BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LAQUIERE

Note sur le nombre des marches rentrantes, que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 11-17
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__11_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

GÉOMÉTRIE DE L'ÉCHIQUIER.

Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total; par M. É. Laquière.

(Séance du 19 mars 1880.)

Dans le travail que nous avons eu l'honneur d'adresser à la Société il y a peu de temps, nous avons eu le regret de ne pouvoir citer les études déjà insérées au *Bulletin* par M. Flye Sainte-Marie, sur le nombre des marches parcourant successivement les trente-deux cases d'un demi-échiquier. Faute de pouvoir jeter les yeux sur cet article intéressant, qui compléterait fort savamment l'une des solutions logiques du problème d'Euler à laquelle nous avons été conduit nous-même, nous n'avons pu rendre à notre éminent collègue l'hommage mérité; nous sommes heureux de réparer aujourd'hui l'oubli involontaire que des souvenirs trop vagues nous avaient obligé de commettre, et nous en profitons pour utiliser cet article en dénombrant toutes les solutions, marches rentrantes sur l'échiquier total, qui en dérivent comme composées de deux courses indépendantes l'une de l'autre, mais raccordées entre elles en tête et en queue, décrites successivement sur l'une et l'autre moitié de l'échiquier carré.

M. Flye Sainte-Marie démontre, d'une manière aussi simple qu'ingénieuse, que les trente-deux cases du demi-échiquier doivent être classées en deux groupes de seize, qu'il distingue en employant pour désigner les cases similaires un numéro simple dans le premier groupe, le même numéro accentué dans le second. Les deux groupes ainsi notés sont d'ailleurs, abstraction faite de l'accent, symétriques par rapport à la grande médiane du demi-échiquier et se composent, le premier des cases comprises dans notre travail parmi les éléments A et C, le second des cases des éléments D et B. Les cases impaires sont extérieures (ou frontières) : les cases paires, intérieures. L'auteur démontre que : 1° pour remplir les trente-deux cases à la file, il est indispensable que les seize cases d'un même système soient parcourues tout d'une venue ; 2° le point de départ et celui d'arrivée sont sur deux cases extérieures de systèmes différents (point que nous avions remarqué, mais dont la démonstration si simple nous avait échappé) ; 3° dans un même groupe (seize cases à numéros simples ou seize accentuées) la case de départ et la case d'arrivée sont l'une intérieure et l'autre extérieure.

M. Flye fait ensuite connaître le nombre de parcours qui unissent deux cases extrêmes possibles d'un même système, ainsi que le nombre de manières distinctes de faire parcourir au cavalier le demi-échiquier.

Pour en déduire le nombre des marches rentrantes sur l'échiquier total formées de deux parcours successifs comblant successivement les deux demi-échiquiers, nous formerons, avec les nombres donnés par l'auteur, un tableau M à double entrée donnant le nombre de parcours entre les deux cases extrêmes désignées d'un même groupe de seize cases du demi-échiquier. Ce nombre sera inscrit au point de croisement de la colonne et de la ligne aboutissant, sur la ligne et la colonne du cadre, aux deux cases d'entrée et de sortie du groupe. On aura soin de combiner les cases d'entrée et de sortie entre les côtés du cadre aboutissant ensemble à l'angle supérieur gauche ou à l'angle inférieur droit du Tableau.

Tableau M.

Nombre de parcours (d'après M. Flye Sainte-Marie) entre les deux cases extrêmes désignées d'un même groupe (accentué ou non) du demi-échiquier.

o·····	1	5	9	13	
2	22	8	13	10	16
4	8	3	3	6	14
6	8	2	3	3	12
8	16	2	6	3	10
10	13	3	6	5	8
12	8	3	2	3	6
14	10	3	5	4	4
16	33	8	16	8	2
	15	11	7	3	·····o

Ce Tableau nous servira à former, avec une facilité et une rapidité extrêmes, un second Tableau N indiquant le nombre des parcours de trente-deux cases d'un demi-échiquier unissant deux cases extrêmes désignées (sauf l'accentuation) comprises dans la même bande frontière. Ces deux cases, non accentuées sur le cadre du Tableau qui les indique comme ci-dessus, appartenant à l'un et l'autre des deux groupes différents, devront être considérées l'une comme sans accent, l'autre comme accentuée.

La frontière supérieure est composée des cases dont le numérotage est de l'une des deux formes $(4n+1)$ ou $(4p-1)'$.

La frontière inférieure des cases de la forme $(4n-1)$ ou $(4p+1)'$.

Tableau N.

Nombre de parcours de trente-deux cases entre deux extrêmes situées sur la même bande frontière (suivant les besoins, accentuer soit le chiffre de la colonne, soit celui de la bande désignant les cases extrêmes du parcours.)

	3	7	11	15
1	672	772	502	1872
5	180	208	136	502
9	276	304	208	772
13	240	276	180	672

On remarquera que les nombres de ce Tableau sont symétriques par rapport à la diagonale supérieure droite, les nombres complémentaires à seize correspondant à des groupes de marches symétriques les unes des autres par rapport à la petite médiane.

La disposition du Tableau M se prête au calcul rapide des nombres du Tableau N en raison des remarques suivantes.

Les marches de trente-deux cases entre deux cases extrêmes données se composent de douze groupes distincts d'après les douze sauts de passage d'un groupe à l'autre, qui se font entre les cases intérieures de l'un et l'autre groupe différant en plus ou en moins de quatre unités, l'une accentuée et l'autre sans accent. Les marches de seize cases à combiner deux à deux ayant ces cases pour extrêmes ont leurs nombres inscrits dans le Tableau M sur les lignes horizontales distantes de deux rangs et se correspondront, par suite, d'une manière commode pour donner à la fois tous les facteurs des combinaisons en faisant glisser l'une par rapport à l'autre, de deux lignes de bas en haut, puis de deux lignes de haut en bas, les colonnes ayant pour entête l'une des deux cases extrêmes des marches de trente-deux cases à énumérer. Comme exemple, nous donnerons le calcul du nombre de marches dont les cases extrêmes sont 7 et 1′ :

Sauts de passage.	Nombre de marches combinées.
2,6′	16.8 = 128
4,8′	5.16 = 80
6,10′	2.13 = 26
8,12′	6.8 = 48
10,14′	6.10 = 60
12,16′	3.33 = 99
6,2′	2.22 = 44
8,4′	6.8 = 48
10,6′	6.8 = 48
12,8′	3.16 = 48
14,10′	3.13 = 39
16,12′	13.8 = 104
Total entre 7 et 1′	772

Le Tableau N ainsi établi servira d'une manière pareille à déterminer le nombre des marches rentrantes de soixante-quatre sauts sur l'échiquier total. On les décomptera entre les deux cases extrêmes comprenant le saut de fermeture, par l'énumération des groupes que distinguent les six sauts de passage d'un demi-échiquier à l'autre restés possibles après le choix de la case de départ, et par suite du groupe auquel appartient la case initiale du saut de passage. On remarquera que le passage d'un demi-échiquier à l'autre s'opère sur les deux frontières contiguës entre deux cases dont le numéro diffère de quatre unités, avec modification d'accent, en faisant correspondre par superposition parallèle (coulisses) les deux demi-échiquiers. Les sauts de fermeture, qui ne sont autres que des sauts de passage, sont soumis à la même observation.

Cela posé, on pourra considérer comme cases de départ de la marche rentrante (choisie dans le demi-échiquier supérieur) avec les cases d'arrivée correspondantes dans le demi-échiquier inférieur les six couples :

Type $(4n-1)$; cases de départ (demi-échiquier sup.).	3	7	11	15
Type $(4n_1-1)'$; cas. d'arriv. corresp. (demi-éch. inf.).	7'	11' ou 3'	15' ou 7'	11'

ou les six symétriques :

Type $(4p+1)'$; départ (demi-échiquier supér.)........	13'	9'	5'	1'
Type $(4p_1+1)$; arrivée (demi-échiquier infér.)........	9	5 ou 13	1 ou 9	5

Étant donnée une case de départ, la trente-deuxième case visitée arrivée dans le même demi-échiquier sera l'une quelconque des quatre frontières du groupe différent et donneront lieu à six sauts de passage possibles à chacun desquels correspond un groupe combiné de deux marches de trente-deux cases, dont l'importance est donnée par le produit des deux nombres du Tableau N convenablement choisis. Le calcul, sans explications du nombre de marches rentrantes entre la case centrale 7 du demi-échiquier supérieur et l'une des cases battues 11' du demi-échiquier inférieur, suffira à l'intelligence du résultat.

Cases extrêmes (*sup.* 7, *inf.* 11′).

Sauts de passage.	7 .... 11′.
1′,5	772.136 = 104 992
5′,9	208.208 = 43 264
9′,13	304.180 = 54 720
5′,1	208.502 = 104 416
9′,5	304.136 = 41 344
13′,9	276.208 = 57 408
Nombre de marches rentrantes entre les cases extrêmes 7.11′.	406 144

On arrive ainsi aux résultats suivants :

TABLEAU P

Nombre de marches rentrantes de soixante-quatre cases entre deux cases extrêmes désignées, à cheval sur la médiane frontière commune aux deux demi-échiquiers superposés, dont les trente-deux cases doivent être décrites sans interruption.

Entre chaque couple de cases extrêmes.				Nombre de marches.
3,7′	13′,9	7,3′	9′,13	540 000
7,11′	9′,5	11,7′	5′,9	406 144
11,15′	5′,1	15,11′	1′,5	994 740

La somme des trois nombres ci-dessus, 1940884, donne le nombre des marches rentrantes de la nature indiquée essentiellement distinctes. Ce nombre se quadruple par la distinction des marches symétriques entre elles et devient 7763536.

Si l'on tient compte, en outre, des marches en sens inverse, ainsi que de la double manière de diviser l'échiquier en deux rectangles égaux, ce nombre se quadruplera encore et donnera 31054144, comme le nombre total des marches rentrantes appartenant à la famille indiquée.

Parmi ces marches, un certain nombre sont composées de deux marches par demi-échiquier symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de l'échiquier. Ce sont celles dont la trente-deuxième case (dernière du parcours dans le premier demi-échiquier) est en communication avec la symétrique au centre de la case de départ ; on les énumère dans le Tableau ci-dessous :

Case de départ	1	5	5	9	9	13
Case d'arrivée (même demi-échiquier).	11′	7′	15′	3′	11′	7′
Nombre de marches	502	208	502	258	208	258

Soit en tout 1936, nombre qu'il faudra doubler et porter à 3872, en intervertissant les accents, ou, au contraire, diminuer de moitié et réduire à 968, selon qu'on désirera distinguer ou confondre les marches, qui sont identiques à un axe de symétrie près.

Toutes ces marches se compléteront par une marche symétrique au centre à trente-deux sauts de distance.

En terminant cette Note, nous prierons ceux de nos collègues qu'un tel sujet intéresse de rechercher si une méthode de groupement analogue à celle qui précède ne pourrait être appliquée aux modes naturels de description de l'échiquier signalés dans notre article précédent. Nous nous proposons de l'essayer un jour si nos loisirs nous le permettent; mais, ne nous dissimulant point les difficultés autrement compliquées qui nous attendent dans cette étude, nous ne croyons pas inutile de faire appel à la bonne volonté de ceux de nos confrères à même de mener à bien une tâche qui sera peut-être au-dessus de nos propres forces.