BULLETIN DE LA S. M. F.

B. ANGÉNIOL
F. EL ZEIN

Théorème de Riemann-Roch par désingularisation

Bulletin de la S. M. F., tome 116, nº 4 (1988), p. 385-400
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_385_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 385–400.

THÉORÈME DE RIEMANN–ROCH PAR DÉSINGULARISATION

PAR

B. ANGÉNIOL ET F. EL ZEIN (*)

RÉSUMÉ. — Nous déduisons le théorème de Riemann–Roch sur une variété singulière à partir de sa désingularisée en utilisant des techniques introduites par Fulton et Gillet. Nous obtenons aussi une formule reliant les groupes de Quillen pour un morphisme birationnel et nous donnons des calculs de classes de Chern dans le cas des diviseurs à croisements normaux (DCN).

ABSTRACT. — We deduce the Riemann–Roch theorem on a singular variety from its desingularisation, by using techniques introduced by Fulton and Gillet. We obtain also a formula relating Quillen's groups for a birational morphism and we give computations of Chern classes in the case of normal crossing divisors (NCD).

Table des matières

Introduction

La plupart des questions dans [SGA 6] sur la théorie d'intersection sont maintenant élucidées. Le lecteur dispose actuellement du livre de FULTON [F] sur cette théorie et du livre d'ANGÉNIOL et LEJEUNE [A–L].

Il nous est apparu cependant que l'on peut simplifier davantage la théorie en utilisant la désingularisation au lieu d'un plongement pour établir le théorème de Riemann–Roch, ce qui permet d'éviter la construction du graphe de Mac Pherson. La technique utilisée s'inspire de celle de FULTON

(*) Texte reçu le 30 septembre 1985, révisé le 8 septembre 1988.

B. ANGÉNIOL, 2 allée Beaudelaire (80, av. Larroumès), 94240 L'Haÿ-les-Roses, France.

F. EL ZEIN, C.N.R.S.-U.A. n° 212, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématique, Tour n° 45–55, 5ᵉ étage, 75251 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1988/385/$ 5.00

et GILLET [F–G], [F]. Dans la suite, nous désignons *par* $K_i(X)$ *les groupes de Quillen des* $\mathcal{O}_X$*-modules cohérents* sur une variété X suivant ainsi les notations de [F] (au lieu de K'_i dans [Q]). Dans le deuxième paragraphe, nous donnons une suite exacte qui permet d'exprimer les groupes $K_i(X)$ d'une variété singulière en termes des groupes K_i de variétés lisses ou de diviseurs à croisements normaux (DCN). On utilise des techniques similaires aux constructions cohomologiques dans [E]. Nous ramenons des calculs de classes ou caractère de Chern au cas de DCN (2.3). La "formule clef" en est un exemple. Au troisième paragraphe, nous donnons des calculs de classes de Chern dans le cas d'un DCN. L'arbitre anonyme et H. ESNAULT ont apporté des améliorations au texte.

1. Riemann–Roch singulier

Le but de ce paragraphe est de déduire le théorème de Riemann–Roch pour toute variété algébrique à partir d'une désingularisée quasi-projective. Cette méthode qui utilise des techniques de FULTON et GILLET [F–G], [F], permet d'éviter la construction du graphe de Mac Phersor qui constituait le point central de toutes les démonstrations précédentes. Pour un schéma, la théorie est la même que pour la variété réduite sous-jacente. Nous reprenons les notations de [F].

1.1. THÉORÈME DE RIEMANN–ROCH. — *Soit k un corps tel que toute variété singulière sur k admette une résolution des singularités ; alors pour toute variété algébrique X (localement de type fini et séparée) sur k, il existe un morphisme unique τ_X du groupe de Grothendieck cohérent dans l'anneau de Chow à coefficients dans $\mathbb{Q}$*

$$\tau_X : K_0(X) \longrightarrow A_\bullet^{\mathbb{Q}}(X)$$

vérifiant

i) *Si X est lisse, τ_X est le produit du caractère de Chern et de la classe de Todd du fibré tangent i.e.* $\tau_X(\alpha) = \mathrm{ch}(\alpha) \cap \mathrm{Todd}(T_X)$.

ii) *τ_X est covariant pour les morphismes propres : si $f : X \to Y$ est propre et $\alpha \in K_0(X)$*

$$f_*\tau_X(\alpha) = \tau_Y(f_*\alpha).$$

Nous donnons la preuve après les préliminaires suivants.

1.2. A propos du lemme de Chow. — Fulton et Gillet ont introduit la notion de "Chow envelope" d'un schéma X. Il nous a semblé plus expressif de traduire ce terme par variété de Chow adaptée à X. Le lemme ci-dessous est semblable à celui de [F–G] ou [F].

Définition 1.2. — Une variété adaptée à X (ou "enveloppe" [F–G]) est un morphisme propre $p : X' \to X$ tel que pour toute sous-variété V de X, il existe une sous-variété V' dans $p^{-1}(V)$ telle que $P/V' : V' \to V$ soit birationnel. Une variété de Chow (resp. non singulière) adaptée est de plus quasi-projective (resp. non singulière).

1.3. LEMME.

i) *Toute variété X admet une variété de Chow non singulière $p : X' \to X$ qui lui est adaptée, vérifiant la condition suivante : il existe une sous-variété Y dans X d'image réciproque $Y' = p^{-1}(Y)$ telle que $X - Y$ soit dense dans X et que p induise un isomorphisme $(X'-Y') \xrightarrow{\sim} (X-Y)$.*

ii) *Si $p : X' \to X$ est une variété adaptée à X et si $q : X'' \to X'$ est une variété de Chow non singulière adaptée à X', alors $p \circ q : X'' \to X$ est une variété de Chow non singulière adaptée à X.*

iii) *Pour tout morphisme $f : Y \to X$ et toute variété de Chow non singulière $p : X' \to X$ adaptée à X, il existe une variété de Chow non singulière $q : Y' \to Y$ adaptée à Y et un morphisme $f' : Y' \to X'$ tels que $p \circ f' = f \circ q$; si de plus f est propre, f' peut être choisi propre.*

iv) *Si $p : X' \to X$ est une variété adaptée à X, les morphismes*

$$p_* : K_0(X') \longrightarrow K_0(X) \quad \text{et} \quad p_* : A_\bullet(X') \longrightarrow A_\bullet(X)$$

sont surjectifs ([G, corollaire 4.4]).

Preuve. — Pour i) on procède par récurrence sur $\dim X$. D'après le lemme de Chow (EGA II, 5.6), il existe un morphisme $p_1 : X_1 \to X$ et un fermé strict Y_1 de X tel que $p_1 : X_1 - p_1^{-1}(Y_1) \to (X - Y_1)$ soit un isomorphisme et que X_1 soit quasi-projective sur k.

Soit Y_2 un fermé strict de X_1 contenant $p_1^{-1}(Y_1)$ et tous les points singuliers de X_1. Il existe alors une résolution des singularités $q : X_1' \to X_1$ telle que pour $Y = p_1(Y_2)$, $p_1' = p_1 \circ q$, $Y_1' = p'^{-1}_1(Y)$, le morphsime induit $p_1' : (X_1' - Y_1') \to (X - Y)$ soit un isomorphisme. On peut supposer aussi Y_1' un diviseur à croisements normaux (DCN). Par récurrence sur la dimension, il existe une variété de Chow non singulière $p_2' : Y' \to Y$ adaptée à Y, alors $(p_1', p_2') : X' = X_1' \amalg Y' \to X$ est une variété de Chow non singulière adaptée à X.

L'assertion (ii) est immédiate et pour (iii), il suffit de prendre pour Y' une variété de Chow adaptée à $Y \times_X X'$, pour q le composé $Y' \to Y \times_X X' \to Y$, et pour f' le composé $Y' \to Y \times_X X' \to X'$. La définition même de variété adaptée assure que (iv) est vraie puisque $K_0(X)$ et $A_\bullet(X)$ sont engendrés par les classes des sous-variétés irréductibles.

1.4. LEMME [F–G]. — *Soit $p : X' \to X$ un morphisme projectif tel qu'il existe une immersion $i : Y \to X$ d'image inverse $i' : Y' = p^{-1}Y \to X'$,* *et que la restriction p' de p soit un isomorphisme $(X' - Y') \simeq (X - Y)$, alors on a une suite exacte*

$$K_0(Y') \xrightarrow{p'_* - i'_*} K_0(Y) \oplus K_0(X') \xrightarrow{i_* + p_*} K_0(X) \longrightarrow 0. \tag{1.4.1}$$

Preuve. — Il est possible de donner une démonstration directe de (1.4.1). Cependant une suite exacte analogue à (1.4.1) est classique dans les théories homologiques. D. Quillen a justement construit des groupes K_i pour toute variété algébrique [Q] qui, à bien des égards, se comportent comme des groupes d'homologie. Considérons donc les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1(X'-Y') & \longrightarrow & K_0(Y') & \longrightarrow & K_0(X') & \longrightarrow & K_0(X'-Y') & \longrightarrow & 0 \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \\ K_1(X-Y) & \longrightarrow & K_0(Y) & \longrightarrow & K_0(X) & \longrightarrow & K_0(X-Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on en déduit immédiatement (1.4.1).

1.5. *Preuve du théorème.*

Unicité. — Soit $p : X' \to X$ une variété de Chow lisse adaptée à X (1.3,i). Si τ_X existe et vérifie la fonctorialité en ii), on doit avoir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_0(X') & \xrightarrow{\mathrm{ch} \cap \mathrm{Todd}\, T_{X'}} & A_\bullet^{\mathbb{Q}}(X') \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ K_0(X) & \xrightarrow{\tau_X} & A_\bullet^{\mathbb{Q}}(X) \end{array} \tag{1.5.1}$$

et puisque le morphisme p est surjectif sur $K_0(X)$, d'après (1.3,iv), le morphisme τ_X est uniquement déterminé. Lorsque le diagramme (1.5.1) commute, on dira que τ est compatible avec p.

Covariance pour les variétés quasi-projectives non singulières. — Supposons avoir construit τ_X compatible avec une variété de Chow non singulière $p : X' \to X$. Alors pour tout morphisme propre $f : Y \to X$ où Y est quasi-projective non singulière, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_0(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & A_\bullet^{\mathbb{Q}}(Y) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ K_0(X) & \xrightarrow{\tau_X} & A_\bullet^{\mathbb{Q}}(X) \end{array}$$

est commutatif. En effet, soit Y' une variété de Chow non singulière adaptée à Y telle que l'on ait un diagramme commutatif (1.3,iii)

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

et soit $\alpha \in K_0(Y)$, d'après (1.3,iv) il existe $\alpha' \in K_0(Y')$ tel que $q_*(\alpha') = \alpha$. On a alors d'après la covariance de τ pour q et f' dans le cas non singulier :

$$\begin{aligned} f_*\tau_Y(\alpha) = f_*\tau_Y q_*(\alpha') = f_* q_* \tau_{Y'}(\alpha') = p_* f'_* \tau_{Y'}(\alpha') = \\ p_*\tau_{X'} f'_*(\alpha') = \tau_X p_* f'_*(\alpha') = \tau_X f_* q_*(\alpha') = \tau_X f_*(\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

(1.5.2) Si τ_X existe et vérifie (1.5.1), il est alors indépendant de la variété adaptée à X choisie.

Existence de τ_X. — On montre par récurrence sur n la propriété : (H_n) : pour tout X de dimension $\leq n$, il existe $\tau_X : K_0(X) \to A_\bullet^{\mathbf{Q}}(X)$ tel que pour tout morphisme $f : Z \to X$ où l'on ait

soit $\dim Z \leq n$ et $\dim X \leq n$,

soit $\dim Z \leq n$ et X lisse quasi-projective,

le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K_0(Z) \arrow[r, "\tau_Z"] \arrow[d, "f_*"'] & A_\bullet^{\mathbf{Q}}(Z) \arrow[d, "f_*"] \\ K_0(X) \arrow[r, "\tau_X"] & A_\bullet^{\mathbf{Q}}(X) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

L'assertion (H_0) est claire. On suppose (H_n) vraie et on montre (H_{n+1}). Soient X de dimension $n+1$ et $p : X' \to X$ une variété quasi-projective non singulière adaptée vérifiant (1.3,i) et considérons des fermés $Y \subset X$ et $Y' = p^{-1}Y \subset X'$ de dimension n tels que la restriction de p soit un quasi-isomorphisme : $(X' - Y') \xrightarrow{\sim} (X - Y)$. D'après (1.4), on peut construire un diagramme

$$\begin{tikzcd} K_0(Y') \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{Y'}"'] & K_0(Y) \oplus K_0(X') \arrow[r] \arrow[d, "\tau_Y \oplus \tau_{X'}"] & K_0(X) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tau_X"] & 0 \\ A_\bullet^{\mathbf{Q}}(Y') \arrow[r] & A_\bullet^{\mathbf{Q}}(Y) \oplus A_\bullet^{\mathbf{Q}}(X') \arrow[r] & A_\bullet^{\mathbf{Q}}(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la première ligne est la suite exacte (1.4.1) et où la deuxième ligne est construite de manière analogue (elle est exacte mais on n'a pas besoin de le savoir) et où $\tau_{Y'}$ et τ_Y existent par récurrence et $\tau_{X'}$ d'après le cas non singulier. On va démontrer que $\tau_Y \oplus \tau_{X'}$ induit le morphisme τ_X voulu. En effet, la propriété (H_n) assure que le carré de gauche est commutatif. Il reste à obtenir (H_{n+1}). D'après (1.5.2) τ_X est compatible avec toute variété de Chow non singulière adaptée. Soient Z de dimension $n+1$ et Z' une variété de Chow non singulière adaptée à Z telle que l'on ait le diagramme commutatif

(1.5.3)
$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

On sait construire τ_Z compatible avec q, et le même raisonnement de covariance ci-dessus (1.5.2) permet d'établir : $\tau_X \circ f_* = f_* \circ \tau_Z$. Si X est non singulier de dimension quelconque, le raisonnement ci-dessus s'applique aussi, ce qui démontre (H_{n+1}). La covariance dans (ii) s'obtient alors par ce même raisonnement appliqué à un diagramme (1.5.3) adéquat.

1.6. — Le morphisme τ_X construit dans ([F,18.3)] est covariant pour un morphisme propre. Il coïncide donc avec le τ_X construit ci-dessus (1.1) d'après l'unicité d'une construction τ covariante. On en déduit les propriétés suivantes de τ_X démontrées dans ([F, 18.3)].

(1.6.1) *Module.* — Si $\alpha \in K_0(X)$, $\beta \in K^0(X)$, alors $\tau_X(\beta \oplus \alpha) = \mathrm{ch}(\beta) \cap \tau_X(\alpha)$.

(1.6.2) *Intersections complètes.* — Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement intersection complète. Si X (resp. Y peut être immergé dans une variété lisse M (resp. P), alors

$$\tau_X f^* \alpha = \mathrm{Todd}(T_f) \cdot f^* \tau_Y(\alpha)$$

où T_f est l'espace tangent virtuel de f dans $K^0(X)$ et $\alpha \in K_0(Y)$.

(1.6.3) *Normalisation.* — Si V est une sous-variété de X de dimension n, alors

$$\tau_X(0_V) = [V] + \text{termes de dim } \leq n.$$

(1.6.4) *Plongement.* — Soit $i : X \to M$ une immersion fermée dans une variété lisse M. Soient F un faisceau cohérent sur X et $E_\bullet$ une résolution de i_*F par des faisceaux localement libres sur M, alors

$$\mathrm{ch}_X^M(E_\bullet) \cap [M] = \big(\mathrm{todd}(i^*T_M)\big)^{-1} \cap \tau_X(F)$$

d'après ([F, 18.3]). Cette formule peut servir donc à définir ici le terme de gauche.

Remarque. — Il est équivalent dans $A_\bullet^{\mathbb{Q}}X$ de calculer le caractère de Chern ou les classes de Chern, ce qui permet de déduire à partir de la formule ci-dessus (1.6.4) les classes $C_X^M(E_\bullet) \cap [M]$.

2. L'image réciproque sur les groupes K_i

Rappelons que nous utilisons la notation K_i pour les groupes de Quillen notés K_i' dans [Q]. Nous définissons l'image réciproque sur les groupes K_i, définie par un morphisme de variétés quasi-projectives, de manière à obtenir des suites exactes permettant de calculer ces groupes en termes de variétés régulières et DCN.

2.1. PROPOSITION. — *Soit $f : Y' \to Y$ un morphisme propre de variétés régulières et quasi-projectives sur un corps de caractéristique zéro. Considérons le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xleftarrow{j'} & (Y'-X') \\
{\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{i} & Y & \xleftarrow{j} & (Y-X)
\end{array}$$

où i (resp. i') désigne une immersion fermée de X (resp. $X' = f^{-1}(X)$) et où f' est induit par f. Supposons de plus que f induise un isomorphisme $(Y'-X') \simeq (Y-X)$ d'ouverts denses dans X' et X.

i) *Il existe sur les groupes de Quillen des modules cohérents un morphisme*

$$f^* : K_i(Y) \longrightarrow K_i(Y') \textit{ vérifiant } f_* \circ f^* = \mathrm{Id}$$

et de plus un morphisme qui dépend de l'immersion i

$$f^*/X : K_i(X) \longrightarrow K_i(X')$$

vérifiant

$$i'_* \circ (f^*/X) = f^* \circ i_* \textit{ et } f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}\,.$$

ii) *On a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow K_i(X) \xrightarrow{(f^*/X)-i_*} K_i(X') \oplus K_i(Y) \xrightarrow{i'_*+f^*} K_i(Y') \longrightarrow 0.$$

Preuve : Cas des groupes de Grothendieck K_0. — Pour les lecteurs non familiarisés avec les K_i supérieurs, on donne une démonstration indépendante pour les K_0. On définit $f^* : K_0(Y) \to K_0(Y')$ pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohérent F par la formule

$$f^*[F] = \Sigma(-1)^i \big[\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{O}_Y, F)\big]. \tag{2.1.1}$$

Soit $\mathcal{M}_X(Y)$ la catégorie des 0_Y-modules cohérents à support dans X. D'après QUILLEN [Q] : $K_0(X) \simeq K_0(\mathcal{M}_X(Y))$. Lorsque $F \in \mathcal{M}_X(Y)$, on vérifie que $f^*[F]$ (2.1.1) appartient à $K_0(\mathcal{M}_{X'}(Y')) = K_0(X')$, d'où f^*/X vérifiant $i'_* \circ (f^*/X) = f^* \circ i_*$. Pour démontrer $f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}$ on utilise la formule de projection : $f_*(x \cdot f^*y) = (f_*x) \cdot y$ pour tous $x \in K_0(Y')$ et $y \in K_0(Y)$. En particulier, on a pour $x = [0_{Y'}]$: $(f_* \circ f^* \times y) = (f_*[0_{Y'}]) \cdot y$. On a $R^i f_* 0_{Y'} = 0$ pour tout $i > 0$ (question de BOREL–SERRE [B–S, 3 p.102]). Ce résultat se déduit maintenant par dualité, du théorème d'annulation de Grauert–Riemenschneider, sur la cohomologie du complexe dualisant sur Y' : $R^i f_* w_{Y'} = 0$ pour tout $i > 0$. En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_* 0_{Y'} &\simeq \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om(w_{Y'}, w_{Y'}) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{R}f_* w_{Y'}, w_Y) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om(f_* w_{Y'}, w_Y) \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{R}f_* 0_{Y'} \simeq 0_Y$ puisque $f_* w_{Y'} = w_Y$. Revenons à l'égalité $f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}$. Soit F un 0_X-module cohérent, et considérons une résolution localement libre sur Y : $E^\bullet \xrightarrow{\sim} i_* F$, alors on a :

$$\begin{aligned} (f^*/X)[F] &= \Sigma(-1)^i \mathcal{H}^i(f^* E^\bullet), \\ f'_* \circ (f^*/X)[F] &= \Sigma(-1)^{i+j} R^j f'_* \big(\mathcal{H}^i(f^* E^\bullet)\big). \end{aligned}$$

D'après la suite spectrale $R^j f'_* \mathcal{H}(f^* E^\bullet) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}(E^\bullet)$, on trouve :

$$[F] = \Sigma(-1)^{i+j} \big[R^j f'_* \mathcal{H}^i(f^* E^\bullet)\big].$$

Cas général des groupes de Quillen. — La preuve s'inspire de celle de la formule de projection chez QUILLEN ([Q, § 7, 2.10 p. 118]). Alors qu'en catégorie dérivée on résoud des complexes pour dériver un foncteur, en K-théorie nous introduisons des sous-catégories adaptées à un foncteur pour calculer le morphisme induit sur les groupes K_i. Ainsi, nous désignons par $M(Y)$ (resp. $(P(Y))$ la catégorie des 0_Y-modules cohérents, (resp. projectifs), et on écrit $M_X(Y)$ quand on exige de plus que le support soit dans X, alors que $P(Y, f) \subset M(Y)$ est la sous-catégorie des faisceaux Tor-acycliques pour f. Le foncteur $f^* : P(Y) \to P(Y')$ induit $f^* : K_i(Y) \to K_i(Y')$ puisque Y et Y' sont régulières. On déduit la relation $f_* \circ f^* = \mathrm{Id}$ à partir de la formule de projection pour les K_i comme ci-dessus, en utilisant le théorème de Grauert-Riemenschneider : $\mathbb{R}f_* w_{Y'} \simeq w_Y$.

Définition de f^*/X. — Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i'"] \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, "\delta"] & & Y' \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dd, "f"] & & Y' \times Y \arrow[ddll, "p"] \\
& Y' \times X \arrow[ur] \arrow[dl] & & & \\
X \arrow[rr, "i"] & & Y & &
\end{tikzcd}$$

où $\delta = (i', f')$. L'immersion Γ est régulière et par conséquent, $\Gamma_* 0_{Y'} \xleftarrow{\approx} A^\bullet$ admet une résolution finie à gauche par des $0_{Y' \times Y}$-modules projectifs. On a ainsi sur la catégorie des modules f^*-acycliques $P(Y, f)$ une résolution du foncteur f^* par la suite de foncteurs $A^\bullet \otimes p^*$. On en déduit d'après ([Q, § 3, Corollaire 1, p. 98])

$$\Gamma_* \circ f^*(\alpha) = \sum_i (-1)^i A^i \otimes p^*(\alpha) \tag{2.1.2}$$

pour tout $\alpha \in K_i(Y)$ puisque ce groupe est égal à $K_i(P(Y, f))$. Chacun des foncteurs $A^i \otimes p^* : M_X(Y) \to M_{X'}(Y')$ est exact et définit donc un morphisme $A^i \otimes p^* : K_i(X) \to K_i(X')$. On définit f^*/X par la formule $f^*/X = \Sigma_i (-1)^i A^i \otimes p^*$. Il vérifie d'après (2.1.2) la formule $i'_* \circ (f^*/X) = f^* \circ i_*$.

La relation $f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}$ (formule de projection) : Pour calculer p_* nous considérons une résolution de $A^\bullet \xrightarrow{\approx} B^{\bullet\bullet}$ par des $0_{Y \times Y'}$-modules localement libres et p_*-acycliques ([Q, § 7, 2.7ii]), alors $B^{i,j} \otimes p^* F$ est p_*-acyclique pour tout 0_Y-module, d'où $A^i \otimes p^* = \sum (-1)^j B^{i,j} \otimes p^*$. Le foncteur $p_*(B^{i,j} \otimes p^*) = p_* B^{i,j} \otimes \mathrm{Id} : M_X(Y) \to M_X(Y)$ est exact, et induit donc un morphisme $p_* B^{i,j} \otimes \mathrm{Id} : K_i(X) \to K_i(X)$. On a :

$$f'_* \circ (f^*/X) = p_* \circ \Gamma_* \circ (f^*/X) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} p_* B^{i,j} \otimes \mathrm{Id}\,.$$

De plus, $\mathbb{R}f_* 0_{Y'} \xrightarrow{\approx} 0_Y \xrightarrow{\approx} p_*(sB^{\bullet\bullet})$ où s désigne le complexe simple associé, d'où $\sum_{i,j} (-1)^{i+j} p_* B^{i,j} \otimes \mathrm{Id} = 0_Y \otimes \mathrm{Id}$ est égal à l'identité.

ii) La suite exacte (2.1, ii) se déduit formellement, comme dans le cas de la cohomologie [E], du diagramme à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_i(Y'-X') & \longrightarrow & K_{i-1}(X') & \longrightarrow & K_{i-1}(Y') & \longrightarrow & K_{i-1}(Y'-X') \\
\wr\downarrow & & f'_* \downarrow\uparrow f^*/X & & f_* \downarrow\uparrow f^* & & \downarrow\wr \\
K_i(Y-X) & \longrightarrow & K_{i-1}(X) & \longrightarrow & K_{i-1}(Y) & \longrightarrow & K_{i-1}(Y-X)
\end{array}$$

Remarques.

i) Nous avons besoin de la caractéristique zéro pour appliquer le théorème de Grauert-Riemenschneider : $\mathbb{R}f_*\omega_{Y'} \simeq \omega_Y$. Nous utilisons aussi la régularité de Γ mais on peut éviter cet argument en considérant dès le départ une factorisation de f en une immersion régulière et une projection lisse. Nous ne savons pas si cette restriction sur la caractéristique est essentielle.

ii) Dans le diagrame (2.1) on peut supposer, en éclatant seulement au-dessus des singularités de X, que X' est une variété “à croisements normaux” réunion du DCN exceptionnel et de l'image stricte de X qui est alors une désingularisée de X.

2.2. *Réduction au cas d'un DCN, d'une formule du type Riemann-Roch sans dénominateurs.*

2.2. Corollaire. — *Avec les notations de* (2.1), *pour tout* $\alpha \in K_0(X)$, *les classes de Chern vérifient*

$$C(i_*\alpha) = f_*C\big(i'_* \circ (f^*/X)\alpha\big).$$

Preuve.

$$C(i_*\alpha) = f_* \circ f^*C(i_*\alpha) = f_*C(f^* \circ i_*\alpha) = f_*C(i'_* \circ (f^*/X)\alpha).$$

2.3. — Reprenons les notations de (2.1) et désignons, pour tout espace Z, par $A_*(Z)$ les groupes de cycles modulo équivalence rationnelle (de Chow). Nous allons construire un diagramme de morphismes commutatifs à lignes exactes

$$(D)\qquad \begin{array}{ccccc}
A_i(X') & \xrightarrow{\;i'_*\;} & A_i(Y') & \longrightarrow & A_i(Y'-X') \\
f'_* \downarrow\uparrow f^*/X & & f_* \downarrow\uparrow f^* & & \downarrow\uparrow\wr \\
A_i(X) & \xrightarrow{\;i_*\;} & A_i(Y) & \longrightarrow & A_i(Y-X)\,;
\end{array}$$

où $f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}, f_* \circ f^* = \mathrm{Id}$. Pour construire f^* nous considérons une factorisation de f en une immersion régulière Γ_f, celle du graphe de f et la projection lisse $p : Y' \times Y \to Y$. On pose pour tout $\alpha \in A_i(Y)$

$$f^*(\alpha) = \Gamma_f^* \circ p^*(\alpha) = Y' \bigcap_{Y'\times Y} p^*(\alpha).$$

La définition de f_* est classique, aussi bien que f'_*. Des formules d'intersection très fines dans [F] vont permettre de définir f^*/X. Soit le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook, "\Gamma_f"] & Y' \times Y \arrow[r, "p"] & Y \\ X' \arrow[u, "i'"] \arrow[r] & Y' \times X \arrow[u, "i''"'] \arrow[r, "p'"] & X \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Pour tout $\alpha \in A_i(X)$, on pose

$$(f^*/X)(\alpha) = p'^*(\alpha) \bigcap_{Y'\times Y} Y' \in A_i(X').$$

La formule de projection $f_*(Y' \cap f_*\alpha) = (f_*Y') \cap \alpha = Y \cap \alpha = \alpha$ permet d'établir la relation $f_* \circ f^* = \mathrm{Id}$. La formule de projection dans ([F, 8.1.1(c), p. 132]) permet d'établir la relation $f'_* \circ (f^*/X) = \mathrm{Id}$.

Problème 2.3. — Avec les notations du diagramme (D) ci-dessus et sous les hypothèses de (2.1), la suite suivante est-elle exacte?

$$0 \longrightarrow A_i(X) \xrightarrow{(f^*/X)-i_*} A_i(X') \oplus A_i(Y) \xrightarrow{i'_*+f^*} A_i(Y') \longrightarrow 0.$$

Remarques.

i) Il existe un scindage à gauche fourni par un morphisme s induisant f'_* sur $A_i(X')$ et zéro sur $A_i(Y)$ tel que $s\circ((f^*/X)-i_*) = f'_*\circ(f^*/X) = \mathrm{Id}$. Pour tout $\alpha \in A_i(Y')$, la restriction de $\alpha - f^* \circ f_*(\alpha)$ à $Y' - X'$ est nulle et par conséquent $\alpha - f^* \circ f_*(\alpha)$ est dans l'image de i'_*, d'où la surjectivité à droite. Il suffit donc de prouver la relation dans $A_i(X')$

$$(R) \qquad \ker f'_* \cap \ker i'_* = 0$$

alors i'_* induit nécessairement un isomorphisme de $\ker f'_*$ sur $\ker f_*$, et la suite exacte s'en déduit.

ii) Si l'on prolonge le diagramme (D) à gauche et à droite, par les groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{K}_{i,Y'}$ en haut et $\mathcal{K}_{i,Y}$ en bas, la relation en question peut être déduite de la compatibilité de f^*/X : $H^i_X(Y,\mathcal{K}_i) \to H^i_{X'}(Y',\mathcal{K}_i)$ avec f^*/X dans (D). Nous ne savons pas si elle découle de l'article de GRAYSON [Gr].

Comme l'arbitre nous l'a fait remarquer, on ne connaît pas l'existence du morphisme trace sur la cohomologie des faisceaux $\mathcal{K}_i$.

iii) En un sens, la formule clef ([F, 6.7, p. 114]) est un calcul explicite de f^*/X dans le cas où i est une immersion régulière et f est l'éclaté de Y en X. Dans ce cas, la suite exacte (2.3) peut en être déduite ([F, 6.7(e), p. 115]).

3. Riemann-Roch sans dénominateur pour un DCN

Le COROLLAIRE (2.2) montre qu'en caractéristique zéro, pour tout $\alpha \in K_0(X)$, le calcul de la classe de Chern de $i_*\alpha$ se ramène à $C(i'_* \circ (f^*/X)\alpha)$ où l'on peut supposer X' un DCN dans Y'. L'objet de ce paragraphe est donc l'étude des classes de Chern pour les DCN.

3.1. — Soient Y une variété régulière et X un DCN dans Y, de composantes irréductibles X_i, $i \in [1,n]$ régulières. Désignons par $\delta : X \to Y$ et par $j_i : X_i \to X$ les immersions canoniques. Pour tous $\alpha_i \in K_0(X_i)$ et $\alpha = \sum j_{i*}\alpha \in K_0(X)$, $C(\delta_*\alpha)$ se calcule à partir de $C(\alpha_i)$. Le but de ce paragraphe est d'exhiber une classe $\tilde{\alpha}$ dans $A_*(X)$ telle que $C(\delta_*\alpha)$ soit égale à $1+$ l'image de $\tilde{\alpha}$ dans $A_*(Y)$ par un morphisme canonique.

3.2. Suite de Mayer-Vietoris.

LEMME 3.2. — *Soient $j^i_{i_1,i_2} : X_{i_1} \cap X_{i_2} \to X_i$ et $j_i : X_i \to X$ les immersions canoniques pour X un* DCN. *On a une suite exacte*

$$\bigoplus_{1\le i_1<i_2\le n} K_0(X_{i_1} \cap X_{i_2}) \xrightarrow{\ a\ } \bigoplus_{1\le i\le n} K_0(X_i) \xrightarrow{\ b\ } K_0(X) \longrightarrow 0$$

où $b = \sum_{i=1}^n j_{i*}$ et la composante de $a : K_0(X_{i_1} \cap X_{i_2}) \to K_0(X_i)$ est égale à $j^i_{i_1,i_2*}$ si $i = i_1$, $-j^i_{i_1,i_2*}$ si $i = i_2$ et 0 si $i \neq i_1, i_2$.

Preuve. — Le cas $n = 2$ se déduit de la suite (1.4.1) où on fait $X = X_1 \cup X_2$, $Y = X_1$ et $X_2 = X'$, ce qui suggère une récurrence sur n. En effet, le cas $n-1$ s'applique à $V = X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}$ et on applique de nouveau (1.4.1) à $X = V \cup X_n$.

3.3. **Polynôme de Jouanolou.** — Soient $x_1, \ldots, x_d$; $y_1, \ldots, y_e$ des variables, et soient $s_1, \ldots, s_d$ (resp. $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$) les fonctions symétriques élémentaires en $(x_1, \ldots, x_d)$ (resp. $y_1, \ldots, y_e$). Le polynôme de Jouanolou $P \in \mathbb{Z}[U_1, \ldots, U_d\,;\ R\,;\ T_1, \ldots, T_e]$ est le polynôme tel que l'on ait :

$$\text{(3.3.1)} \qquad P(s_1, \ldots, s_d\,;\ e, \sigma_1, \ldots, \sigma_e) = \frac{1}{x_1 \ldots x_d}\Big[\Big(\prod_{p=0}^{d}\prod_{j=1}^{e}\prod_{i_1<\cdots<i_p}(1 + y_j - x_{i_1} \ldots - x_{i_p})^{(-1)^p}\Big) - 1\Big].$$

Si D et E sont deux fibrés de rang d et e, on écrit parfois $P(D, E)$ au lieu de $P(C(D)\,;\ rgE, C(E))$.

3.4. — Quand on ajoute une variable x_{d+1}, puis que l'on fait $x_{d+1} = 0$ dans le polynôme $P(s_1, \ldots, s_{d+1}\,;\ e, \sigma_1, \ldots, \sigma_e)$, on retrouve $P(s_1, \ldots, s_d\,;\ e, \sigma_1, \ldots, \sigma_e)$. Par contre, si l'on ajoute une variable y_{e+1}, puis que l'on fasse $y_{e+1} = 0$ dans $P(s_1, \ldots, s_d, e + 1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{e+1})$ on trouve la formule

$$P(s_1, \ldots, s_d, e + 1, \sigma_1, \ldots, \sigma_e) = P(s\,;\ e, \sigma) + P(s\,;\ e, \sigma) \cdot Q(s) + \frac{Q(s)}{s_d}$$

où

$$Q(s) = \Big(\prod_{p=0}^{d}\prod_{i_1<\cdots<i_p}(1 - x_{i_1} \ldots - x_{i_p})^{(-1)^p}\Big) - 1.$$

On a aussi

$$Q(s) = Q(D) = C(\Lambda \cdot D),$$

$$P(D, E \oplus \mathcal{O}_Y) = P(D, E) + P(D, E) \cdot Q(D) + \frac{Q(D)}{C_d(D)}.$$

LEMME 3.4. — *Soit une suite exacte* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *de fibrés vectoriels de rang respectifs* e', e *et* e'', *on a alors*

$$P(D, E) = P(D, E') + P(D, E'') + C_d(D)P(D, E')P(D, E'').$$

3.5. **Riemann-Roch sans dénominateurs.** — Pour toute immersion fermée $f : Z \to T$ de variétés régulières, de fibré normal N, et pour tout fibré E sur Z, on a ([F, théorème 15.3, p. 297])

$$C(f_*E) = 1 + f_*\big(P(N, E)\big).$$

3.6. **Calcul de classes de Chern.** — Pour toute variété régulière X, on désigne par $\operatorname{Ch} A(X)$ et on dit Chern de $A(X)$ le groupe

$$\operatorname{Ch} A(X) = \mathbb{Z} \times \big(1 + \prod_{i>0} A^i(X)\big).$$

On déduit du produit sur $A^\bullet(X)$ la loi de groupe sur $\operatorname{Ch} A(X)$, notée additivement $(n,x)+(n',x')=(n+n',x\cdot x')$.

Soient N_i (resp. $N^i_{i_1,i_2}$) les fibrés normaux de X_i dans Y (resp. $X_{i_1,i_2} = X_{i_1}\cap X_{i_2}$ dans X_i) et enfin $\delta_i = \delta\circ j_i$. On construit les morphismes suivants :

$$\bigoplus_{1\le i_1<i_2\le n} \operatorname{Ch} A(X_{i_1,i_2}) \xrightarrow{\ \alpha\ } \bigoplus_{1\le i\le n} \operatorname{Ch} A(X_i) \xrightarrow{\ \beta\ } \operatorname{Ch} A(Y).$$

La composante de α de $\operatorname{Ch} A(X_{i_1,i_2})$ dans $\operatorname{Ch} A(X_i)$ est égale à zéro si $i\neq i_1,i_2$

$$\begin{aligned}\alpha(e,1+z) &= \big(0,1+j^i_{i_1,i_2*}P(N^i_{i_1,i_2},e,z\big) \quad \text{si} \quad i=i_1,\\ \alpha(e,1+z) &= \big(0,1-j^i_{i_1,i_2*}P(N^i_{i_1,i_2},e,z\big) \quad \text{si} \quad i=i_2.\end{aligned}$$

Alors que β est la somme des morphismes

$$\beta_i : (e_i,1+z_i) \longrightarrow \big(0,1+j_{i*}P(N_i,e_i,z_i)\big).$$

Lorsque $e=0$, $P(N_i,0)$ est nul. De plus, α et β sont des morphismes de groupes. Vérifions le pour β. D'après le LEMME (3.4)

$$\begin{aligned}&j_{i*}P\big(N_i,e+e',z\cdot z'\big) =\\ &\qquad j_{i*}\big(P(N_i,e,z)+P(N_i,e',z)+C_{d_i}(N_i)P(N_i,e,z)P(N_i,e',z')\big)\end{aligned}$$

et d'après la formule de self-intersection :

$$j_i^* j_{i*}P(N_i,e,z) = C_{d_i}(N_i)P(N_i,e,z),$$

alors on trouve en appliquant la formule de projection

$$j_{i*}P(N_i,e,z)+j_{i*}P(N_i,e',z')+j_{i*}P(N_i,e,z)\cdot j_{i*}P(N_i,e',z')$$

d'où

$$1+j_{i*}P(N_i,e+e',z\cdot z') = \big(1+j_{i*}P(N_i,e,z)\big)\big(1+j_{i*}P(N_i,e',z')\big)$$

soit

$$\beta_i\big((e,z)+(e',z')\big) = \beta_i(e,z)+\beta_i(e',z').$$

PROPOSITION 3.6. — *Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\bigoplus_{1\le i_1<i_2\le n} K_0A(X_{i_1}\cap X_{i_2}) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} K_0A(X_i) & \xrightarrow{\ \delta_*\circ b\ } & K_0A(Y)\\
\Big\downarrow C & & \Big\downarrow C & & \Big\downarrow C\\
\displaystyle\bigoplus_{1\le i_1<i_2\le n} \operatorname{Ch} A(X_{i_1}\cap X_{i_2}) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ch} A(X_i) & \xrightarrow{\ \beta\ } & \operatorname{Ch} A(Y)
\end{array}$$

est commutatif, et toutes les flèches sont des morphismes de groupes, y compris les classes de Chern C.

Preuve. — Résulte de (3.5).

3.7. *Remarques.*

i) Soit N un fibré inversible, alors

$$\begin{aligned} P(N\,;\ e,z_\bullet) &= 1/x\Big[\Big(\prod_{j=1}^{e}(1+y_j)(1/1+y_j-x)\Big)-1\Big] \\ &= 1/x\Big[\prod_{j=1}^{e}(1+x+\cdots)-1\Big] = e+\cdots \end{aligned}$$

de sorte que $1/eP(N,e,z_\bullet)$ est inversible si on peut diviser par e. En particulier, $P(N^i_{i_1i_2},e,z_\bullet)\notin \mathrm{Ch}\,A(X_{i_1i_2})$ mais $j^i_{i_1i_2*}P(N^i_{i_1i_2},e,z_\bullet)\in \mathrm{Ch}\,A(X_i)$.

ii) Le carré à droite dans le diagramme (3.6) réaffirme que si l'on écrit $\alpha\in K_0(X)$ comme $\alpha=b(\Sigma_i\alpha_i)$, alors $C(\delta_*\alpha)=\beta(\Sigma_iC(\alpha_i))$.

3.8. — Désignons par $\mathrm{Ch}\,A(X)=\mathrm{Coker}\,\alpha$. C'est un groupe qui ne dépend que de X. De plus, on déduit de β un morphisme unique $\tilde\beta':\mathrm{Ch}\,A(X)\to\mathrm{Ch}\,A(Y)$. Si $\pi:\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Ch}\,A(X_i)\to\mathrm{Ch}\,A(X)$ désigne la projection canonique, on a $\beta'\circ\pi=\beta$.

COROLLAIRE 3.8. — *Soit* $\mathrm{Ch}\,A(X)=\mathrm{Coker}\,\alpha$. *Il existe un morphisme unique $C':K_0(X)\to\mathrm{Ch}\,A(X)$ tel que l'on ait $\tilde\beta'\circ C=C\circ\delta_*$ dans* $\mathrm{Ch}\,A(Y)$.

Preuve. — Résulte de (3.2) et (3.6).

LEMME 3.9. — *On a une suite exacte*

$$\bigoplus_{1\le i_1<i_2\le n} A_\bullet(X_{i_1}\cap X_{i_2})\xrightarrow{\ a'\ }\bigoplus_{i=1}^{n}A_\bullet(X_i)\xrightarrow{\ b'\ }A_\bullet(X)\longrightarrow 0$$

où a' et b' sont des morphismes définis de manière analogue à (3.2).

Preuve. — Par récurrence sur n, comme en (3.2). Le cas $n=2$ se trouve dans ([F, (1.3.1,C) p. 11]).

3.10. — On obtient $\dot\alpha$ dans (3.6) en faisant agir des polynômes du type $P(N^i_{i_1i_2},e,z)$ sur $\prod_{i>0}A^i(X_{i_1}\cap X_{i_2})$ à valeur dans $A_\bullet(X_{i_1}\cap X_{i_2})$ puis en faisant opérer a' dans (3.9). On en déduit $\mathrm{Im}\,\alpha\subset 1+\mathrm{Im}\,a'$, d'où d'après

(3.9) une projection canonique $p : \mathrm{Ch}(A(X) \to \mathbb{Z} \times (1 + \prod_{i<\dim X} A_i(X))$. De plus, $\tilde{\beta}'$ se factorise par p et un morphisme $\tilde{\beta}$.

COROLLAIRE 3.10. — *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "\delta *"] \arrow[d, "C"'] & K_0(Y) \arrow[d, "C"] \\ \mathbb{Z} \times \left(1 + \prod_{i<\dim X} A_i(X)\right) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \mathrm{Ch}\, A(Y) \end{tikzcd}$$

De plus, la classe de Chern C se factorise par un morphisme de groupes $C' : K_0(X) \to \mathrm{Ch}\, A(X)$, (3.8).

BIBLIOGRAPHIE

[A–L] ANGÉNIOL (B.) et LEJEUNE (M.). — *Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique.* — A paraître chez Hermann, Paris, France.

[B–S] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). — Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. France*, t. **86**, 1958, p. 97–136.

[E] EL ZEIN (F.). — Mixed Hodge Structures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **275**, 1983, p. 71–106.

[F] FULTON (W.). — *Intersection Theory, Ergebnisse der Math.* — Springer Verlag.

[F–G] FULTON (W.) and GILLET (H.). — Riemann-Roch for general algebraic schemes, *Bull. Soc. Math. France*, t. **111**, 1983, p. 287-300.

[G] GILLET (H.). — Homological descent for the K-theory of coherent sheaves, *Springer Lectures Notes* **1046**.

[Gr] GRAYSON (D.). — Products in K-theory and intersecting algebraic cycles, *Invent. Math.*, t. **47**, 1978, p. 71–84.

[Q] QUILLEN (D.). — Higher algebraic K-theory I, *Lecture Notes in Math.* **341**, *Springer Verlag.*

[EGA II] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). — Éléments de Géométrie Algébrique, *Publ. Math. IHES* **8**, 1961.

[SGA 6] BERTHELOT (P.), GROTHENDIECK (A.) et ILLUSIE (L.). — Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch, 1966–67, *Springer Lecture Notes* **225**, 1971.