N. MESTRANO

Points rationnels des courbes génériques de $\mathbb{P}^3$. II

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 1 (1988), p. 43-67
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_1_43_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 43–67.

POINTS RATIONNELS DES COURBES GÉNÉRIQUES DE $\mathbf{P}^3$, II

PAR

N. MESTRANO (*)

RÉSUMÉ. — D'après un travail précédent, on sait que si d est "suffisamment grand" devant g, $g > 0$, il existe une courbe générique de genre g et de degré d dans $\mathbf{P}^3$ qui n'admet pas de point rationnel. On démontre ici que cette propriété se généralise aux couples d'entiers (d, g) vérifiant $d > 3$ et $1/8(d-1)^2 < g \leq 1/6d(d-3)+1$ (donc si "d est suffisamment petit devant g") sauf si $(d, g) = (7, 5)$.

ABSTRACT. — In a previous work, we have seen that for any integers g and d such that g is greather than 0 and d is "large enough" there exists a generic curve of $\mathbf{P}^3$ of genus g and degree d with no rational point. We prove there that this fact is also true if g and d are such that $d > 3$ and $1/8(d-1)^2 < g \leq 1/6d(d-3)+1$ (that is if "d is small enough") except if $(d, g) = (7, 5)$.

Dans "Points rationnels des courbes génériques de $\mathbf{P}^3$, I" (*cf.* [M]) on démontre pour $g \geq 1$ et "d assez grand devant g", l'assertion $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ suivante :

$\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$: *Il existe une courbe générique lisse connexe de genre g et de degré d dans $\mathbf{P}^3$ qui n'admet pas de point rationnel sur son corps de définition.*

On démontre ici (THÉORÈME 4.1) l'assertion $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ pour $d > 3$, $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$ et $(d,g) \neq (7,5)$. Si $(d,g) \neq (11,13)$, on démontre l'assertion plus précise $\mathrm{PR}'_{\mathrm{d,g}}$ suivante. Soit $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes connexes de genre arithmétique g et de degré d dans $\mathbf{P}^3$;

$\mathrm{PR}'_{\mathrm{d,g}}$: *Il existe une composante irréductible I de $H_{d,g}$, contenant des courbes lisses contenues dans les surfaces cubiques lisses de $\mathbf{P}^3$, telle que la courbe universelle au-dessus de I n'admette pas de section rationnelle.*

Rappelons que $\mathrm{PR}_{7,5}$ est fausse. La méthode utilise ici aussi le lemme

(*) Texte reçu le 6 juin 1986

N. MESTRANO, Université de Valenciennes, Mathématiques, Le Mont-Hony, 59326 Valenciennes Cedex et U.A. 212, Université Paris VII, France.

de spécialisation (*cf.* [M] 4.1) qui permet de déduire $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ quand on est capable d'exhiber une famille de courbes (qui, si elles sont singulières, doivent être "lissifiables") sans section rationnelle. En [M] on utilisait des courbes singulières réductibles, la condition "d assez grand devant g" était nécessaire pour appliquer des résultats de lissification d'HARTSHORNE–HIRSCHOWITZ (*cf.* [H–H] ou [M] 3).

On exhibe ici (*cf.* 3.2), pour tout couple d'entiers (d,g) vérifiant $d>3$ et $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$, une famille de courbes (dont la générale est lisse, connexe) tracées sur les surfaces cubiques lisses de $\mathbf{P}^3$. Si $(d,g) \notin \{(7,5),(11,13)\}$, on prouve (THÉORÈME 4.1) que ces familles n'ont pas de section rationnelle.

L'idée d'utiliser ces courbes vient d'un travail de GRUSON–PESKINE. Rappelons d'abord que le genre g et le degré d de toute courbe lisse connexe de $\mathbf{P}^3$, non contenue dans une surface quadrique, vérifient l'inégalité $0 \leq g \leq (1/6)d(d-3)+1$. Ce résultat dû à HALPHEN (*cf.* [H]) a reçu une démonstration moderne par GRUSON–PESKINE (*cf.* [G–P]) qui ont aussi prouvé la réciproque c'est-à-dire que tout couple d'entiers naturels (d,g) vérifiant l'inégalité ci-dessus apparaît comme le degré et le genre d'une courbe lisse connexe tracée soit sur une surface cubique lisse de $\mathbf{P}^3$, soit sur une surface rationnelle quartique à droite double dans $\mathbf{P}^3$ (*cf.* [G–P′]).

Les courbes que l'on utilise sont donc des diviseurs, les familles de courbes sont des diviseurs universels au-dessus de systèmes linéaires complets. Pour prouver qu'elles n'ont pas de section rationnelle, on procède de la façon suivante. A tout morphisme propre et plat $f : X \to Y$ on associe (voir 1.4) l'entier $\mathrm{rat}(X/Y)$ qui divise le degré relatif de tout $(\dim Y)$-cycle de X. Quand $f : X \to Y$ est un cycle universel (voir 1.8) ou bien, par exemple, le diviseur universel au-dessus du système linéaire complet $Y = |D|$ associé à un diviseur D, pour avoir des informations sur $\mathrm{rat}(X/Y)$ on utilise l'entier $\mathrm{div}(D)$ défini en 1.6 parce qu'il est plus facilement calculable. Si $Y = |D|$ est sans point base, alors (voir 1.9 et 1.10) $\mathrm{div}(D)$ divise $\mathrm{rat}(X/Y)$; il en résulte que si, de plus, $\mathrm{div}(D)$ est différent de 1, alors $f : X \to Y$ n'admet pas de section rationnelle. Ceci fournit une nouvelle démonstration (voir COROLLAIRE 1.12 et *Remarque* 1.15.2) du fait que l'hypersurface générique de degré r dans $\mathbf{P}^n$ n'a pas de point rationnel sur son corps de définition si r est un entier au moins égal à 2. Pour démontrer $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$, le programme est de trouver un diviseur $D_{d,g}$ sur une surface cubique lisse de $\mathbf{P}^3$ avec $\mathrm{div}(D_{d,g}) \neq 1$ tel que $|D_{d,g}|$ soit sans point base et contienne une courbe lisse connexe de genre g et de degré d. En fait on n'a pas, en général, $\mathrm{div}(D_{d,g}) \neq 1$ mais il suffit de pouvoir décomposer $D_{d,g}$ en une somme de diviseurs D_i avec $\mathrm{div}(D_i) \neq 1$

et $|D_i|$ sans point base (voir 1.14 et 2.9). C'est ce qu'on va faire, mais pour avoir $\operatorname{div}(D_i) \neq 1$, on ne peut pas fixer une surface cubique dans $\mathbf{P}^3$, il faut la faire varier.

Remarquons qu'on a vu en [M] que si (d,g) vaut $(13,21)$ ou bien $(21,54)$, il existe une composante irréductible I de $H_{d,g}$ telle que la courbe universelle au-dessus de I admette une section rationnelle. Dans ces deux cas, $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$, donc $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ est vraie *i.e.* il existe une autre composante irréductible I' de $H_{d,g}$ telle que la courbe universelle au-dessus de I' n'admette pas de section rationnelle. En fait, I' contient des courbes tracées sur les surfaces cubiques alors que toutes les courbes de I sont sur des surfaces quartiques pour $(13,21)$, quintiques pour $(21,54)$.

D'autre part, PH. ELLIA a donné d'autres exemples de couples (d,g) pour lesquels il y a une composante irréductible I de $H_{d,g}$ telle que la courbe universelle au-dessus de I admette une section rationnelle (*cf.* [E] et [E']).

Signalons enfin que si (d,g) satisfait la condition suffisante qu'ont donnée GRUSON–PESKINE (*cf.* [G–P]) pour que toute courbe lisse connexe de genre g et de degré d dans $\mathbf{P}^3$ soit contenue dans une surface cubique lisse, alors $d \geq 13$ et $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$, donc $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ est vraie.

Je remercie A. HIRSCHOWITZ pour de nombreuses discussions enrichissantes.

Plan.

1. Degrés des cycles sur certaines familles universelles.
2. Application aux familles universelles de courbes contenues dans les surfaces cubiques lisses de $\mathbf{P}^3$.
3. Détermination de multidegrés pour (d,g).
4. Décomposition des multidegrés.

Notations.

On travaille sur un corps de base k de caractéristique nulle. Ce corps est algébriquement clos sauf au paragraphe 1. On note $\mathbf{P}^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur k. Tous les schémas considérés sont projectifs. Pour tout morphisme $f : X \to Y$, on note X_y la fibre de f au-dessus de y *i.e.* $X_y = X \times_y \operatorname{Spec} k(y)$ où $k(y)$ est le corps résiduel du point y sur Y.

Pour tout schéma X et pour tout entier e, on note $Z_e(X)$ le groupe des e-cycles c'est-à-dire le groupe abélien libre engendré par les sous variétés (fermées) de dimension e dans X. On désignera par $A_e(X)$ le groupe des e-cycles modulo l'équivalence rationnelle.

Pour toute sous-variété S de X, on note $[S]$ la classe d'équivalence rationnelle du cycle associé. Pour tout e-cycle C de X, on note $\mathbf{C}$ sa classe d'équivalence dans $A_e(X)$.

1. Degrés des cycles sur certaines familles universelles

Dans ce paragraphe tous les schémas sont réduits. On fixe une variété V projective lisse et irréductible sur k, de dimension au moins égale à 2.

1.1. *Notation.* — Si X est un schéma intègre, on note $s(X)$ le degré $[g_*\mathcal{O}_X : k]$ de l'extension de corps de $g_*\mathcal{O}_X$ sur k où $g : X \to \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural. Si X possède r composantes irréductibles $X_1, \dots, X_r$, on pose $s(X) = \operatorname{pgcd}\{s(X_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$.

1.2. LEMME. — *Soit X un k-schéma, alors $s(X)$ divise le degré de tout 0-cycle de X. En particulier, si $s(X)$ vaut au moins 2, alors X n'a pas de point rationnel sur k.*

Démonstration. — Il faut voir que $s(X)$ divise le degré $[k(P) : k]$ de l'extension du corps résiduel $k(P)$ sur k, pour tout point fermé P de X. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que X est intègre. Soit L le corps $g_*\mathcal{O}_X$, où $g : X \to \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural. On a $X \to \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$; donc si P est un point de X, son corps résiduel $k(P)$ est une extention de L. Par suite, $\deg([P]) = [k(P) : k] = [k(P) : L] \times [L : k]$, *i.e.* $\deg([P]) = s(X) \times [k(P) : L]$.

1.3. *Notation.* — Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat avec Y irréductible de dimension m. Si $\alpha \in A_m(X)$ est une classe d'équivalence rationnelle de m-cycle sur X, pour tout point fermé y de Y, on notera α_y la classe $(i_y)^*\alpha$ du 0-cycle de X_y obtenue par restriction de α à la fibre X_y de f au-dessus de y où i_y est l'injection de X_y dans X. Le degré de α_y est indépendant de $y \in Y$ (*cf.* [F] 10.2), c'est le degré relatif de α, on le notera $\deg_Y(\alpha)$.

1.4. *Définition.* — A tout morphisme propre et plat $f : X \to Y$ avec Y irréductible de dimension m on associe l'entier :

$$\operatorname{rat}(X/Y) = \operatorname{pgcd}\{r \in \mathbf{Z} \mid \text{il existe } \alpha \in A_m(X) \text{ avec } \deg_Y(\alpha) = r\}.$$

1.5. *Remarque.* — Si X est un k-schéma, on a vu (LEMME 1.2) que

$s(X)$ divise $\mathrm{rat}(X/\operatorname{Spec} k)$. Pour généraliser cette propriété aux cycles (PROPOSITION 1.10), posons la définition suivante :

1.6. *Définition.* — A tout cycle $C = a_1C_1 + \cdots + a_nC_n$ de V où les a_i sont des entiers et les C_i des sous-variétés (intègres) de V, on associe l'entier : $\mathrm{div}(C) = \mathrm{pgcd}\{a_i s(C_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

1.7. LEMME. — *Soient C et C' deux cycles de V tels que le cycle intersection $C \cdot C'$ soit un 0-cycle. Alors* $\mathrm{div}(C)$ *divise le degré de $C \cdot C'$.*

Démonstration. — Posons $C = a_1C_1 + \cdots + a_nC_n$ où les a_i sont des entiers et les C_i des sous-variétés de V. Alors $C \cdot C' = a_1C_1 \cdot C' + \cdots + a_nC_n \cdot C'$. Comme, pour tout $1 \leq i \leq n$, $C_i \cdot C'$ est un 0-cycle de C_i, d'après le LEMME 1.2, $s(C_i)$ divise le degré de $C_i \cdot C'$.

1.8. *Notation.* — Pour tout e-cycle $C \in Z_e(V)$ on désigne par $|C|$ une composante irréductible du schéma de Hilbert des sous-schémas C' de V qui, en tant que cycles, ont même classe d'équivalence que C dans $A(V)$. La variété d'incidence $\mathcal{C} \subset |C| \times_k V$ est munie des deux projections $p : \mathcal{C} \to V$ et $f : \mathcal{C} \to |C|$. On dira que f est un *cycle universel associé à* C et qu'il est $L - H$ si le morphisme naturel $\varphi : A(|C|) \otimes A(V) \to A(\mathcal{C})$ est surjectif.

1.9. *Exemple.* — Soit D un diviseur de V. Alors $|D|$ est le système linéaire complet associé à D et $f : \mathcal{D} \to |D|$ est le diviseur universel. Si $|D|$ est sans point base alors f est un fibré projectif, localement trivial (pour la topologie de Zariski) parce que c'est un sous fibré du fibré trivial $|C| \times_k V$. A ce moment-là, f est $L - H$ d'après le théorème de LERAY-HIRSCH (voir [G] I.11).

1.10. PROPOSITION. — *Soient $C \in Z_e(V)$ un e-cycle et $f : \mathcal{C} \to |C|$ un cycle universel associé. Si f est $L - H$, alors* $\mathrm{div}(C)$ *divise* $\mathrm{rat}(\mathcal{C}/|C|)$.

Démonstration. — Soit m la dimension de $|C|$, $g : \mathcal{C} \to |C| \times_k V$ l'injection et $\alpha \in A_m(\mathcal{C})$. Comme f est $L - H$, il suffit de traiter le cas où $\alpha = g^*(\gamma \times \beta)$ pour les classes γ et β d'équivalence rationnelle de cycles de $|C|$ et de V respectivement. Soit c un point fermé de $|C|$, on a le diagramme cartésien suivant où toutes les flèches sont des injections :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c & \xrightarrow{i_c} & \mathcal{C} \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow g \\ \{c\} \times_k V & \xrightarrow{\ell_c} & |C| \times_k V \end{array}$$

$\alpha_c = (i_c)^*\alpha = (i_c)^*(g)^*(\gamma \times \beta) = h(\ell_c)^*(\gamma \times \beta)$. Or $(\ell_c)^*(\gamma \times \beta) = j^*(\gamma) \times i^*(\beta)$ où j est l'inclusion de $\{c\}$ dans $|C|$ et i est l'identité de V. Si $\gamma \in A_e(|C|)$, alors $j^*(\gamma) \in A_{e-m}(\{c\})$. Donc $j^*(\gamma)$ est non nul si et seulement si $\gamma = a[|C|]$ pour un entier a non nul. Dans ce cas $j^*(\gamma) = a[\{c\}]$. Donc $\alpha_c = ah^*([\{c\}] \times \beta) = a(p_c)^*(\beta)$ où $p_c : \mathcal{C}_c \to V$ est la restriction de p à $\mathcal{C}_c$. Soit C_c l'image de $\mathcal{C}_c$ dans V, alors p_c est un isomorphisme de $\mathcal{C}_c$ dans C_c, donc $\deg(\alpha_c) = a \deg(q^*\beta)$ où q est l'injection de C_c dans V. Or $q^*\beta$ est la classe d'intersection de β avec la classe de C_c c'est-à-dire avec la classe de C. D'après le LEMME 1.7 $\mathrm{div}(C)$ divise le degré de $\mathbf{C} \cdot \beta$, donc $\mathrm{div}(C)$ divise $\deg(\alpha_c)$.

1.11. COROLLAIRE. — *Soient $C \in Z_e(V)$ un e-cycle et $f : \mathcal{C} \to |C|$ un cycle universel associé. Si f est $L - H$ et si* $\mathrm{div}(C)$ *vaut au moins* 2 *alors $f : \mathcal{C} \to |C|$ n'admet pas de section rationnelle i.e. le cycle universel au-dessus du point générique de $|C|$ n'admet pas de point rationnel sur son corps de définition.*

1.12. COROLLAIRE. — *L'hypersurface générique de degré r dans* $\mathbf{P}^n$ *n'a pas de point rationnel sur son corps de définition si r est un entier au moins égal à* 2.

Démonstration. — On applique le COROLLAIRE précédent avec $V = \mathbf{P}^n$ et $C = rH$ où H est le diviseur hyperplan. En effet, le système linéaire complet $|C|$ est sans point base donc (voir *Exemple* 1.9), le diviseur universel $f : \mathcal{C} \to |C|$ est $L - H$, de plus, $\mathrm{div}(C) = r\,\mathrm{div}(H)$. Remarquons que la PROPOSITION 1.10 indique, plus précisément, que r divise $\mathrm{rat}(\mathcal{C}/|C|)$.

1.13. LEMME. — *Soient D' et D'' deux diviseurs de V, avec $|D'|$ et $|D''|$ non vides. Si le diviseur universel $\mathcal{D}$ au-dessus du système linéaire complet $|D|$ associé au diviseur $D = D' + D''$ admet une section rationnelle, alors $\mathcal{D}' \to |D'|$ ou bien $\mathcal{D}'' \to |D''|$ en admet une aussi.*

Démonstration. — On a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{D}' \times_k |D''|) \cup (|D'| \times_k \mathcal{D}'') & \longrightarrow & \mathcal{D} \\
\pi \big\downarrow & & \big\downarrow \\
|D'| \times_k |D''| & \longrightarrow & |D|
\end{array}$$

Supposons que $\mathcal{D} \to |D|$ admette une section rationnelle. D'après le LEMME de spécialisation (*cf.* [M] 4.1), appliqué éventuellement à chaque composante irréductible de $|D'| \times_k |D''|$, la projection π admet une section définie sur un ouvert partout dense de $|D'| \times_k |D''|$. Cette section prend (par exemple) ses valeurs dans $\mathcal{D}' \times_k |D''|$. La restriction π' de π à $\mathcal{D}' \times_k |D''|$ admet donc une section rationnelle. On a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathcal{D}' \times_k |D''| \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \pi' \\ |D'| & \xrightarrow{\varphi} & |D'| \times_k |D''| \end{array}$$

où $\varphi(d) = (d, D'')$ pour tout $d \in |D'|$. D'après le LEMME de spécialisation, $\mathcal{D}' \to |D'|$ admet aussi une section rationnelle.

1.14. PROPOSITION. — *Soient D, $D_1, \ldots, D_n$ $(n+1)$ diviseurs de V tels que $D = D_1 + \cdots + D_n$. Si pour tout $1 \leq i \leq n$,* $\mathrm{div}(D_i)$ *vaut au moins* 2 *et l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

(i) *le système linéaire complet $|D_i|$ est sans point base.*

(ii) *D_i est une sous-variété de V (intègre, de codimension* 1*) telle que $|D_i|$ soit réduit à un point.*

Alors, le diviseur universel au-dessus du point générique de $|D|$ n'admet pas de point rationnel sur son corps de définition.

Démonstration. — Soit $1 \leq i \leq n$. Si D_i vérifie la conditon (i), on a vu (*cf.* 1.9 et 1.11) que $\mathcal{D}_i \to |D_i|$ n'admet pas de section rationnelle. Si D_i vérifie la condition (ii), alors $\mathcal{D}_i \to |D_i|$ s'identifie à $D_i \to \operatorname{Spec} k$ et comme $s(D_i) = \mathrm{div}(D_i)$ vaut au moins 2, on a vu (*cf.* 1.2) que $\mathcal{D}_i \to |D_i|$ n'admet pas de section rationnelle. On conclut en appliquant le LEMME 1.13.

1.15. *Remarques.*

1. Le LEMME 1.13 et la PROPOSITION 1.14 se généralisent pour les cycles universels, les démonstrations sont identiques mais les énoncés plus compliqués et inutilisés ici.

2. Le COROLLAIRE 1.12 et le LEMME 1.13 figuraient déjà dans [M′] mais la *démonstration* de 1.12 se faisait à l'aide d'un calcul assez important qui est devenu, ici, inutile. Quant à la *démonstration* de 1.13, elle était incomplète.

2. Application aux familles universelles de courbes contenues dans les surfaces cubiques lisses de $\mathbf{P}^3$

On donne (PROPOSITION 2.9) une condition suffisante pour que $\mathrm{PR}'_{\mathrm{d,g}}$ soit vraie. Soit $\{P_1, \ldots, P_r\}$ une partition de $\{1, \ldots, 6\}$ et soit $P = (P_1, \ldots, P_r)$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on notera p_i le cardinal de l'ensemble P_i.

2.1. *Définitions.* — Soit S une surface cubique lisse de $\mathbf{P}^3$. On dira que $\{L; E_1, \ldots, E_6\}$ est une *base* de S si L est une courbe cubique rationnelle lisse de S et $E_1, \dots, E_6$ six droites de S vérifiant :

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} -1, & \text{si } i = j\,; \\ 0, & \text{si } i \neq j\,; \end{cases} \quad \text{et } E_j \cdot L = 0 \text{ pour tout } i, j \text{ dans } \{1, \dots, 6\}.$$

On dira que B est une *P-base* de S s'il existe une base $\{L;\, E_1, \dots, E_6\}$ de S et, pour tout $1 \leq i \leq r$, un ensemble B_i de p_i droites, $B_i = \{E_j \mid j \in P_i\}$ tels que $B = (L;\, B_1, \dots, B_r)$.

2.2. *Notation.* — On notera $\operatorname{Hilb} \mathbf{P}^3$ le schéma de Hilbert des sous schémas de $\mathbf{P}^3$ et $\mathcal{T}$ le schéma universel au-dessus de $\operatorname{Hilb} \mathbf{P}^3$. On désignera par H_P le schéma de Hilbert des couples (S, B) où S est une surface cubique lisse de $\mathbf{P}^3$ et B une P-base de S. On désignera par $\mathcal{S}_P$ (resp. $\mathcal{L}_P$, resp. $\mathcal{E}^{P_i}$) la surface cubique (resp. courbe cubique, resp. P_i-droite) universelle au-dessus de H_P. Autrement dit, $\mathcal{S}_P$ (resp. $\mathcal{L}_P$, resp. $\mathcal{E}^{P_i}$) est l'image réciproque de $\mathcal{T}$ sur H_P par le morphisme $\varphi : H_P \to \operatorname{Hilb} \mathbf{P}^3$ qui à (S, B) où $B = (L;\, B_1, \dots, B_r)$ associe S (resp. L, resp. B_i). On notera η le point générique de H_P et $\mathcal{S}_\eta$ (resp. $\mathcal{L}_\eta$, resp. $\mathcal{E}^i_\eta$) la surface (resp. courbe, resp. P_i-droite) universelle au-dessus de $\operatorname{Spec} k(\eta)$.

2.3. *Définitions.* — Un *multidegré* m est une application de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$ dans $\mathbf{Z}$. On notera $m = (m_0;\, m_1, \dots, m_6)$ où $m_i = m(i)$ pour $0 \leq i \leq 6$. On dira que m est un *P-multidegré* si m est constante sur P_i pour tout $1 \leq i \leq r$.

2.4. *Notation.* — A tout P-multidegré m on associe le diviseur $C(m)$ de $\mathcal{S}_\eta$: $C(m) = m_0 \mathcal{L}_\eta + m_1 \mathcal{E}^1_\eta + \cdots + m_r \mathcal{E}^r_\eta$. On désignera par $\operatorname{div}_P(m)$ l'entier $\operatorname{div}(C(m))$ défini en 1.6.

2.5. *Remarque.* — $\operatorname{div}_P(m) = \operatorname{pgcd}\{m_0, p_i m_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ car $s(\mathcal{L}_\eta) = 1$ et $s(\mathcal{E}^i_\eta) = p_i$.

2.6. *Définitions.* — Un P-multidegré m est *effectif* si le système linéaire complet $|C(m)|$ est non vide. Si de plus, $|C(m)|$ est sans point base, on dira que *m est libre.* On dira que *m est sans section* si le diviseur universel au-dessus de $|C(m)|$ n'admet pas de section rationnelle.

2.7. *Définition.* — On dit que m est un *multidegré pour* (d, g) si

$$d = 3m_0 - m_1 - \cdots - m_6 \quad \text{et} \quad 2g - 2 = m_0^2 - m_1^2 - \cdots - m_6^2 - d.$$

2.8. *Rappel.* — Si m est un multidegré avec, pour tout $i, j \in \{1, \dots, 6\}$, $m_i \geq 0$, $m_0 \geq m_i + m_j$ et $2m_0 \geq \sum_{\ell \neq j} m_\ell$, alors m est libre; si c'est un multidegré pour (d, g), alors $|C(m)|$ contient une courbe lisse connexe de genre g et de degré d (*cf.*, par exemple, [H']V.4).

2.9. PROPOSITION. — *Soit (d, g) un couple d'entiers. On suppose qu'il existe un P-multidegré m pour (d, g), libre, tel que $m = m^1 + \cdots + m^s$ où,* *pour tout* $1 \leq i \leq s$, m^i *est un* P*-multidegré avec* $\operatorname{div}_P(m^i) \geq 2$ *ou bien libre, ou bien tel que* $C(m^i) = \mathcal{E}^i_\eta$ *pour un* $1 \leq j \leq r$*. Alors les assertions* $\mathrm{PR_{d,g}}$ *et* $\mathrm{PR'_{d,g}}$ *sont vraies.*

Démonstration. — D'après la PROPOSITION 1.14, le diviseur universel $\mathcal{D}$ au-dessus de $|C(m)|$ n'admet pas de section rationnelle. On a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & U_{d,g} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ |C(m)| & \xrightarrow{\varphi} & H_{d,g} \end{array}$$

où $U_{d,g} \to H_{d,g}$ est la famille universelle des courbes connexes de genre arithmétique g et de degré d dans $\mathbf{P}^3$. L'image de φ est contenue dans une composante irréductible I du schéma de Hilbert $H_{d,g}$. Cette composante I contient des courbes lisses connexes parce qu'on a supposé m libre. D'après le lemme de spécialisation (*cf.* [M] 4.1), la famille universelle au-dessus de I n'admet pas de section rationnelle, *i.e.* $\mathrm{PR'_{d,g}}$ est vraie.

3. Détermination de multidegrés pour (d, g)

On va associer à tout couple d'entiers (d, g), un multidegré qui est libre (voir PROPOSITION 3.4) si $d \geq 3$ et $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$. On détermine facilement (voir *Remarques* 3.5 (1 à 3)) les multidegrés des courbes de genre maximum c'est-à-dire avec g égal à la partie entière de $(1/6)d(d-3)+1$. On en déduit (voir *Remarques* 3.5 (4 à 7)) un multidegré pour (d, g) quelconque en introduisant la différence $\alpha(d, g)$ entre le genre maximum et g.

3.1. *Notation.* — Pour tout couple $(d, g) \in \mathbf{Z}^2$, si $g \leq (1/6)d(d-3)+1$, on désignera par $\alpha(d, g)$ la partie entière de $(1/6)d(d-3)+1-g$. Comme tout entier naturel est la somme de quatre carrés, il existe (au moins) un quadruplet $q = (n, t, r, s)$ d'entiers avec $n \geq t \geq r \geq s \geq 0$ tels que $\alpha(d, g) = n^2 + t^2 + r^2 + s^2$. On définit les entiers ϵ_q et x_q par $d = 3(n+t+x_q) + \epsilon_q$ et $\epsilon_q \in \{-1, 0, 1\}$. On pose :

$$f(d, g, q) = (3t + n + \epsilon_q; 2t, t + r, t + s + \epsilon_q, t - s + \epsilon_q, t - r, 0) + x_q H,$$

où $H = (3; 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

3.2. LEMME. — *Si* $d > 3$ *et* $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$, *alors* x_q *vaut au moins* 2.

Démonstration. — Si $\alpha(d, g)$ vaut 0, alors $d = 3x_q + \epsilon_q$, comme on a supposé $d > 3$, x_q vaut au moins 2. Dans la suite, on supposera donc

$n \geq 1$. Pour tout $\epsilon \in \{-1,0,1\}$, on définit la fonction $\Phi_\epsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par : $\Phi_\epsilon(x) = Ax^2 + Bx - C$ où $A = 3$, $B = 6(t+n-1+\epsilon/3)$ et $C = 5t^2 + 5n^2 + 6t + 6n - 6tn - 7 + 8r^2 + 8s^2 + \epsilon(5\epsilon + 2 - 2t - 2n)$. On a alors, $\Phi_{\epsilon_q}(x_q) = 8g - (d-1)^2$. Par hypothèse, $\Phi_{\epsilon_q}(x_q) > 0$. De plus $\Phi'_\epsilon(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 - t - n - \epsilon/3$ et $d = 3(n+t+x_q) + \epsilon_q$ donc $x_q \geq 1 - t - n - \epsilon_q/3$ car on a supposé $d > 3$. Comme on a $n \geq 1$, $1 - t - n - \epsilon_q/3 \leq 1$. Pour $x \geq 1 - t - n - \epsilon/3$ le tableau de variation de la fonction Φ_ϵ est de la forme :

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1-t-n-\frac{1}{3}\epsilon & 1 & 2 & +\infty \\ \hline \Phi_\epsilon(x) & & & \nearrow & \end{array}$$

Pour prouver que x_q vaut au moins 2, il suffit de voir que $\Phi_\epsilon(1)$ est négatif ou nul. Calculons-le : $-\Phi_\epsilon(1) = 3(n-t)^2 + 2(n^2 + t^2 - 2) + \epsilon(5\epsilon - 2t - 2n) + 8r^2 + 8s^2$. Or $n \geq 1 \Rightarrow -\Phi_\epsilon(1) \geq 0$, donc $x_q \geq 2$.

3.3. *Remarques.*

1. Si $\epsilon_q = 0$ et $(t = r + 1 = s + 2)$, alors $x_q \geq 3$ car $-\Phi_0(2) = (n - 3s)^2 + 2n(2n-9) + 12s^2 + 30s + 9$ est positif ou nul.

2. Si $\epsilon_q = 1$ et $(t = r = s \neq 0)$ ou bien $(t = r = s = 0$ et $n \geq 2)$, alors $x_q \geq 3$ car $-\Phi_1(2) = 3(n-t)^2 + 2n(n-4) + 2t(t-4) + 8r^2 + 8s^2 - 4$ est positif ou nul.

3. De même, si $\epsilon_q = -1$ et si $(n,t,r,s) \neq (1,1,0,0)$, alors $x_q \geq 3$ car $-\Phi_{-1}(2) = 3(n-t)^2 + 2n(n-2) + 2t(t-2) + 8r^2 + 8s^2$ est positif ou nul.

3.4. PROPOSITION. — *Si $d \geq 3$ et $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3)+1$, alors le multidegré $f(d,g,q)$ déterminé en* 3.1 *est libre pour (d,g).*

Démonstration. — Puisqu'on sait (LEMME 3.2) que x_q vaut au moins 2, il est immédiat que $f(d,g,q)$ satisfait les inégalités de 2.8, donc qu'il est libre. Pour voir que c'est un multidegré pour (d,g), on peut faire le calcul (*cf.* 2.7) mais cela résulte des remarques suivantes :

3.5. *Remarques.*

1. Si m est un multidegré pour (d,g), alors $m + xH$ est un multidegré pour (d', g') où $d' = d + 3x$ et $\alpha(d,g) = \alpha(d',g')$. Si on a un multidegré pour (d,g) quand $d \in \{-1,0,1\}$, on en déduit donc un multidegré pour tout (d',g') avec $\alpha(d,g) = \alpha(d',g')$.

2. On voit facilement, par le calcul, que si $d \in \{-1,0,1\}$ et $\alpha(d,g) = 0$, alors $(d;0,0,d,d,0,0)$ est un multidegré pour (d,g).

3. Soit $(d, g) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\alpha(d, g) = 0$. On définit les entiers ϵ et x les deux conditions $d = 3x + \epsilon$ et $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, alors $(\epsilon; 0, 0, \epsilon, \epsilon, 0, 0) + xH$ est un multidegré pour (d, g). Il est libre si d vaut au moins 1.

4. Un calcul facile montre que, pour tout entier naturel n, $(\epsilon + n; 0, 0, \epsilon, \epsilon, 0, 0)$ est un multidegré pour (d, g) où $d = 3n+\epsilon$ et $\alpha(d, g) = n^2$.

5. Soit $(d, g) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\alpha(d, g) = n^2$ pour un entier naturel n. On définit les entiers ϵ et x les deux conditions $d = 3(n+x)+\epsilon$ et $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$, alors, d'après 1. et 4. $(\epsilon + n; 0, 0, \epsilon, \epsilon, 0, 0) + xH$ est un multidegré pour (d, g).

6. Remarquons maintenant que si m est un multidegré pour (d, g) avec $m_1 = m_2$, alors, pour tout entier naturel t, $(m_0; m_1 + t, m_2 - t, m_3, m_4, m_5, m_6)$ est un multidegré pour (d, g') où $\alpha(d, g') = \alpha(d, g) + t^2$.

7. Par suite, si $\alpha(d, g) = n^2 + t^2 + r^2 + s^2$ pour des entiers naturels n, t, r et s, alors $(n + \epsilon; t, -t, \epsilon + r, \epsilon - r, s, -s) + xH$ est un multidegré pour (d, g) où $d = 3(n + x) + \epsilon$.

4. Décomposition des multidegrés

Dans ce paragraphe, on démontre le

4.1. THÉORÈME. — *Pour tout couple d'entiers (d, g) avec $d > 3$, $(1/8)(d-1)^2 < g \leq (1/6)d(d-3) + 1$ et $(d, g) \neq (7, 5)$, l'assertion $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ est vraie. Si $(d, g) \neq (11, 13)$, l'assertion $\mathrm{PR}'_{\mathrm{d,g}}$ est vraie aussi.*

Démonstration. — Soit (d, g) un couple d'entiers vérifiant les conditions du théorème. Si $(d, g) = (11, 13)$ voir 4.2, sinon, il suffit de voir qu'il existe (*cf. Notation* 3.1) un quadruplet $q = (n, t, r, s)$ tel que le multidegré libre $f(d, g, q)$ se décompose comme dans la PROPOSITION 2.9 pour un $P = (P_1, \ldots, P_r)$ où $\{P_1, \ldots, P_r\}$ une partition de $\{1, \ldots, 6\}$. On a noté H le multidegré $(3; 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Posons

$$\begin{aligned} &A = (3; 1, 1, 1, 1, 1, 0), \ B = (2; 1, 1, 1, 1, 0, 0), \ C = (2; 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ &D = (2; 1, 1, 0, 0, 0, 0), \ E = (1; 1, 0, 0, 0, 0, 0), \ F = (1; 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

On a

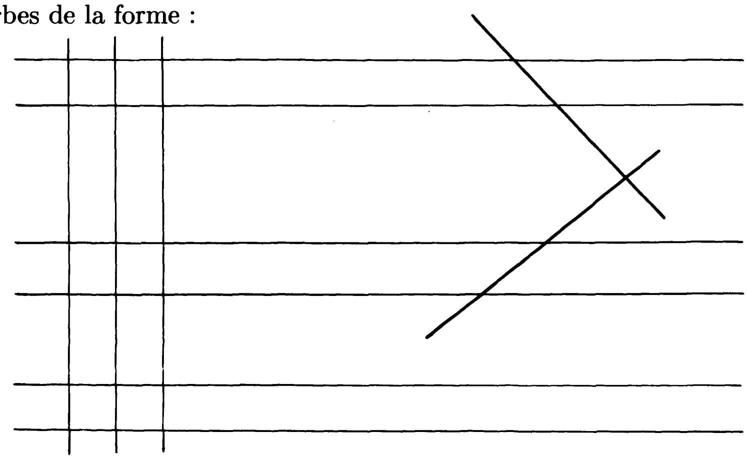
$$\begin{aligned} f(d, g, q) = (t - r)(A + E) + (r - s + \epsilon_q)B \\ + 2sC + (r - s - \epsilon_q)D + (n - t + \epsilon_q)F + x_q H. \end{aligned}$$

Les multidegrés A, B, C, D, E, F, H sont libres et on sait (LEMME 3.2) que x_q vaut au moins 2. Si les entiers $t - r$, $r - s + \epsilon_q$, $r - s - \epsilon_q$, $n - t + \epsilon_q$ valent 0 ou bien au moins 2, on voit que $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ est vraie en appliquant la PROPOSITION 2.9 avec $P = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ (pour ces cas-là, il n'était pas nécessaire de faire varier la surface cubique dans $\mathbf{P}^3$).

Il reste à envisager les cas initiaux c'est-à-dire les cas où un ou plusieurs de ces entiers vaut 1 ou -1 (-1 ne se produit que si $\epsilon_q = 1$ et $r = s$ ou si $\epsilon_q = -1$ et $r = s$ ou $n = t$). On va en 4.3, pour chacun de ces cas, décomposer d'une autre façon $f(d, g, q)$, de manière à mettre en évidence qu'il se décompose comme dans la PROPOSITION 2.9.

4.2. *Cas* $(d, g) = (11, 13)$.

Dans ce cas, $f(d, g, q) = (9; 4, 3, 3, 2, 2, 2)$ et il semble qu'il n'y ait pas de façon de décomposer $f(d, g, q)$ comme en 2.9. Soit I la composante irréductible du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ qui contient les courbes de multidegré $(9; 4, 3, 3, 2, 2, 2)$ dans les surfaces cubiques lisses. On ne peut pas dire si la courbe universelle au-dessus de I admet une section rationnelle. Par contre, on peut démontrer que $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ est vraie en considérant les courbes de la forme :



En effet, on prouve, en raisonnant comme en 1.13, que la famille universelle de ses courbes n'admet pas de section rationnelle, de plus ces courbes sont "très fortement lissifiables" (voir [M] 2 et 3.3), on en déduit $\mathrm{PR}_{\mathrm{d,g}}$ en utilisant le COROLLAIRE 4.4 de [M].

4.3. *Les cas initiaux.* — Dans chaque cas, on désignera le multidegré $f(d, g, q)$ par $m = (m_0; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$, on choisit P et on décompose m en P-multidegrés vérifiant les conditions de la PROPOSITION 2.9.

Pour indiquer le choix de P, on notera au début de chaque cas les m_i qui sont égaux et dont les indices sont dans un même P_j. Par exemple, si $m = (5; 2, 1, 1, 1, 1, 2)$ et si on indique $m_1 = m_6$ et $m_3 = m_4$, cela signifie qu'on veut prendre $P = (\{1, 6\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\})$. Si on n'indique rien, c'est que $P = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$.

On a $m = u + x_q H$ où $u = (3t+n+\epsilon_q; 2t, t+r, t+s+\epsilon_q, t-s+\epsilon_q, t-r, 0)$

et x_q vaut au moins 2 et même, au moins 3 dans certains cas (voir *Remarque* 3.3). Pour tout choix de P, H est un P-multidegré libre et $\mathrm{div}_P(\alpha H) \neq 1$ dès que α est un entier naturel différent de 1.

Donc, pour voir que m se décompose comme dans la PROPOSITION 2.9, il suffit de le voir pour u,

ou bien pour $u + H$ et $u + 2H$ (car pour $x_q \geq 3$, on écrira, $m = (u + H) + (x_q - 1)H)$,

ou bien pour $u + 2H$ et $u + 3H$ (car pour $x_q \geq 4$, on écrira, $m = (u + 2H) + (x_q - 2)H)$,

ou bien pour $u + 3H$ et $u + 4H$ quand on sait que x_q vaut au moins 3 (car pour $x_q \geq 5$, on écrira, $m = (u + 3H) + (x_q - 3)H)$.

4.3.1. $\epsilon_q = 0$ et $t - r = 1$.

On a $u = (3t+n;\, 2t, 2r+1, r+s+1, r-s+1, 1, 0)$ et $u = (A+E)+(r-s)(B + D) + 2sC + (n - t)F$.

(i) $r = s$. — Alors $m_{\mathbf{2}} = m_{\mathbf{3}}$ et $m_{\mathbf{4}} = m_{\mathbf{5}}$ (cela signifie qu'on prend

$$P = (\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6\});$$

on n'écrit pas, ce qui est pourtant vrai, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5$ parce que cela signifierait que $P = (\{1\}, \{2,3,4,5\}, \{6\})$, et alors, c et d (*cf.* ci-dessous) ne seraient pas des P-multidegrés.

$$u = (A + E) + 2rC + (n - t)F.$$

Si $n - t \neq 1$, comme $A + E = (4;\, 2, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$, $\mathrm{div}_P(A + E) = 2$ et il est clair que $\mathrm{div}_P(2rC)$ et $\mathrm{div}_P((n - t)F)$ sont différents de 1. Donc u se décompose comme dans la PROPOSITION 2.9.

Si $n - t = 1$, $u = (A + E + F) + 2rC$,

$$\begin{aligned} A + E + F + 2H &= (11;\, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2) \\ &= (8;\, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2) + \mathbf{3}F = a + b; \\ A + E + F + 3H &= (14;\, 5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 3) \\ &= (8;\, 2, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) + \mathbf{3}(2;\, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) = e + f, \end{aligned}$$

on a $\mathrm{div}_P(a) = 2$, $\mathrm{div}_P(b) = 3$, $\mathrm{div}_P(e) = 2$, $\mathrm{div}_P(f) = 3$. Donc $u + 2H$ et $u + 3H$ se décomposent comme dans la PROPOSITION 2.9.

(ii) $r > 0$ et $s = 0$. — Alors $m_{\mathbf{3}} = m_{\mathbf{4}}$, $u = (A + E) + r(B + D) + (n - t)F$; $B + D = (4;\, 2, 2, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0)$ donc $\mathrm{div}_P(B + D) = 2$.

Si $n - t \neq 1$, on écrit :

$$\begin{aligned} A + E + B + D + 2H &= (14;\, 6, 5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 3, 2) \\ &= \mathbf{3}(2;\, 0, 1, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) + (8;\, 6, 2, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 2) = a + b; \end{aligned}$$

$$A+E+B+D+3H = (17;\, 7,6,\mathbf{5},\mathbf{5},4,3)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 1,2,\mathbf{1},\mathbf{1},0,1) + \mathbf{2}(4;\, 2,0,\mathbf{1},\mathbf{1},2,0).$$

Si $n-t=1$, on écrit :

$$A+E+B+D+F+2H = (15;\, 6,5,\mathbf{4},\mathbf{4},3,2)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 2,1,\mathbf{1},\mathbf{1},1,0) + (6;\, 0,2,\mathbf{1},\mathbf{1},0,2) = e+f;$$
$$A+E+B+D+F+3H = (18;\, 7,6,\mathbf{5},\mathbf{5},4,3)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,0,\mathbf{1},\mathbf{1},0,1) + \mathbf{2}(6;\, 2,3,\mathbf{1},\mathbf{1},2,0).$$

On a $\mathrm{div}_p(b) = \mathrm{div}_p(f) = 2$; il est clair que les autres multidegrés des décompositions ont $\mathrm{div}_p(\ ) \neq 1$.

(iii) $s \geq 1$ et $r = s+1$. — Alors $u = (A+E+B+D)+2sC+(n-t)F$. D'après la *Remarque* 3.3.1, on a $x_q \geq 3$.

Si $n-t \neq 1$, on a vu en 4.3.1 (ii) ci-dessus que $(A+E+B+D+3H)$ se décompose bien et on a :

$$A+E+B+D+2C+4H = (24;\, 10,9,8,6,5,4)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 0,1,0,0,1,0) + \mathbf{2}(9;\, 5,3,4,3,1,2).$$

Si $n-t=1$, on a vu en 4.3.1 (ii) ci-dessus que $(A+E+B+D+F+3H)$ se décompose bien et on a :

$$A+E+B+D+2C+F+4H = (25;\, 10,9,8,6,5,4)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 2,1,0,0,1,0) + \mathbf{2}(8;\, 2,3,4,3,1,2).$$

(iv) $s \geq 1$ et $r = s+2$. — Alors $u = (A+E)+2(B+D)+2sC+(n-t)F$).

Si $n-t \neq 1$,

$$A+E+2C+2H = (14;\, 6,5,5,3,3,2)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 0,1,1,1,1,0) + \mathbf{2}(4;\, 3,1,1,0,0,1);$$
$$A+E+2(B+D)+2C+3H = (25;\, 11,10,8,6,4,3)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 1,2,0,0,0,1) + \mathbf{2}(8;\, 4,2,4,3,2,0).$$

Si $n-t=1$,

$$A+E+2C+F+2H = (15;\, 6,5,5,3,3,2)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 2,1,1,1,1,0) + \mathbf{2}(3;\, 0,1,1,0,0,1);$$
$$A+E+2(B+D)+2C+F+3H = (26;\, 11,10,8,6,4,3)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,0,0,0,0,1) + \mathbf{2}(10;\, 4,5,4,3,2,0).$$

(v) $s \geq 1$ et $r \geq s+3$. — Alors $u = (A+E)+(r-s)(B+D)+2sC+(n-t)F$. On a vu en 4.3.1 (iv) et (ii) ci-dessus que $u+2H$ et $u+3H$ se décomposent bien respectivement.

4.3.2. $\epsilon_q = 0$, $t - r \neq 1$ et $r - s = 1$.

On a $u = (3t + n; 2t, t + s + 1, t + s, t - s, t - s - 1, 0)$ et $u = (t - r)(A + E) + (B + D) + 2sC + (n - t)F$.

(i) $s = 0$. — Alors $m_3 = m_4$, $u = (t-r)(A+E)+(B+D)+(n-t)F$. On a vu en 4.3.1 (ii) que $\mathrm{div}_p(B + D) = 2$. Si $n - t = 1$, on a :

$$\begin{aligned} B + D + F + 2H &= (11; 4, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2, 2) \\ &= (8; 4, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2, 2) + \mathbf{3}F = a + b \qquad [\text{avec } \mathrm{div}_p(a) = 2]; \\ B + D + F + 3H &= (14; 5, 5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 3, 3) \\ &= \mathbf{3}(2; 1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1, 1) + \mathbf{2}(4; 1, 1, \mathbf{2}, \mathbf{2}, 0, 0). \end{aligned}$$

(ii) $s \geq 1$ et $t - r = 0$. — Alors $m_1 = m_2$, $u = (B + D) + 2sC + (n - t)F$.

Pour $u + 2H$:

$$\begin{aligned} B + D + 2C + 2H &= (14; \mathbf{6}, \mathbf{6}, 5, 3, 2, 2) \\ &= \mathbf{3}(2; \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1, 0, 0) + (6; \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2, 0, 2, 2) + \mathbf{2}F. \end{aligned}$$

Pour $u + 3H$:

$$\begin{aligned} B + D + 2C + 3H &= (17; \mathbf{7}, \mathbf{7}, 6, 4, 3, 3) \\ &= \mathbf{3}(3; \mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0, 1, 1) + \mathbf{4}(2; \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 1, 0, 0); \\ B + D + 2C + F + 3H &= (18; \mathbf{7}, \mathbf{7}, 6, 4, 3, 3) \\ &= \mathbf{3}(2; \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, 1, 1) + \mathbf{2}(6; \mathbf{2}, \mathbf{2}, 3, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

(iii) $s \geq 1$ et $t - r \geq 2$. — Alors $u = (t - r)(A + E) + (B + D) + 2sC + (n - t)F$.

On a vu en 4.3.2 (ii) ci-dessus que $u + 3H$ se décompose bien. Pour $u + 2H$,

si $t - r \neq 3$, on écrit :

$$\begin{aligned} 2(A + E) + (B + D) + 2C + 2H &= (22; 10, 8, 7, 5, 4, 2) \\ &= \mathbf{2}(4; 2, 1, 2, 1, 2, 1) + \mathbf{3}(4; 2, 2, 1, 1, 0, 0) + \mathbf{2}F \end{aligned}$$

et si $t - r = 3$, on écrit :

$$\begin{aligned} 3(A + E) + (B + D) + 2C + 2H &= (26; 12, 9, 8, 6, 5, 2) \\ &= \mathbf{3}(2; 0, 1, 0, 0, 1, 0) + \mathbf{2}(9; 6, 3, 4, 3, 1, 1) + \mathbf{2}F. \end{aligned}$$

4.3.3. $\epsilon_q = 0$, $t - r \neq 1$, $r - s \neq 1$ et $n - t = 1$.

On a $u = (4t+1; 2t, t+r, t+s, t-s, t-r, 0)$ et $u = (t-r)(A+E)+(r-s)(B + D) + 2sC + F$.

(i) $t-r=0$. — Alors $m_5=m_6$, $u=(r-s)(B+D)+2sC+F$.

Si $s\neq 0$:

$$2C+F+2H=(11;4,4,4,2,\mathbf{2},\mathbf{2})=\mathbf{2}(4;2,2,2,1,\mathbf{1},\mathbf{1})+\mathbf{3}F$$
$$2C+F+3H=(14;5,5,5,4,\mathbf{4},\mathbf{4})=\mathbf{3}(2;1,1,1,1,\mathbf{0},\mathbf{0})$$
$$+(8;2,2,2,0,\mathbf{3},\mathbf{3}).$$

Si $s=0$ et $r\neq 0$; on a $m_3=m_4$ et on a vu en 4.3.2 (i) que $u+2H$ et $u+3H$ se décomposent bien.

Si $s=0$ et $r=0$; alors $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6$ et on a :

$$u+H=(4;\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \qquad [\mathrm{div}_p(u+H)=2]$$
$$u+2H=(7;\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2})=(4;\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$$
$$+(3;\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})=a+b$$

avec $\mathrm{div}_p(a)=2$ et $\mathrm{div}_p(b)=3$.

(ii) $t-r\geq 2$. — On a :

$$2(A+E)+F=(9;4,2,2,2,2,0)=\mathbf{2}(3;2,1,1,1,1,0)+\mathbf{3}F$$
$$3(A+E)+F=(13;6,3,3,3,3,0)=\mathbf{3}(3;2,1,1,1,1,0)+\mathbf{4}F$$

4.3.4. $\epsilon_q=1$ et $r=s$.

On a $u=(3t+n+1;2t,t+r,t+r+1,t-r+1,t-r,0)$.

(i) $t=r=0$. — D'où $u=(n+1;0,0,1,1,0,0)$, ainsi que $m_1=m_2=m_5=m_6$ et $m_3=m_4$.

Si $n\notin\{0,2\}$, on a :

$$u=(2;0,0,\mathbf{1},\mathbf{1},0,0)+(\mathbf{n}-\mathbf{1})F=a+b \text{ avec } \mathrm{div}_p(a)=2.$$

Si $n=0$, on peut supposer que x_q vaut au moins 3 car pour $x_q=2$ alors $(d,g)=(7,5)$.

Si $n=2$, on a vu en 3.3.2 que x_q vaut au moins 3.

Si x_q vaut au moins 3 et $n\neq 1$, on a :

$$u+H=(4;\mathbf{1},\mathbf{1},2,2,\mathbf{1},\mathbf{1})+\mathbf{n}F=e+f \text{ avec } \mathrm{div}_P(e)=4.$$

(ii) $t=r\geq 1$. — On a $u=(3t+n+1;2t,2t,2t+1,1,0,0)$, ainsi que $m_1=m_2$ et $m_5=m_6$.

On a vu en 3.3.2 que x_q vaut au moins 3.

Si $n-t\neq 1$, on écrit :

$$u+H=(4t+4;\mathbf{2t}+\mathbf{1},\mathbf{2t}+\mathbf{1},2t+2,2,\mathbf{1},\mathbf{1})+(\mathbf{n}-\mathbf{t})F.$$

Si $n-t=1$, on écrit :

$$\begin{aligned} u+2H &= (4t+8;\ \mathbf{2t+2}, \mathbf{2t+2}, 2t+3, 3, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \\ &= \mathbf{3}(2;\ \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (4t+2;\ \mathbf{2t-1}, \mathbf{2t-1}, 2t, 0, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \\ u+3H &= (4t+11;\ \mathbf{2t+3}, \mathbf{2t+3}, 2t+4, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}) \\ &= (4t+8;\ \mathbf{2t+3}, \mathbf{2t+3}, 2t+4, 4, \mathbf{3}, \mathbf{3}) + \mathbf{3}F. \end{aligned}$$

(iii) $t > r$ et $r=0$. — Dans ce cas $u = (3t+n+1;\ 2t, t, t+1, t+1, t, 0)$.

Si t est impair et $n \neq 1$, on écrit :

$$m_2 = m_5 \text{ et } m_3 = m_4 \quad \text{et} \quad u = (3t+1;\ 2t, \mathbf{t}, \mathbf{t+1}, \mathbf{t+1}, \mathbf{t}, 0) + \mathbf{n}F.$$

Si t est pair et $n \neq 2$, on écrit :

$$m_2 = m_5 \text{ et } m_3 = m_4 \quad \text{et} \quad u = (3t+2;\ 2t, \mathbf{t}, \mathbf{t+1}, \mathbf{t+1}, \mathbf{t}, 0) + (\mathbf{n-1})F.$$

Si t est impair et $n=1$, alors $t=1$ et $u+2H$ est un multidegré pour $(d,g) = (13,20)$, mais

$$(16;\ 6;\ 6, \mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{6}, 5) = (12;\ 6, 6, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 3) + \mathbf{2}(2;\ 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) = a+b$$

est aussi un multidegré pour $(13,20)$; il se décompose bien avec $m_3 = m_4 = m_5$ et on a $\operatorname{div}_P(a) = 3$.

$$\begin{aligned} u+3H &= (14;\ 5,4,5,5,4,3) = \mathbf{3}(2;\ 1,0,1,1,0,1) + \mathbf{2}(4;\ 1,2,1,1,2,0) \\ u+4H &= (17;\ 6,\mathbf{5},6,6,\mathbf{5},4) = (14;\ 6,\mathbf{5},6,6,\mathbf{5},4) + \mathbf{3}F \end{aligned}$$

avec $m_2 = m_5$.

Si t est pair et $n=2$, alors $t=2$ et l'on a avec $(m_3 = m_4)$:

$$\begin{aligned} u+2H &= (15;\ 6,4,\mathbf{5},\mathbf{5},4,2) = (12;\ 6,4,\mathbf{5},\mathbf{5},4,2) + \mathbf{3}F \\ u+3H &= (18;\ 7,5,6,6,5,3) = \mathbf{3}(4;\ 1,1,2,2,1,1) + \mathbf{2}(3;\ 2,1,0,0,1,0). \end{aligned}$$

(iv) $t-r=1$ et $r \geq 1$. — Il en résulte $u = (3r+n+4;\ 2r+2, 2r+1, 2r+2, 2, 1, 0)$ $u = (8;\ 4,3,4,2,1,0) + (n-r)F + (2r-2)C$.

Pour $u+3H$, on a :

$$\begin{aligned} (8;\ 4,3,4,2,1,0) + (n-r)F + 3H &= (17;\ 7,6,7,5,4,3) + (n-r)F \\ &= \mathbf{3}(2;\ 1,0,1,1,0,1) + \mathbf{2}(5;\ 2,3,2,1,2,0) + (\mathbf{n-r+1})F \\ &\qquad \text{avec } n-r+1 \geq 2. \end{aligned}$$

Pour $u+2H$,

si $n-r \neq 1$, on a $m_1 = m_3$ et :

$$\begin{aligned} (8;\ \mathbf{4},3,\mathbf{4},2,1,0) + 2H &= (14;\ \mathbf{6},5,\mathbf{6},4,3,2) \\ &= \mathbf{3}(2;\ \mathbf{1},1,\mathbf{1},0,1,0) + (8;\ \mathbf{3},2,\mathbf{3},4,0,2); \end{aligned}$$

si $n-r=1$ et $r>1$, on a $m_1=m_3$ et :

$$(8;\mathbf{4},3,\mathbf{4},2,1,0)+F+2C+2H=(18;\mathbf{8},7,\mathbf{8},4,3,2)$$
$$=\mathbf{3}(2;\mathbf{1},1,\mathbf{1},0,1,0)+(10;\mathbf{5},4,\mathbf{5},4,0,2)+\mathbf{3}F;$$

si $n-r=1$ et $r=1$ on a (pour $u+4H$, avec $m_1=m_3$) :

$$(8;\mathbf{4},3,\mathbf{4},2,1,0)+F+4H=(21;\mathbf{8},7,\mathbf{8},6,5,4)$$
$$=\mathbf{3}(3;\mathbf{1},1,\mathbf{1},2,1,0)+(12;\mathbf{5},4,\mathbf{5},0,2,4);$$

si $n-r=1$ et $r=1$, alors $u+2H$ est un multidegré pour $(d,g)=(19,41)$ mais $(13;4,4,4,\mathbf{3},\mathbf{3},2)=(10;4,4,4,\mathbf{3},\mathbf{3},2)+\mathbf{3}F$ est aussi un multidegré pour $(19,41)$ et il se décompose bien avec $m_4=m_5$.

(v) $t-r\geq 2$ et $r\geq 1$. — Comme on a $u=(3t+n+1;2t,t+r,t+r+1,t-r+1,t-r,0)$, il revient au même de décomposer u' où $u'=(3t+n+1;2t,t+r+1,t+r,t-r+1,t-r,0)$ alors, on a $u'=(t-r-1)(A+E)+(A+B+C+D)+(2r-2)C+(n-t)F$.

Si $t-r-1\neq 2$, on a :

$$(A+E)+(A+B+C+D)+2H=(19;8,7,6,5,4,2)$$
$$=\mathbf{3}(3;2,1,0,1,0,0)+\mathbf{2}(5;1,2,3,1,2,1)$$
$$(A+E)+(A+B+C+D)+F+2H=(20;8,7,6,5,4,2)$$
$$=\mathbf{3}(4;2,1,2,1,0,0)+\mathbf{2}(4;1,2,0,1,2,1)$$
$$(A+E)+(A+B+C+D)+3H=(22;9,8,7,6,5,3)$$
$$=\mathbf{3}(2;1,0,1,0,1,1)+\mathbf{2}(7;3,4,2,3,1,0)+\mathbf{3}F.$$

Si $t-r-1=2$, on a :

$$2(A+E)+(A+B+C+D)+2H=(23;10,8,7,6,5,2)$$
$$=\mathbf{3}(4;2,2,1,2,1,0)+\mathbf{2}(4;2,1,2,0,1,1)+\mathbf{3}F$$
$$(A+B+C+D)+3H=(18;7,7,6,5,4,3)$$
$$=\mathbf{3}(2;1,1,0,1,0,1)+\mathbf{2}(5;2,2,3,1,2,0)+\mathbf{2}F.$$

4.3.5. $\epsilon_q=1$, $r>s$ et $t-r=1$.

On a $u=(3r+n+4;2r+2,2r+1,r+s+2,r-s+2,1,0)$, $u=(A+E)+(r-s-1)(B+D)+2B+2sC+(n-t+1)F$.

(i) $s=0$ et $r=1$. — Alors $u=(A+E)+2B+(n-1)F$; $u=(n+7;4,\mathbf{3},\mathbf{3},3,1,0)$, et on a $m_2=m_3$ ainsi que :

$$u+2H=(14;6,\mathbf{5},\mathbf{5},5,3,2)+(n-1)F$$
$$=\mathbf{3}(3;2,\mathbf{1},\mathbf{1},1,1,0)+\mathbf{2}(2;0,\mathbf{1},\mathbf{1},1,0,1)+\mathbf{n}F$$
$$u+3H=(17;7,\mathbf{6},\mathbf{6},6,4,3)+(n-1)F$$
$$=\mathbf{3}(2;1,\mathbf{1},\mathbf{1},0,0,1)+(10;4,\mathbf{3},\mathbf{3},6,4,0)+\mathbf{n}F.$$

(ii) $s = 0$ et $r \geq 2$. — Alors $u = (3r+n+4; 2r+2, 2r+1, \mathbf{r+2}, \mathbf{r+2}, 1, 0)$, $u = (A+E) + (r-1)(B+D) + 2B + (n-t+1)F$, on a $m_3 = m_4$. C'est la situation de 4.3.1 (ii).

(iii) $s \geq 1$ et $r - s - 1 \neq 1$. — On a $u = (A+E) + (r-s-1)(B+D) + 2B + 2sC + (n-t+1)F$.

$$A + E + 2C + (n-t-1)F + 2H = (14; 6, 5, 5, 3, 3, 2)$$
$$= \mathbf{3}(3; 2, 1, 1, 1, 1, 0) + \mathbf{2}(2; 0, 1, 1, 0, 0, 1) + (\mathbf{n} - \mathbf{t} + \mathbf{2})F.$$

Si $n - t + 1 \neq 1$, on écrit :
$$A + E + 2C + 2B + 3H = (21; 9, 8, 8, 6, 4, 3)$$
$$= \mathbf{3}(5; 3, 2, 2, 2, 0, 1) + \mathbf{2}(3; 0, 1, 1, 0, 2, 0).$$

Sinon, on a :
$$A + E + 2C + 3H + F = (18; 7, 6, 6, 4, 4, 3)$$
$$= \mathbf{3}(2; 1, 0, 0, 0, 0, 1) + \mathbf{2}(6; 2, 3, 3, 2, 2, 0).$$

(iv) $s \geq 1$ et $r - s - 1 = 1$. — On a $u = (A + E + B + D) + 2B + 2sC + (n-t+1)F$.

Si $n - t + 1 = 1$, on écrit :
$$A + E + B + D + 2C + F + 2H = (18; 8, 7, 6, 4, 3, 2)$$
$$= \mathbf{3}(3; 2, 1, 0, 0, 1, 0) + \mathbf{2}(5; 1, 2, 3, 2, 0, 1).$$

Si $n - t + 1 \neq 1$, on écrit :
$$A + E + 3B + D + 2C + 2H = (22; 10, 9, 8, 6, 3, 2)$$
$$= \mathbf{3}(4; 2, 1, 2, 2, 1, 0) + \mathbf{2}(5; 2, 3, 1, 0, 0, 1).$$

Pour $x_q = 3$, on a :
$$A + E + B + D + (n-t+1)F + 3H = (17; 7, 6, 5, 5, 4, 3) + (n-t+1)F$$
$$= \mathbf{3}(2; 1, 0, 1, 1, 0, 1) + \mathbf{2}(5; 2, 3, 1, 1, 2, 0) + (\mathbf{n} - \mathbf{t} + \mathbf{2})F.$$

4.3.6. $\epsilon_q = 1$, $r - s - 1 = 1$ et $t - r \neq 1$.

On a $u = (3t+n+1; 2t, t+r, t+r-1, t-r+3, t-r, 0)$, $u = (t-r)(A+E) + (B+D) + 2B + 2(r-2)C + (n-t+1)F$.

(i) $r = 2$. — C'est la situation de 4.3.2. (i).

(ii) $r > 2$ et $t = r$. — Alors $m_1 = m_2$.

$$B + D + 2C + (n - t + 1)F + 2H = (14;\, \mathbf{6}, \mathbf{6}, 5, 3, 2, 2) + (n - t + 1)F$$
$$= \mathbf{3}(2;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1, 0, 0) + (6;\, \mathbf{3}, \mathbf{3}, 2, 0, 2, 2) + (\mathbf{n} - \mathbf{t} + \mathbf{3})F$$
$$B + D + 2C + (n - t + 1)F + 3H = (17;\, \mathbf{7}, \mathbf{7}, 6, 4, 3, 3) + (n - t + 1)F$$
$$= \mathbf{3}(2;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, 1, 1) + \mathbf{2}(5;\, \mathbf{2}, \mathbf{2}, 3, 2, 0, 0) + (\mathbf{n} - \mathbf{t} + \mathbf{2})F.$$

(iii) $r > 2$ et $t - r \geq 2$. — Alors $u = (t - r)(A + E) + (B + D) + 2B + 2(r - 2)C + (n - t + 1)F$.

Si $t - r \neq 2$, c'est la situation de 4.3.5 (iv).

Si $t - r = 2$, c'est la situation de 4.3.6. (ii). Pour $u + 3H$ et pour $u + 2H$, on a :

$$2(A + E) + (B + D) + 2C + (n - t + 1)F + 2H = (22;\, 10, 8, 7, 5, 4, 2)$$
$$= \mathbf{2}(4;\, 2, 1, 2, 1, 2, 1) + \mathbf{3}(4;\, 2, 2, 1, 1, 0, 0) + (\mathbf{n} - \mathbf{t} + \mathbf{3})F.$$

4.3.7. $\epsilon_q = 1$, $r \neq s$ $r - s - 1 \neq 1$, $t - r \neq 1$ et $n = t$.

On a $u = (4t + 1;\, 2t, t + r, t + s + 1, t - s + 1, t - r, 0)$, $u = (t - r)(A + E) + (r - s - 1)(B + D) + 2B + 2sC + F$.

(i) $t - r \geq 2$. — Se traite comme 4.3.3 (ii).

(ii) $t - r = 0$. — Se traite comme 4.3.3 (i) pour $s \neq 0$ et pour $s = 0$ et $r \neq 1$. Si $s = 0$ et $r = 1$, alors $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ et $m_5 = m_6$.

$$u + H = (8;\, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = (2;\, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \mathbf{3}(2;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$
$$u + 2H = (11;\, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) = (2;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$
$$+ (0;\, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}) + \mathbf{3}(3;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

4.3.8. *Remarque.* — Dans la suite, on traite les cas où ϵ_q vaut -1, on pourra donc supposer $x_q \geq 3$ (*cf.* 3.3.3) car si $(n, t, r, s) = (1, 1, 0, 0)$ et $x_q = 2$, alors $(d, g) = (11, 13)$ et alors voir 4.2.

4.3.9. $\epsilon_q = -1$ et $r = s$. Alors $u = (3t + n - 1;\, 2t, t + r, t + r - 1, t - r - 1, t - r, 0)$.

(i) $t = r = 0$. — Alors $m_1 = m_2 = m_5 = m_6$ et $m_3 = m_4$.

Si $n \neq 1$, on écrit $u + H = (2;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \mathbf{n}F$.

Si $n = 1$, on écrit :

$$u + 2H = (6;\, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$$
$$u + 3H = (9;\, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}) = (0, 0, 0, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$
$$+ \mathbf{3}(3;\, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

(ii) $t = r \neq 0$. — Alors $m_1 = m_2$ et $m_5 = m_6$.

Si $n - t \neq 1$, on écrit :

$$u + H = (4t + 2; \mathbf{2t + 1}, \mathbf{2t + 1}, 2t, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{n - t})F.$$

Si $n - t = 1$, on écrit :

$$u + 3H = (4t + 6; \mathbf{2t + 3}, \mathbf{2t + 3}, 2t + 2, 2, \mathbf{3}, \mathbf{3}) + \mathbf{3}F$$

$$\begin{aligned} u + 4H &= (4t + 12; \mathbf{2t + 4}, \mathbf{2t + 4}, 2t + 3, 3, \mathbf{4}, \mathbf{4}) \\ &= \mathbf{3}(2; \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (4t + 6; \mathbf{2t + 1}, \mathbf{2t + 1}, 2t, 0, \mathbf{4}, \mathbf{4}). \end{aligned}$$

(iii) $t - r \geq 1$ et $r = 0$. — Alors $m_2 = m_5$ et $m_3 = m_4$; $u = (3t + n - 1; 2t, \mathbf{t}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t}, 0)$.

Si $n \neq 2$ et t pair, on écrit :

$$u = (3t; 2t, \mathbf{t}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t}, 0) + (\mathbf{n - 1})F.$$

Si $n = 2$ et t pair, on écrit :

$$u + 2H = (3t + 4; 2t + 2, \mathbf{t + 2}, \mathbf{t + 1}, \mathbf{t + 1}, \mathbf{t + 2}, 2) + \mathbf{3}F$$

$$\begin{aligned} u + 3H &= (3t + 10; 2t + 3, \mathbf{t + 3}, \mathbf{t + 2}, \mathbf{t + 2}, \mathbf{t + 3}, 3) \\ &= (3t - 6; 2t - 4, \mathbf{t - 2}, \mathbf{t - 2}, \mathbf{t - 2}, \mathbf{t - 2}, 0) \\ &\quad + \mathbf{2}(5; 2, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) + \mathbf{3}(2; 1, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 1). \end{aligned}$$

Si $n \notin \{1, 3\}$ et t impair, on écrit :

$$u = (3t + 1; 2t, \mathbf{t}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t - 1}, \mathbf{t}, 0) + (\mathbf{n - 2})F.$$

Si $n = 1$, alors $t = 1$, on écrit :

$$u + 3H = (12; 5, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 3) = \mathbf{3}(2; 1, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 1) + (6; 2, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$$

$$u + 4H = (15; 6, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, 4) = (12; 6, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, 4) + \mathbf{3}F.$$

Le cas $n = 3$ et $t = 1$ se déduit du cas $n = t = 1$ en ajoutant $\mathbf{2}F$.

Le cas $n = 3$ et $t = 3$ se déduit du cas $n = t = 1$ en ajoutant $\mathbf{2}(4; 2, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$.

(iv) $t - r \geq 1$ et $r \neq 0$. — Alors $u = (3t + n - 1; 2t, t + r, t + r - 1, t - r - 1, t - r, 0)$ il revient au même de décomposer u' où $u' = (3t + n - 1; 2t, t + r, t + r - 1, t - r, t - r - 1, 0)$ on a alors $u' = (t - r - 1)(A + E) + (2r - 2)C + (B + C + D + E) + (n - t)F$.

Si $t - r - 1 \neq 1$, on écrit :

$$\begin{aligned} B + C + D + E + 3H &= (16; 7, 6, 5, 4, 3, 3) \\ &= \mathbf{3}(2; 1, 0, 1, 0, 1, 1) + \mathbf{2}(5; 2, 3, 1, 2, 0, 0) \end{aligned}$$

$$B + C + D + E + 3H + F = (17;\, 7,6,5,4,3,3)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 1,2,1,0,1,1) + \mathbf{2}(4;\, 2,0,1,2,0,0)$$
$$B + C + D + E + 4H = (19;\, 8,7,6,5,4,4)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 2,1,0,1,0,0) + \mathbf{2}(5;\, 1,2,3,1,2,2)$$
$$B + C + D + E + 4H + F = (20;\, 8,7,6,5,4,4)$$
$$= \mathbf{3}(4;\, 2,1,2,1,0,0) + \mathbf{2}(4;\, 1,2,0,1,2,2).$$

Si $t - r - 1 = 1$, on écrit :

$$A + B + C + D + 3H = (18;\, 7,7,6,5,4,3)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,1,0,1,0,1) + \mathbf{2}(5;\, 2,2,3,1,2,0) + \mathbf{2}F;$$
$$A + B + C + D + 2E + 4H = (23;\, 10,8,7,6,5,4)$$
$$= \mathbf{3}(4;\, 2,2,1,2,1,0) + \mathbf{2}(4;\, 2,1,2,0,1,2) + \mathbf{3}F.$$

4.3.10. $\epsilon_q = -1$, $r > s$ et $n = t$.

Alors $u(4t-1;\, 2t, t+r, t+s-1, t-s-1, t-r, 0)$; $u = (t-r)(A+E) + (r-s-1)(B+D) + 2D + 2sC - F$.

(i) $s = 0$. — Alors $m_{\mathbf{3}} = m_{\mathbf{4}}$. Comme en 4.3.1 (ii), $\operatorname{div}_p(B+D) = 2$.

Si $t - r \neq 0$, on écrit :

$$A + E + 2D - F + 2H = (13;\, 6,5,3,3,3,2)$$
$$= \mathbf{3}(3;\, 2,1,\mathbf{1},\mathbf{1},1,0) + \mathbf{2}(2;\, 0,1,\mathbf{0},\mathbf{0},0,1);$$
$$A + E + 2D - F + 3H = (16;\, 7,6,4,4,4,3)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,0,\mathbf{1},\mathbf{1},0,1) + (10;\, 4,6,\mathbf{1},\mathbf{1},4,0).$$

Si $t - r = 0$, on écrit :

$$2D + 3H - F = (12;\, 5,5,\mathbf{3},\mathbf{3},3,3)$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,1,\mathbf{0},\mathbf{0},1,1) + (6;\, 2,2,\mathbf{3},\mathbf{3},0,0);$$
$$2D + 4H - F = (15;\, 6,6,\mathbf{4},\mathbf{4},4,4)$$
$$= \mathbf{2}(6;\, 3,3,\mathbf{2},\mathbf{2},2,2) + \mathbf{3}F.$$

(ii) $s \neq 0$ et $t - r = 0$. — Alors $u = (r-s-1)(B+D) + 2D + 2sC - F$.

Si $r - s - 1 \neq 1$, alors $m_{\mathbf{5}} = m_{\mathbf{6}}$, on écrit :

$$2D + 3H - F = (12;\, 5,5,3,3,\mathbf{3},\mathbf{3})$$
$$= \mathbf{3}(2;\, 1,1,1,1,\mathbf{0},\mathbf{0}) + (6;\, 2,2,0,0,\mathbf{3},\mathbf{3});$$
$$2D + 4H - F = (15;\, 6,6,4,4,\mathbf{4},\mathbf{4})$$
$$= \mathbf{2}(6;\, 3,3,2,2,\mathbf{2},\mathbf{2}) + \mathbf{3}F.$$

Si $r-s-1=1$, on écrit :

$$B+D+2C-F+3H=(16;7,7,6,4,3,3)$$
$$=\mathbf{3}(2;1,1,0,0,1,1)+\mathbf{2}(5;2,2,3,2,0,0);$$
$$B+D+2C+2D-F+4H=(23;10,10,7,5,4,4)$$
$$=\mathbf{3}(3;2,0,1,1,0,0)+\mathbf{2}(7;2,5,2,1,2,2).$$

(iii) $s\neq 0$ et $t-r\notin\{0,2\}$. — On a $u=(t-r)A+E+(r-s-1)(B+D)+2D+2sC-F$.

Si $r-s-1\neq 1$, on écrit :

$$A+E+2C-F+2H=(13;6,5,5,3,3,2)$$
$$=\mathbf{3}(3;2,1,1,1,1,0)+\mathbf{2}(2;0,1,1,0,0,1);$$
$$A+E+2C+2D-F+3H=(20;9,8,6,4,4,3)$$
$$=\mathbf{3}(2;1,0,0,0,0,1)+\mathbf{2}(7;3,4,3,2,2,0).$$

Si $r-s-1=1$, on écrit :

$$A+E+B+D-F+3H=(16;7,6,5,5,4,3)$$
$$=\mathbf{3}(2;1,0,1,1,0,1)+\mathbf{2}(5;2,3,1,1,2,0);$$
$$A+E+B+D-F+2C+4H=(23;10,9,8,6,5,4)$$
$$=\mathbf{3}(3;2,1,0,0,1,0)+\mathbf{2}(7;2,3,4,3,1,2).$$

(iv) $s\neq 0$ et $t-r=2$. — On refait la décomposition de (ii) ci-dessus en remarquant, pour le cas $r-s-1\neq 1$ et $u+3H$, que

$$2(A+E)+2D+2C-F+3H=(24;11,9,7,5,5,3)$$
$$=\mathbf{3}(6;3,3,1,1,1,1)+\mathbf{2}(3;1,0,2,1,1,0).$$

4.3.11. $\epsilon_q=-1$, $r>s$ et $n>t$.

Alors $u=(3t+n-1;2t,t+r,t+s-1,t-s-1,t-r,0)$; $u=(t-r)(A+E)+(r-s-1)(B+D)+2D+2sC+(n-t-1)F$.

(i) $n-t-1=1$. — Se déduit du cas $n-t-1=-1$ en ajoutant $2F$.

(ii) $n-t-1\neq 1$ et $t-r=1$.

Si $s=0$, $m_{\mathbf{3}}=m_{\mathbf{4}}$, $\mathrm{div}_p(B+D)=2$ et on a

$$A+E+2D+2H=(14;6,5,3,3,3,2)$$
$$=\mathbf{3}(2;0,1,\mathbf{1},\mathbf{1},1,0)+\mathbf{2}(4;3,1,\mathbf{0},\mathbf{0},0,1);$$
$$A+E+2D+3H=(17;7,6,4,4,4,3)$$
$$=\mathbf{3}(3;1,2,\mathbf{1},\mathbf{1},0,1)+(8;4,0,\mathbf{1},\mathbf{1},4,0).$$

Si $s \neq 0$ et $r - s - 1 \neq 1$, on écrit :

$$A + E + 2C + 2H = (14; 6, 5, 5, 3, 3, 2)$$
$$= \mathbf{3}(2; 0, 1, 1, 1, 1, 0) + \mathbf{2}(4; 3, 1, 1, 0, 0, 1);$$
$$A + E + 2C + 2D + 3H = (21; 9, 8, 6, 4, 4, 3)$$
$$= \mathbf{3}(3; 1, 2, 0, 0, 0, 1) + \mathbf{2}(6; 3, 1, 3, 2, 2, 0).$$

Si $s \neq 0$ et $r - s - 1 = 1$, on écrit :

$$A + E + B + D + 3H = (17; 7, 6, 5, 5, 4, 3)$$
$$= \mathbf{3}(3; 1, 2, 1, 1, 0, 1) + \mathbf{2}(4; 2, 0, 1, 1, 2, 0);$$
$$A + E + B + D + 2C + 4H = (24; 10, 9, 8, 6, 5, 4)$$
$$= \mathbf{3}(2; 0, 1, 0, 0, 1, 0) + \mathbf{2}(9; 5, 3, 4, 3, 1, 2).$$

(iii) $n - t - 1 \neq 1$, $t - r \neq 1$ et $r - s - 1 = 1$.

Si $s = 0$, on a déjà vu que $\operatorname{div}_p(B + D) = 2$.

Si $s \neq 0$, on écrit :

$$B + D + 2C + 3H = (17; 7, 7, 6, 4, 3, 3)$$
$$= \mathbf{3}(3; 1, 1, 2, 0, 1, 1) + \mathbf{4}(2; 1, 1, 0, 1, 0, 0);$$
$$B + D + 2C + 2D + 4H = (24; 10, 10, 7, 5, 4, 4)$$
$$= \mathbf{2}(6; 2, 2, 2, 1, 2, 2) + \mathbf{3}(4; 2, 2, 1, 1, 0, 0).$$

BIBLIOGRAPHIE

[E] Ellia (Ph.). — D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbf{P}^3$, Preprint Université de Nice, n° 94, 1986.

[E′] Ellia (Ph.). — Points rationnels de courbes génériques de $\mathbf{P}^3$, Preprint Université de Nice, n° 95, 1986.

[F] Fulton (W.). — *Intersection Theory.* — Berlin, Springer-Verlag, 1984.

[G] Grothendieck (A.). — Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections, Anneaux de Chow et applications, Séminaire Chevalley n° 2, 1958.

[G–P] Gruson (L.) et Peskine (C.). — Genre des courbes de l'espace projectif, *Algebraic geometry* [Proc. Tromsø. 1977], p. 31–59. — Berlin, Springer-Verlag, 1978 (*Lecture Notes in Math.*, **687**).

[G–P′] Gruson (L.) et Peskine (C.). — Genre des courbes de l'espace projectif, II, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* , t. **15**, n° 4, 1982, p. 401–418.

[H] Halphen (G.). — Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, *J. École Polytechnique*, t. **52**, 1882, p. 1–200.

[H′] Hartshorne (R.). — *Algebraic geometry.* — Berlin, Springer-Verlag, 1977, GTM 52.

[H-H] Hartshorne (R.) and Hirschowitz (A.). — Smoothing algebraic space curves, *Algebraic geometry* [Proceedings. 1983], p. 98–131. — Sitges (*Lecture Notes in Math.*, **1124**).

[M] Mestrano (N.). — Points rationnels des courbes génériques de $\mathbf{P}^3$, *I*, *Bull. Soc. Math. France*, t. **113**, 1985, p. 295–304.

[M′] Mestrano (N.). — Points rationnels des hypersurfaces génériques de $\mathbf{P}^n$, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. **301**, n° 2, 1985, p. 31–33.