fin de la démonstration de la PROPOSITION 3 se déroule maintenant comme dans [1]. On vérifie immédiatement (comme dans le LEMME (4.1) p. 327) que

$$
(11)\quad \Big|\int_{|y-x_1|<\varepsilon} \big[K(x,y) - K(x_1,y)\big] f(y)\,dy\Big| \leq C_n f^*(x_2) \prod_{i=1}^{n} u_i^*(x_2)
$$

si $|x - x_1| < \frac{1}{4}\varepsilon$ et $|x - x_2| < \frac{1}{4}\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

La même démonstration que celle du lemme (4.2) de [1] montre alors que l'opérateur maximal $\mathcal{K}^*(u_1, \ldots, u_n)$ vérifie (P_n), c'est-à-dire : pour tout $\lambda > 0$,

$$
(12)\quad \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\ldots,u_n,f)(x) > \lambda\Big\}\Big| \leq C_n \Big\{\frac{1}{\lambda}\|f\|_1 \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_1\Big\}^{1/n+1}.
$$

Enfin, la PROPOSITION 3 découle d'une inégalité “aux bons λ” comme celle du lemme (4.5) de [1] et qui s'énonce : il existe $\gamma_0 > 0$ et $C_n > 0$ tels que

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\ldots,u_n,f)(x) > 2\lambda,\ f^*(x)\prod_{i=1}^{n} u_i(x) \leq \gamma\lambda\Big\}\Big| \\
\leq C_n \gamma^{1/n+1} \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*(u_1,\ldots,u_n,f)(x) > \lambda\Big\}\Big|
\end{aligned}
$$

pour tout $\lambda > 0$ et tout $\gamma \in]0, \gamma_0[$.

Pour la démonstration des inégalités (11), (12) et (13), nous renvoyons le lecteur à [1].

3. Le terme linéaire du développement

Dans la proposition suivante, on s'intéresse à des noyaux plus généraux que celui de $\Delta_1(a)$. Ces noyaux nous serviront dans la démonstration du THÉORÈME 1.

PROPOSITION 4. — *Soient $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p$ des éléments de* BMO($\mathbb{R}$), *$(n, p \in \mathbb{N}^*)$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers naturels. On pose*

$$L(x,y) = \frac{1}{x-y}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\big(u_i(y) - m_{[x,y]}u_i\big)\Big\}\prod_{j=1}^{p} m_{[x,y]}\big(v_j - m_{[x,y]}v_j\big)^{\alpha_j}.$$

Alors, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, la limite suivante existe pour presque tout x de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,y) f(y)\, dy.$$

En appelant $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_m\,;\, v_1^{(\alpha_1)}\,;\,\dots\,;\, v_p^{(\alpha_p)}\,;\, f)(x)$ cette limite, on a :

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{L}\big(u_1, \dots, u_m\,;\, v_1^{(\alpha_1)}\,;\,\dots\,;\, v_p^{(\alpha_p)}\big)\big\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \\ \le C_M\Big(\prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_{\mathrm{BMO}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{p}\|v_j\|_{\mathrm{BMO}}^{\alpha_j}\Big).\end{aligned}$$

La constante C_M dépend de n, p, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Ce résultat a été montré par R. R. COIFMAN et Y. MEYER [2] dans le cas $n = 2$, $p = 1$ et $\alpha_1 = 0$. Nous suivrons leur méthode de démonstration, pour obtenir la proposition dans le cas général.

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\begin{aligned} L_0(x,y) &= \prod_{j=1}^{p} m_{[x,y]}(v_j - m_{[x,y]}v_j)^{\alpha_j}, \\ L_i(x,y) &= u_i(y) - m_{[x,y]}u_i \qquad (i = 1, \dots, n), \\ \mathcal{L}_\varepsilon(f)(x) &= \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,y) f(y)\, dy, \quad \mathcal{L}^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0}\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x)\big|, \\ \mathcal{L}(f)(x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x). \qquad (14)\end{aligned}$$

Quitte à multiplier chaque u_i et v_j par une constante, on peut supposer que $\|u_i\|_{\mathrm{BMO}} = \|v_j\|_{\mathrm{BMO}} = 1$ pour tous les indices i, j.

La démonstration va se dérouler en deux parties :

(i) $\|\mathcal{L}^*(f)\|_2 \le C_M\|f\|_2$;

(ii) la limite au second membre de (14) existe pour presque tout x.

(i) *Première partie.* Fixons $q \in\,]1,2[$ et posons $M_q f = \{(|f|^q)^*\}^{1/q}$. Comme $\|M_q f\|_2 \le C\|f\|_2$ (puisque $q < 2$), il suffit de montrer que

$$\|\mathcal{L}^*(f)\|_2 \le C_M\|M_q f\|_2 \tag{15}$$

pour f dans un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$, par exemple f bornée à support compact. Le lemme suivant précise la régularité du noyau $L(x,y)$.

LEMME 3. — *Soient x, y, ξ, ℓ des réels tels que $\ell > 0$, $|x-\xi| \le \ell$ et $|y-\xi| \ge 2\ell$. Alors*

$$\begin{aligned}\big|L(x,y) - L(\xi,y)\big| &\le C_M \frac{\ell^{1/2}}{|y-\xi|^{3/2}} \prod_{i=1}^{n} \big|L_i(\xi,y)\big| \\ &+ \sum_{\substack{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\{0,1\}^n \\ \delta=n-(\delta_1+\cdots+\delta_n)\ge 1}} C_M \frac{\ell^\delta}{|y-\xi|^{\delta+1}} \Big(\log\frac{|y-\xi|}{\ell}\Big)^{\delta} \prod_{i=1}^{n} \Big|L_i(\xi,y)\Big|^{\delta_i}.\end{aligned}$$

Compte tenu des inégalités (1) et (4), on peut majorer la différence $|L_i(x,y) - L_i(\xi,y)|$ par $(C\ell/|y-\xi|)\log(|y-\xi|/\ell)$ si $i \ne 0$ et par $C_M(\ell/|y-\xi|)^{1/2}$ si $i = 0$. Il suffit ensuite d'écrire :

$$\begin{aligned}\big|L(x,y) - L(\xi,y)\big| &\le \left|\frac{x-\xi}{x-y}\right| \big|L(\xi,y)\big| \\ &+ \frac{1}{|x-y|} \sum_{i=0}^{n} \left\{ \Big[\prod_{j=0}^{i-1} \big|L_j(\xi,y)\big|\Big] \big|L_j(x,y) - L_j(\xi,y)\big| \Big[\prod_{j=i+1}^{n} \big|L_j(x,y)\big|\Big] \right\}\end{aligned}$$

avec $|L_j(x,y)| \le |L_j(x,y) - L_j(\xi,y)| + |L_j(\xi,y)|$, pour obtenir l'estimation du LEMME 3.

LEMME 4. — *Soient $I = \,]a, a+\ell[$ un intervalle de longueur ℓ et $J = \,]a-3\ell, a+3\ell[$. Pour toute fonction g bornée à support compact et identiquement nulle sur J, on a :*

$$\forall \xi \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\quad \left|\int_{(\varepsilon/2)\le|y-\xi|\le\varepsilon} L(\xi,y) g(y)\,dy\right| \le C_M M_q g(\xi)\,; \tag{16}$$

$$\forall x \in I,\ \forall \xi \in I,\quad \big|\mathcal{L}(g)(x) - \mathcal{L}(g)(\xi)\big| \le C_M M_q g(\xi). \tag{17}$$

Remarquons d'abord que, quels que soient les réels ξ, $p > 1$ et $\varepsilon > 0$,

$$\left(\int_{\varepsilon/2 \le |y-\xi| \le \varepsilon} \left|L_i(\xi, y)\right|^p dy\right)^{1/p} \le 5\|u_i\|_{\mathrm{BMO},p}(2\varepsilon)^{1/p}, \quad (i \ge 1). \tag{18}$$

Cette majoration est évidente et (16) en découle directement.

Par ailleurs, le LEMME 3 montre que $|\mathcal{L}(g)(x) - \mathcal{L}(g)(\xi)|$ est majoré par une somme de termes du type

$$C_M\, \ell^{1/2} \int_{J^c} |g(y)| \Big(\prod_{i=1}^{n} |L_i(\xi, y)|\Big) \frac{dy}{|y-\xi|^{3/2}}$$

et du type

$$C_M\, \ell^{\delta} \int_{J^c} |g(y)| \left(\log \frac{|y-\xi|}{\ell}\right)^{\delta} \left(\prod_{i=1}^{n} |L_i(\xi, y)|^{\delta_i}\right) \frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}, \tag{19}$$

avec $\delta_i \in \{0, 1\}$ et $\delta = n - (\delta_1 + \cdots + \delta_n) \ge 1$.

Chacun de ces termes est majoré par $C_M M_q g(\xi)$: nous allons le vérifier pour les termes du deuxième type (ceux du premier type se traitant de manière similaire). Pour cela, on découpe $\{y\,;\ |y - \xi| \ge 2\ell\}$ en couronnes Γ_j $(j \ge 1)$ où $\Gamma_j = \{y\,;\ 2^j\ell \le |y - \xi| \le 2^{j+1}\ell\}$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder avec $(n/p) + (1/q) = 1$, et en utilisant la remarque (18), on peut majorer l'expression (19) par

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} C_M \ell^{\delta} \left\{\int_{\Gamma_j} \left(\log \frac{|y-\xi|}{\ell}\right)^p \frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\right\}^{\delta/p} \\
&\qquad \times \left\{\prod_{i=1}^{n} \Big(\int_{\Gamma_j} |L_i(\xi, y)|^p \frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\Big)^{\delta_i/p}\right\} \left\{\int_{\Gamma_j} |g(y)|^q \frac{dy}{|y-\xi|^{\delta+1}}\right\}^{1/q} \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{\infty} C_M \ell^{\delta} \Big(\int_2^{+\infty} \log|u| \frac{du}{u^{\delta+1}}\Big)^{\delta/p} \frac{1}{(2^j\ell)^{\delta}} M_q g(\xi) \\
&\qquad \le C_M M_q g(\xi).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du LEMME 4.

L'inégalité (15) est une conséquence de l'inégalité “aux bons λ” que voici.

LEMME 5. — *Il existe un réel $\gamma_0 > 0$ et une constante $C_M > 0$ tels que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\gamma \in\,]0, \gamma_0[$, on ait :*

$$\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > 2\lambda,\ M_q f(x) \le \gamma\lambda\Big\}\Big| \le C_M \gamma \Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > \lambda\Big\}\Big|.$$

Comme $\Omega = \{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > \lambda\}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, on peut l'écrire $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$ où les $I_k =]a_k, a_k + \ell_k[$ sont des intervalles disjoints.

Notons

$$J_k =]a_k - 3\ell_k, a_k + 3\ell_k[,$$
$$E = \{x\,;\ \mathcal{L}^*(f)(x) > 2\lambda,\ M_1 f(x) \le \gamma\lambda\},$$

et vérifions que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$|E \cap I_k| \le C\gamma |I_k|. \tag{20}$$

Si $E \cap I_k = \emptyset$, la majoration (20) est évidente ; sinon, il existe $\xi \in E \cap I_k$. On décompose alors :

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{avec} \quad f_1 = f\mathbf{1}_{J_k}.$$

Occupons-nous d'abord de f_2. Pour tout x de I_k et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) - \mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(\xi)\big| \le C_M M_q f(\xi) \le C_M \gamma\lambda. \tag{21}$$

En effet, si $0 < \varepsilon \le 2\ell_k$, c'est immédiat à l'aide de (17) car $\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) = \mathcal{L}(f_2)(x)$. Si $\varepsilon > 2\ell_k$, on pose $\chi(y) = \mathbf{1}_{|y-x|\ge\varepsilon}$, $\chi'(y) = \mathbf{1}_{|y-\xi|\ge\varepsilon}$ et $\chi_1 = \chi - \chi'$. Il suffit alors de remarquer que

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(x) - \mathcal{L}_\varepsilon(f_2)(\xi)\big| &= \big|\mathcal{L}(\chi f_2)(x) - \mathcal{L}(\chi' f_2)(\xi)\big| \\ &\le \big|\mathcal{L}(\chi f_2)(x) - \mathcal{L}(\chi f_2)(\xi)\big| + \big|\mathcal{L}(\chi_1 f_2)(\xi)\big|,\end{aligned}$$

et d'appliquer (17) avec $g = \chi f_2$ et (16) avec $g = \chi_1 f_2$.

De (21) on déduit que, pour tout x de $E \cap I_k$, on a successivement :

$$\big|\mathcal{L}^*(f_2)(x) - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k)\big| \le C_M M_q f(\xi), \quad \text{puis}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(f_1)(x) &\ge \mathcal{L}^*(f)(x) - \big[\mathcal{L}^*(f_2)(x) - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k)\big] - \mathcal{L}^*(f_2)(a_k) \\ &> \lambda - C_M\gamma\lambda.\end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration de (20), il suffit donc de vérifier que :

$$\Big|\{x \in I_k\,;\ \mathcal{L}^*(f_1)(x) > \lambda\}\Big| \le \frac{C_M}{\lambda} |I_k|\, M_q f(\xi). \tag{22}$$

Remarquons que si x et y appartiennent à J_k, $L(x,y)$ ne change pas si on remplace les u_i, v_j par les $\tilde u_i = (u_i - m_{J_k} u_i)\mathbf{1}_{J_k}$, $\tilde v_j = (v_j - m_{J_k} v_j)\mathbf{1}_{J_k}$. Ainsi, en développant $L(x,y)$, on a, pour $x \in I_k$,

$$\mathcal{L}^*(f_1)(x) \le C_M \sum_{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n} \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_p=0}^{\alpha_p}$$
$$\Big(\tilde u_1^{\delta_1}, \dots, \tilde u_n^{\delta_n}, \tilde v_1^{\gamma_1}, \dots, \tilde v_p^{\gamma_p}, \underbrace{\tilde v_1, \dots, \tilde v_1}_{(\alpha_1-\gamma_1)\ \text{fois}}, \dots, \underbrace{\tilde v_p, \dots, \tilde v_p}_{(\alpha_p-\gamma_p)\ \text{fois}}, h\Big)(x)$$

avec $h = \tilde u_1^{1-\delta_1} \cdots \tilde u_n^{1-\delta_n} f_1$.

En introduisant p' tel que $1/q + (1/p')\{n + \sum_{j=1}^{p}(\alpha_j - \gamma_j + 1)\} = 1$, l'estimation (6) fournit alors :

$$\Big|\Big\{x\,;\ \mathcal{K}^*\big(\tilde{u}_1^{\delta_1},\dots,\tilde{u}_n^{\delta_n},\tilde{v}_1^{\gamma_1},\dots,\tilde{v}_p^{\gamma_p},\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_p,\dots,\tilde{v}_p,h\big)(x) > \lambda\Big\}\Big|$$

$$\leq \frac{C_M}{\lambda}\Big(\prod_{i=1}^{n}\|\tilde{u}_i\|_{p'}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{p}\|\tilde{v}_j\|_{p'}^{\alpha_j-\gamma_j}\|\tilde{v}_j^{\gamma_j}\|_p\Big)\|f_1\|_q$$

$$\leq \frac{C_M}{\lambda}|I_k|M_q f(\xi). \tag{23}$$

L'inégalité (23) entraîne (22) et termine la démonstration de (20) et (15).

(ii) *Deuxième partie.* Pour montrer que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{L}_\varepsilon(f)(x)$ existe pour presque tout x, il suffit, compte tenu de (i), de le faire pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Remplaçons les u_i, v_j par les $\tilde{u}_i = u_i\mathbf{1}_I$, $\tilde{v}_j = v_j\mathbf{1}_I$ (I est un intervalle contenant x et le support de f) qui appartiennent à tout $L^r(\mathbb{R})$, ($r \geq 1$). En développant $L(x,y)$, on est alors ramené à voir que :

LEMME 6. — *Quelles que soient les fonctions $a_1,\dots,a_n$ ($n \geq 1$) de $L^{2n}(\mathbb{R})$, et g de $L^2(\mathbb{R})$, la limite*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g(y)\frac{dy}{x-y}$$

existe pour presque tout x.

Il suffit de faire la vérification pour $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (puisque $\mathcal{K}^*(a_1,\dots,a_n)$ envoie L^2 dans L^1 d'après (5)). En intégrant

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)\frac{g(y)}{x-y} = \frac{g(y)}{(x-y)^{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\Big(A_i(x) - A_i(y)\Big)$$

par parties, on obtient une somme de trois termes :

$$\frac{1}{n}\Big[\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g(y)\Big]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} - \int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{i=1}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)g'(y)\,dy$$
$$+\sum_{i_0=1}^{n}\int_{|y-x|\geq\varepsilon}\Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} m_{[x,y]}a_i\Big)a_{i_0}(y)g(y)\frac{dy}{x-y}$$

Les deux premiers termes ont évidemment des limites presque partout ; pour le troisième, on conclut par récurrence sur n.

La preuve de la PROPOSITION 4 est maintenant complète.

Pour terminer l'étude de $\Lambda_1(a)$, il reste à voir que :

PROPOSITION 5. — *Si $\Lambda_1(a)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ alors a appartient à* BMO($\mathbb{R}$) *et* $\|\Lambda_1(a)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \geq C\|a\|_{\mathrm{BMO}}$.

Remarquons d'abord que l'opérateur $T = \Lambda_1(a) - [\Lambda_1(a)]^*$ $[\Lambda_1(a)]^*$ est le transposé de $\Lambda_1(a)$) défini par le noyau $(a(x) - a(y))/(x - y)$ est également borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

On va minorer $\|Tf\|_2$ pour $f = \mathbf{1}_I$ où $I =]\alpha, \alpha + \ell[$ est un intervalle de longueur ℓ. Considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = x$ pour $x \in [1,3]$ et posons $\varphi_\ell(x) = \ell\varphi(x/\ell)$. Le noyau $((a(x) - a(y))/(x - y)\varphi_\ell(x - y)$ définit un opérateur T_{φ_ℓ} pour lequel on minore $\|T_{\varphi_\ell} f\|_2$ sans difficulté : en posant $J =]\alpha + 2\ell, \alpha + 3\ell[$, on a $\|T_{\varphi_\ell} f\|_2 \geq \|\mathbf{1}_J T_{\varphi_\ell} f\|_2$ et

$$\|\mathbf{1}_J T_{\varphi_\ell} f\|_2 = \ell\Big(\int_J \big|a(x) - m_I a\big|^2 dx\Big)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\Big(\int_J \big|a(x) - m_J a\big|\, dx\Big)\|f\|_2.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\|T_{\varphi_\ell}\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\|\varphi_\ell\|_1\|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\ell\|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}.$$

En effet, on a en toute généralité :

LEMME 7. — *Soient $K(x,y)$ le noyau-distribution associé à un opérateur T borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors le noyau $K(x,y)\varphi(x - y)$ est encore associé à un opérateur T_φ borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et* $\|T_\varphi\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C\|\hat{\varphi}\|_1\|T\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}$.

La preuve est simple. Comme $\varphi(x - y) = (1/2\pi)\int e^{i\xi x}e^{-i\xi y}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$, on peut écrire $T_\varphi f(x) = (1/2\pi)\int T_\xi f(x)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$ avec $T_\xi = M_\xi T M_\xi^{-1}$ (on appelle M_ξ l'opérateur de multiplication ponctuelle par $e^{i\xi\cdot}$) ; or T et T_ξ ont même norme L^2.

4. Démonstration du théorème 1

On va obtenir le THÉORÈME 1 comme conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction dont toutes les puissances a^k pour $1 \leq k \leq n - 1$ appartiennent à* BMO($\mathbb{R}$). *Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(A) *La fonction a^n appartient à* BMO($\mathbb{R}$).

(B) *Le noyau $(x-y)^{-1}(m_{[x,y]}a)^{n-1}(a(y)-m_{[x,y]}a)$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.*

(C) *Le noyau*

$$\frac{1}{x-y}\left(m_{[x,y]}a\right)^{n-1}\left(a(y)-m_{[x,y]}a\right)^{k}\prod_{i=0}^{p} m_{[x,y]}\left(a-m_{[x,y]}a\right)^{\ell_i},$$

où k, p, $\ell_0,\dots,\ell_p$ sont des entiers, définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

L'affirmation (C) va permettre d'établir le THÉORÈME 2 par récurrence sur n. La démonstration nous amènera à introduire des noyaux auxiliaires, en particulier ceux décrits dans la proposition suivante.

PROPOSITION 6. — *Soient $u_1,\dots,u_n$, $v_1,\dots,v_p$ des éléments de* BMO$(\mathbb{R})$, *$(n,p\in\mathbb{N}^*)$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des entiers naturels. Alors le noyau*

$$M(x,y)=\frac{1}{x-y}m_{[x,y]}\Big\{\prod_{i=1}^{n}\left(u_i-m_{[x,y]}u_i\right)\Big\}\prod_{j=1}^{p} m_{[x,y]}\left(v_j-m_{[x,y]}v_j\right)^{\alpha_j}$$

définit un opérateur $\mathcal{M}(u_1,\dots,u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)})$ borné sur $L^2(\mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{M}(u_1,\dots,u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)})\big\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}&\\ \le C_M\Big(\prod_{i=1}^{n}\|u_i\|_{\mathrm{BMO}}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{p}\|v_j\|_{\mathrm{BMO}}^{\alpha_j}\Big)&\end{aligned}$$

La constante C_M dépend de n, p, $\alpha_1,\dots,\alpha_p$.

Remarquons d'abord que le noyau $M(x,y)$ satisfait des estimations de Calderon-Zygmund. En effet :

LEMME 8.

a) $|M(x,y)|\le C_M|x-y|^{-1}$ *si $x\ne y$;*

b) $|M(x,y)-M(x',y)|\le C_M|x-x'|^{1/2}|x-y|^{-3/2}$ *si l'on a l'inégalité $|x-x'|\le\frac{1}{2}|x-y|$ et $x\ne y$.*

La démonstration du LEMME 8 est évidente, compte-tenu de la PROPOSITION 2 et de l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO},p}$.

Les estimations du LEMME 8, alliées au fait que le noyau $M(x,y)$ est antisymétrique, ramènent la démonstration de la PROPOSITION 6 à la vérification

$$\mathcal{M}(\mathbf{1})\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}), \tag{24}$$

ceci grâce au théorème $T(\mathbf{1})$ de G. DAVID et J.L. JOURNÉ.

Pour cela, fixons un intervalle I (de longueur finie non nulle), et soit J l'intervalle de même centre que I et de longueur $2|I|$. En notant $\tilde{u}_i = (u_i - m_J u_i)\mathbf{1}_J$ et $\tilde{v}_j = (v_j - m_J v_j)\mathbf{1}_J$, on a :

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{1}_I \mathcal{M}\big(u_1, \ldots, u_n\,;\ v_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ v_p^{(\alpha_p)}\big)(\mathbf{1}_J) \\ &\qquad = \mathbf{1}_I \mathcal{M}\big(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\,;\ \tilde{v}_1^{(\alpha_1)}\,;\ \cdots\,;\ \tilde{v}_p^{(\alpha_p)}\big)(\mathbf{1}_J). \end{aligned}$$

En développant l'égalité (25), on obtient :

$$\mathbf{1}_I \mathcal{M}(\mathbf{1}_J) = \mathbf{1}_I \sum_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\{0,1\}^n} \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_p=0}^{\alpha_p} \mathcal{K}_{(\delta_1,\ldots,\delta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_p)}$$

où $\mathcal{K}_{(\delta_1,\ldots,\delta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_p)}$ est égal (à une constante près) à l'action sur $\mathbf{1}_J$ de

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\Big(&\tilde{u}_1^{\delta_1}\,;\ \ldots\,;\ \tilde{u}_n^{\delta_n}\,;\ \tilde{u}_1^{1-\delta_1}\,;\ \ldots\,;\ \tilde{u}_n^{1-\delta_n}\,;\ \underbrace{\tilde{v}_1\,;\ \ldots\,;\ \tilde{v}_1}_{\gamma_1 \text{ fois}}\,; \\ &\tilde{v}_1^{\alpha_1-\gamma_1}\,;\ \ldots\,;\ \underbrace{\tilde{v}_p\,;\ \ldots\,;\ \tilde{v}_1 p}_{\gamma_p \text{ fois}}\,;\ \tilde{v}_p^{\alpha_p-\gamma_p}\Big) \end{aligned}$$

et vérifie (grâce à la PROPOSITION 3) :

$$\|\mathcal{K}_{(\delta_1,\ldots,\delta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_p)}\|_1 \leq C_M|J|.$$

Par conséquent :

$$(26)\qquad m_I\big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_J) - m_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_J)\big| \leq \frac{2}{|I|}\Big\|\mathbf{1}_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_J)\Big\|_1 \leq C_M.$$

D'autre part, en appelant x_0 le centre de I et ℓ la longueur de I, on a immédiatement avec le LEMME 8 :

$$(27)\qquad \begin{aligned} m_I\big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c}) - m_I\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c})\big| &\leq 2m_I\big|\mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c}) - \mathcal{M}(\mathbf{1}_{J^c})(x_0)\big| \\ &\leq C_M \int_{|x_0-y|>2\ell,\,|x-x_0|\leq\ell} \frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x_0-y|^{3/2}}\,dy \leq C_M. \end{aligned}$$

De (26) et (27) on déduit (24) et la PROPOSITION 6.

Démonstration du THÉORÈME 2. — Pour simplifier, on note I à la place de $[x,y]$. On va montrer les implications $(B) \Rightarrow (A)$ et $(A) \Rightarrow (C)$. Lorsque $n = 1$, elles ont été prouvées dans les PROPOSITIONS 4, 5 et 6.

Supposons donc le théorème vrai jusqu'au rang $n-1$ et soit a une fonction telle que a^k appartient à $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

En écrivant $a^n = [(a - m_I a) + m_I a]^n$ et $m_I a^n = m_I[(a - m_I a) + m_I a]^n$ puis en développant ces deux expressions, on obtient par soustraction

$$\frac{1}{x-y}\{a^n - m_I a^n\} = \frac{1}{x-y}\sum_{j=2}^{n} C_n^j (a - m_I a)^j (m_I a)^{n-j} \tag{28}$$

$$- \frac{1}{x-y}\sum_{j=2}^{n} C_n^j (m_I a)^{n-j} m_I (a - m_I a)^j + \frac{n}{x-y}(m_I a)^{n-1}(a - m_I a).$$

Ceci prouve que $(B) \Rightarrow (A)$ grâce à l'hypothèse de récurrence. En effet, lorsque (B) est vérifié, la valeur en y du second membre de (28) est un noyau définissant un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$; par contre, la formule $(x-y)^{-1}\{a^n(y) - m_I a^n\}$ ne définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ que si $a^n \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ d'après la PROPOSITION 5.

Pour montrer $(A) \Rightarrow (C)$, on distingue les cas $k \geq 1$ et $k = 0$. Si $k \geq 1$, on multiplie les deux membres de (28) par l'expression

$$(a - m_I a)^{k-1} \prod_{i=0}^{p} m_I (a - m_I a)^{\ell_i}.$$

La valeur en y du second membre est alors une somme de noyaux, chacun définissant un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $a, \ldots, a^n$ appartiennent à $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ grâce à la PROPOSITION 4. Si $k = 0$, on peut supposer que l'un des ℓ_i (par exemple ℓ_p) est supérieur à 1. On multiplie alors les deux membres de (28) par

$$(a - m_I a)^{\ell_p - 1} \prod_{i=0}^{p-1} m_I (a - m_I a)^{\ell_i},$$

puis on prend la moyenne sur I des deux membres et on conclut encore grâce à l'hypothèse de récurrence et aux PROPOSITIONS 4 et 6.

Finalement, le THÉORÈME 2 est vrai à tout ordre. Ceci termine la démonstration du THÉORÈME 1.

Notons que cette approche ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda_n(a)$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque. — L'identité (28) et les estimations des normes d'opérateurs des PROPOSITIONS 4, 5 et 6 montrent facilement par récurrence que

$$\|\Lambda_n(a)\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|a^i\|_{\mathrm{BMO}} \|a\|_{\mathrm{BMO}}^{n-i} \simeq \sum_{i=1}^{n} \|a^i\|_{\mathrm{BMO}} \|a\|_{\mathrm{BMO}}^{n-i}$$

lorsque les a^k, pour $1 \leq k \leq n$, appartiennent à $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COIFMAN (R.R.) and MEYER (Y.). — On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **212**, 1975, p. 315–331.
[2] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — Le double commutateur, *Séminaire d'Analyse Harmonique*, Orsay 1976.
[3] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — Commutateurs d'intégrale singulière et opérateurs multilinéaires, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28**, t. **3**, 1978, p. 177–202.
[4] DAVID (G.) and JOURNÉ (J.L.). — A boundedness Criterion for generalized Calderon-Zygmund Operators, *Ann. of Math.*, t. **120**, 1984, p. 371–397.
[5] JOURNÉ (J.L.). — Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderon, *Lecture Notes in Math.* **994**, *Springer-Verlag*, 1983.
[6] MEYER (Y.) et TCHAMITCHIAN (P.). — Une remarque sur les fonctions dont les puissances appartiennent à BMO($\mathbf{R}^n$), *Centre de Math. de l'École Polytechnique, Palaiseau.*
[7] TRAN-OBERLÉ (C.). — Analyticité en dimension infinie et théorie des opérateurs, *Thèse*, Orsay, 1987.