Bulletin de la S. M. F.

J.-L. Waldspurger

Un exercice sur $GSp(4, F)$ et les représentations de Weil

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 35-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__35_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 35-69.

UN EXERCICE SUR $GSp(4, F)$ ET LES REPRÉSENTATIONS DE WEIL

PAR

J.-L. WALDSPURGER (*)

RÉSUMÉ. — Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2. On considère le groupe $GSp(4, F)$ et son sous-groupe parabolique standard Q dont un sous-groupe de Lévi R est isomorphe à $GSp(2, F) \times F^{\times}$. Soit ρ une représentation cuspidale irréductible de R. On détermine à quelle condition la représentation induite $\mathrm{ind}_Q^{GSp(4, F)}(\rho)$ est réductible. Soit V un espace vectoriel sur F, de dimension 6, muni d'une forme quadratique q totalement déployée. Soit ω la représentation de Weil de $GSp(4, F)$ associée au couple $(GSp(4, F), GO(V, q))$. On montre que si π est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{ind}_Q^{GSp(4, F)}(\rho)$ et si π est de carré intégrable, alors π intervient comme quotient de ρ.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2. Considérons le groupe des similitudes symplectiques $GSp(4, F)$, et son sous-groupe parabolique standard Q dont un sous-groupe de Lévi R est isomorphe à $GSp(2, F) \times F^{\times}$. Soit ρ une représentation cuspidale irréductible de R. On se propose de déterminer à quelle condition (portant sur ρ) la représentation induite $\mathrm{ind}_Q^{GSp(4, F)}(\rho)$ est réductible. Soit d'autre part V un espace vectoriel de dimension 6 sur F, muni d'une forme quadratique q totalement déployée. Le couple $(GSp(4, F), GO(V, q))$ est l'analogue pour le groupe $GSp(24, F)$ de la paire réductive duale habituelle $(Sp(4, F), O(V, q))$ pour le groupe $Sp(24, F)$. En particulier, on peut définir une représentation de Weil ω de $GSp(4, F)$ associée à ce couple. Nous démontrons le résultat suivant : si π est un sous-quotient de l'induite ci-dessus et si π est de carré intégrable, alors π intervient comme quotient de la représentation de Weil ω.

(*) Texte reçu le 13 décembre 1985, révisé le 6 mai 1986

J.-L. Waldspurger, E.N.S., Centre de Mathématiques, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484 1987/01 35 36/$5.60

Cet article a été écrit pour répondre à une question de VIGNÉRAS qui a étudié la classification des représentations de $GSp(4, F)$ de carré intégrable [V]. Il nous semble avoir par ailleurs l'intérêt de fournir un exemple d'application des techniques de la théorie des représentations de Weil.

Le résultat sur la réductibilité de la représentation induite recoupe certainement des résultats de SHAHIDI [Sha 1]. La méthode que nous utilisons ici consiste dans le calcul de divers espaces de coïnvariants de la représentation de Weil évoquée ci-dessus. Ce calcul est repris des travaux de Howe, KUDLA, RALLIS, etc. (*cf.* par exemple [R], [K]). La seule différence, peut-être, est que pour obtenir le résultat assez fin qu'on a en vue, on doit travailler avec des espaces filtrés là où Kudla, par exemple, travaille avec les gradués associés.

NOTATIONS. — Soient F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, $\mathfrak{o}$ son anneau des entiers, ϖ une uniformisante, q le nombre d'éléments du corps résiduel de F, v la valuation de F, ψ un caractère continu non trivial de F. Pour $t \in F^\times$, on note ψ^t le caractère de F tel que $\psi^t(x) = \psi(tx)$. Pour tout espace topologique X localement compact totalement discontinu, on note $\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs complexes, localement constantes, à support compact (cet espace peut différer du classique espace des fonctions de Schwartz-Bruhat, par exemple pour $X = \mathbf{Z}$).

1. Rappels sur les représentations de Weil

On donne ici des formules générales justifiant toutes les formules utilisées par la suite.

Soit Z un espace vectoriel de dimension finie sur F, muni d'une forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit H_Z le groupe de Heisenberg associé, égal à l'ensemble $Z \times F$ muni du produit

$$(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + \langle z, z' \rangle / 2),$$

pour $z, z' \in Z$, $t, t' \in F$. Si $z \in Z$, on note encore z l'élément $(z, 0)$ de H_Z. Ce groupe H_Z admet, à isomorphisme près, une unique représentation irréductible $\omega_Z(\psi, \ )$ telle que $\omega_Z(\psi, (0, t))$ soit l'homothétie de rapport $\psi(t)$ pour tout $t \in F$. Supposons que $Z = Z' \oplus Z''$ (somme directe), avec Z' et Z'' orthogonaux, que $Z' = X \oplus Y$ avec X et Y totalement isotropes, et que $\omega_{Z''}(\psi, .)$ se réalise dans un espace $L_{Z''}$ (si $Z''=\{0\}$, $L_{Z''}=\mathbb{C}$). Alors $\omega_Z(\psi, .)$ se réalise dans l'espace L_Z des fonctions $f: Y \to L_{Z''}$, localement constantes, à support compact (cet espace s'identifie à $\mathscr{S}(Y)\otimes L_{Z''}$). Pour $f\in L_Z$ et $y\in Y$, on a les formules

$$[\omega_Z(\psi, y')f](y)=f(y+y'), \quad \text{pour tout } y'\in Y,$$

$$[\omega_Z(\psi, x)f](y)=\psi(\langle y, x\rangle)f(y), \quad \text{pour tout } x\in X,$$

$$[\omega_Z(\psi, z'')f](y)=\omega_{Z''}(\psi, z'')[f(y)], \quad \text{pour tout } z''\in Z'',$$

$$[\omega_Z(\psi, (0, t))f](y)=\psi(t)f(y), \quad \text{pour tout } t\in F.$$

Soit $\Gamma=GSp(Z)$ le groupe des similitudes symplectiques de Z. On peut définir une représentation projective ω_Γ de Γ dans l'espace $\mathscr{L}_Z$ des fonctions $f: F^\times \to L_Z$ localement constantes à support compact ($\mathscr{L}_Z$ s'identifie à $\mathscr{S}(F^\times)\otimes L_Z$, *cf.* notations). Donnons quelques formules pour cette représentation. Sous les hypothèses ci-dessus, soient Π le sous-groupe parabolique des éléments γ de Γ tels que $\gamma X\subset X$, Δ le sous-groupe de Lévi des éléments γ de Π tels que $\gamma Y\subset Y$, N le radical unipotent de Π. Pour $\gamma\in\Gamma$, notons $\lambda_\Gamma(\gamma)$ le scalaire tel que $\langle\gamma z, \gamma z'\rangle=\lambda_\Gamma(\gamma)\langle z, z'\rangle$ pour tous $z, z'\in Z$. Posons $\Gamma''=GSp(Z'')$, si $Z''\neq\{0\}$, $\Gamma''=F^\times$ si $Z''=\{0\}$. Dans le premier cas $\lambda_{\Gamma''}$ est bien défini. Dans le second, on pose $\lambda_{\Gamma''}=\mathrm{id}_{F^\times}$. Le groupe Δ s'identifie au groupe des triplets

$$(\gamma_X, \gamma'', \gamma_Y)\in GL(X)\times\Gamma''\times GL(Y)$$

tels que

$$\langle\gamma_X x, \gamma_Y y\rangle=\lambda_{\Gamma''}(\gamma'')\langle x, y\rangle$$

pour tous $x\in X$, $y\in Y$. Un élément v de N détermine deux applications $h_v: Y\to Z''$, $n_v: Y\to X$, telles que

$$v(y)=y+h_v(y)+n_v(y)$$

pour tout $y\in Y$. On peut identifier un élément f de $\mathscr{L}_Z$ soit à une fonction $f_1: Y\to\mathscr{L}_Z$, soit à une fonction $f_2: Y\times F^\times\to L_{Z''}$. Pour $f\in\mathscr{L}_Z$, $y\in Y$, $t\in F^\times$, on a les formules suivantes

$$[\omega_\Gamma(v)f]_2(y, t)=\psi(t\langle n_v(y), y\rangle/2)\,\omega_{Z''}(\psi^t, -h_v(y))[f_2(y, t)],$$

pour tout $v\in N$,

$$[\omega_\Gamma(\delta)f]_1(y)=|\det\gamma_Y|^{-1/2}\,\omega_{\Gamma''}(\gamma'')[f_1(\gamma_Y^{-1}y)],$$

pour tout $\delta=(\gamma_X, \gamma'', \gamma_Y)\in\Delta$. Si $Z''=\{0\}$, $\Gamma''=F^\times$, et $f'\in\mathcal{S}_{Z''}$, auquel cas f'' est une fonction de $F^\times$ dans $\mathbb{C}$, on pose dans les formules ci-dessus

$$[\omega_{\Gamma''}(\gamma'')\, f''](t)=f''(t\gamma'').$$

Dans ce qui suit, on se limitera à un certain sous-groupe Γ_1 de Γ. La représentation projective ω_Γ se restreindra en une véritable représentation de Γ_1, et les formules ci-dessus, restreintes à Γ_1, seront celles de cette représentation.

2. Rappel d'un résultat de Kudla

Soit W un espace de dimension paire sur F, muni d'une forme symplectique. Pour $n\geqq 1$, soit V_n un espace de dimension $2n$ sur F, muni d'une forme quadratique « déployée », i. e. s'écrivant

$$x_{-n}x_n+x_{-n}x_{n-1}+\ldots+x_{-1}x_1$$

dans une base $\{e_{\pm i};\ i=1, \ldots, n\}$. Soit $Z_n=W\otimes V_n$ muni de la forme symplectique produit, soit ω_n la représentation de Weil de $GSp(Z_n)$. Les groupes $GSp(W)$ et $GO(V_n)$ (groupe des similitudes) se plongent dans $GSp(Z_n)$. Soient ω_n^W, ω_n^V les restrictions de ω_n à $GSp(W)$, resp. $GO(V_n)$. Pour $m\leqq n$, soit $P_{n,m}$ le sous-groupe parabolique de $GO(V_n)$, stabilisateur du drapeau de sous-espaces

$$\{V_n(-n), V_n(-n+1), \ldots, V_n(-m-1), V_n(m), \ldots, V_n(n-1), V_n(n)\}$$

où pour $i\in\{-n, \ldots, n\}$, $i\neq 0$, $V_n(i)$ est le sous-espace de V_n engendré par $\{e_{-n}, e_{-n+1}, \ldots, e_i\}$. Son sous-groupe de Lévi est isomorphe à $(F^\times)^{n-m}\times GO(V_m)$. Rappelons que si G est un groupe réductif sur F, si P est un sous-groupe parabolique de G, si L est un sous-groupe de Lévi de P, et si ρ est une représentation cuspidale irréductible de L, Bernstein a défini la catégorie $\mathrm{Alg}_G(L, \rho)$ des représentations lisses π de G telles que pour sous-quotient irréductible π' de π, il existe un caractère « non ramifié » χ de L tel que π' intervienne dans la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho\otimes\chi)$$

(*cf.* [B] proposition 2.8 pour plus de détails).

Soient ρ une représentation irréductible cuspidale de $GSp(W)$, $n(\rho)$ le plus petit entier n tel que ρ intervienne comme quotient de ω_n^W. Éventuellement $n(\rho)=\infty$. Si $n \geqq n(\rho)$, on note ρ'_n la représentation de $GO(V_n)$ dans le plus grand quotient de ω_n^W isomorphe à une somme directe d'un certain nombre de copies de ρ.

Théorème (*Kudla*). — *Soit* ρ *une représentation irréductible cuspidale de* $GSp(W)$. *Alors*

(*i*) (i) $n(\rho)<\infty$;

(ii) *il existe une représentation irréductible cuspidale* $\rho_{n(\rho)}$ *de* $GO(V_{n(\rho)})$ *telle que* $\rho'_{n(\rho)}$ *soit isomorphe à une somme directe d'un certain nombre de copies de* $\rho_{n(\rho)}$;

(iii) *si* $n \geqq n(\rho)$, ρ'_n *appartient à* $\mathrm{Alg}_{GO(V_n)}(P_{n,\, n(\rho)}, 1 \times \ldots \times 1 \times \rho_{n(\rho)})$. $(1 \times \ldots \times 1 \times \rho_{n(\rho)}$ est une représentation de $(F^\times)^{n-n(\rho)} \times GO(V_{n(\rho)}))$. C'est démontré par Kudla pour les paires réductives $Sp(W) \times 0(V_n)$. Dans notre cas où pour tout $t \in F^\times$ il existe une similitude dans $GO(V_n)$ de rapport t, on n'a aucun mal à étendre le résultat à $GSp(W) \times GO(V_n)$. □

3. Rappels sur les modules de coïnvariants

On a besoin de quelques lemmes de théories des représentations des groupes localement compacts totalement discontinus. Les démonstrations sont standards. Nous les reproduisons à la fin du paragraphe pour la commodité du lecteur.

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu. Soient (π, A) une représentation lisse de G (i.e. π est une représentation lisse de G dans l'espace vectoriel complexe A), (ρ, E) une représentation admissible irréductible de G. On note $A(G, \rho)$ l'intersection des noyaux des éléments de $\mathrm{Hom}_G(A, E)$, et $A[G, \rho]$, ou simplement $A[G]$ si $\rho=1$, le quotient $A/A(G, \rho)$. La représentation π passe au quotient et définit une représentation $\pi[G, \rho]$ sur $A[G, \rho]$.

Lemme 3.1. — (i) *L'application* $A \mapsto A[G, \rho]$ est un foncteur exact à droite.

(ii) $\pi[G, \rho]$ *est isomorphe à une somme directe d'un certain nombre de copies de* ρ.

(iii) *Si* G *est réunion de sous-groupes compacts ouverts et* dim $E=1$, *l'application* $A \mapsto A[G, \rho]$ *est un foncteur exact.*

Supposons que G soit produit semi-direct de deux sous-groupes fermés G_1, G_2, avec G_1 distingué dans G. Soit (ρ_1, E_1) une représentation admissible irréductible de G_1 telle que $\rho_1(g_2 g_1 g_2^{-1}) = \rho_1(g_1)$ pour tous $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Si (π, A) est une représentation lisse de G, $A[G_1, \rho_1]$ est naturellement un G-module. Plus précisément, soit G_{12} la clôture du sous-groupe de G_1 engendré par les commutateurs $g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1}$ pour $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. C'est un sous-groupe distingué fermé de G. Posons $\bar{G}_1 = G_1/G_{12}$, $\bar{G} = G/G_{12}$. Le groupe $\bar{G}$ est produit direct de $\bar{G}_1$ et de G_2, et l'action de G sur $A[G_1, \rho_1]$ de « factorise » par une action de $\bar{G}$. D'autre part si (π_2, A_2) est une représentation lisse de G_2, on peut définir la représentation $(\rho_1 \otimes \pi_2, E_1 \otimes A_2)$ de G (qui se « factorise » elle aussi par $\bar{G}$).

LEMME 3.2. — *Soient (ρ_1, E_1), (π, A) comme ci-dessus. il existe une représentation lisse (π_2, A_2) de G_2, unique à isomorphisme près, telle que*

$$A[G_1, \rho_1] \simeq E_1 \otimes A_2$$

comme G-modules.

LEMME 3.3. — *Soient (ρ_1, E_1), (π, A) comme ci-dessus. Soit de plus (ρ_2, E_2) une représentation admissible irréductible de G_2. Alors on a l'égalité*

$$A[G, \rho_1 \otimes \rho_2] = (A[G_1, \rho_1])[G_2, \rho_2].$$

On utilisera dans les démonstrations les lemmes suivants.

LEMME 3.4. — *Soient H_1, H_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, (ρ_1, E_1) une représentation admissible irréductible de H_1, (π_2, A_2) une représentation lisse de H_2, A' un sous-espace $H_1 \times H_2$-invariant de $E_1 \otimes A_2$. Alors il existe un sous-espace A'_2 de A_2, invariant par H_2, tel que $A' = E_1 \otimes A'_2$.*

Démonstration. Posons

$$A'_2 = \{ a_2 \in A_2 ;\ \text{pour tout } e_1 \in E_1,\ e_1 \otimes a_2 \in A' \}.$$

Cet espace est invariant par H_2, et $E_1 \otimes A'_2 \subset A'$. Quotientons par $E_1 \otimes A'_2$. On est ramenés au cas où $A'_2 = \{0\}$, et on veut montrer qu'alors $A' = \{0\}$. Si $A' \neq \{0\}$, soit $a \in A'$, $a \neq 0$. On peut écrire $a = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes a'_i$, avec des vecteurs e'_i linéairement indépendants et $a'_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit K un sous-groupe ouvert compact de H_1 tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, e'_i appartienne au sous-espace E_1^K des vecteurs de E_1 invariants par K. Soit $\mathscr{H}_K$ l'algèbre des distributions sur H_1 à support compact.

biinvariantes par K. La représentation déduite de ρ_1 de $\mathscr{H}_K$ dans E_1^K est irréductible ([BZ] I.2.10) et E_1^K est de dimension finie. Donc l'application $\rho_1 : \mathscr{H}_K \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}} E_1^K$ est surjective, et il existe $f \in \mathscr{H}_K$ telle que

$$\rho_1(f)e_1^i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq 1, \\ e_1^1, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Alors $e_1^1 \otimes a_2^1 = \rho_1(f)a \in A'$. Soit $e_1 \in E_1$ quelconque. D'après l'irréductibilité de ρ_1, il existe une distribution f à support compact sur H_1 telle que $\rho_1(f)e_1^1 = e_1$. Alors $e_1 \otimes a_2^1 = \rho_1(f)(e_1^1 \otimes a_2^1) \in A'$. D'où $a_2^1 \in A'_2$, contradiction. □

LEMME 3.5. — *Soient H_1, H_2 deux groupes localement compacts totalement discontinus, (ρ_1, E_1) une représentation admissible irréductible de H_1, (π, B) une représentation lisse de $H_1 \times H_2$. Supposons que* $\bigcap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, *où f parcourt* $\mathrm{Hom}_{H_1}(B, E_1)$. *Alors il existe une représentation lisse (π_2, B_2) de H_2, unique à isomorphisme près, telle que π soit isomorphe au produit tensoriel externe $\rho_1 \otimes \pi_2$.*

Démonstration. — Soit $(\check{\rho}_1, E_1^\vee)$ la représentation contragrédiente de (ρ_1, E_1). Comme ρ_1 est irréductible, on a $(E_1^\vee \otimes E_1)[H_1] \simeq \mathbf{C}$ d'après le lemme de Schur. Supposons que (π_2, B_2) existe. Alors

$$(E_1^\vee \otimes B)[H_1] \simeq (E_1^\vee \otimes E_1 \otimes B_2)[H_1] \simeq (E_1^\vee \otimes E_1)[H_1] \otimes B_2 \simeq B_2.$$

D'où l'unicité de B_2. Réciproquement posons $B'_2 = (E_1^\vee \otimes B)[H_1]$, soit $p : E_1^\vee \otimes B \to B'_2$ la projection naturelle. L'espace B'_2 est naturellement muni d'une action lisse π'_2 de H_2. On définit une application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & B \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_1^\vee, B'_2) \\ & b \mapsto (e_1^\vee \mapsto p(e_1^\vee \otimes b)). \end{aligned}$$

Cette application entrelace π avec l'action de $H_1 \times H_2$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_1^\vee, B'_2)$ déduite de $\rho_1^\vee$ et π'_2. Soient $b \in B$, K un sous-groupe ouvert compact de H_1 fixant b, e_K l'idempotent associé de l'algèbre des distributions à support compact sur H_1. Pour $e_1^\vee \in E_1^\vee$, on a

$$\varphi(b)(e_1^\vee) = p(e_1^\vee \otimes b) = p(e_1^\vee \otimes \pi(e_K)b) = p(\rho_1^\vee(e_K^\vee)e_1^\vee \otimes b),$$

où $e_K^\vee$ est l'image de e_K par l'antiautomorphisme $h \mapsto h^{-1}$. Mais $e_K^\vee = e_K$, d'où

$$\varphi(b)(e_1^\vee) = \varphi(b)(\rho_1^\vee(e_K)e_1^\vee).$$

Autrement dit $\varphi(b)$ se factorise par $\rho_1^\vee(e_K)$. On a un plongement naturel $E_1 \otimes B_2' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1^\vee, B_2')$. L'admissibilité de ρ_1 implique que son image est le sous-espace des $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1^\vee, B_2')$ tel qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K de H_1 tel que f se factorise par $\rho_1^\vee(e_K)$. Alors φ se factorise par $\varphi' : B \to E_1 \otimes B_2'$. Montrons que φ' est injective. Soit $b \in B$, $b \neq 0$. Il existe par hypothèse $f \in \mathrm{Hom}_{H_1}(B, E_1)$ tel que $f(b) \neq 0$. Fixons un tel f et $e_1^\vee \in E_1^\vee$ tel que $e_1^\vee \circ f(b) \neq 0$. Par fonctorialité, f définit une application

$$f' : \quad (E_1^\vee \otimes B)[H_1] \to (E_1^\vee \otimes E_1)[H_1] \simeq \mathbb{C}.$$

On a $f' \circ p(e_1^\vee \otimes b) = e_1^\vee \circ f(b) \neq 0$. Donc $p(e_1^\vee \otimes b) \neq 0$, et $\varphi(b) \neq 0$. Donc φ est injective et φ' l'est *a fortiori*. Alors B s'identifie à un sous-$\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-module de $E_1 \otimes B_2'$, et l'existence de (π_2, B_2) résulte du lemme 3.4. □

Démonstration du lemme 3.2. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.5 aux groupes $H_1 = \tilde{G}_1$, $H_2 = G_2$, et au $H_1 \times H_2$-module $B = A[G_1, \rho_1]$. □

Démonstration du lemme 3.1. — En appliquant le lemme 3.2 au cas $G_2 = \{1\}$, $G_1 = G$, on obtient le (ii). Pour (i), il est clair que $A \mapsto A[G, \rho]$ est un foncteur. Soit

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

une suite exacte de G-modules. Considérons la suite déduite

$$A_1[G, \rho] \to A_2[G, \rho] \to A_3[G, \rho] \to 0.$$

Son exactitude équivaut à la bijectivité de l'application déduite

$$\varphi : \quad A_2[G, \rho]/A_1[G, \rho] \to A_3[G, \rho].$$

Remarquons que si $f : B \to C$ est un homomorphisme de G-modules et si C est isomorphe à une somme directe de copies de E_1, il existe un homomorphisme $f' : B[G, \rho] \to C$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & \\ & C \\ B[G, \rho] \arrow[ur, dashed, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est la projection naturelle. Appliquons cela à $B = A_2/A_1$, $C = A_2[G, \rho]/A_1[G, \rho]$, et $f: B \to C$ l'application naturelle. L'hypothèse sur C est vérifiée : d'après (ii) $A_2[G, \rho]$ vérifie cette hypothèse, et celle-ci se conserve par passage au sous-quotient. On en déduit un homomorphisme

$$(A_2/A_1)[G, \rho] \to A_2[G, \rho]/A_1[G, \rho],$$

ou encore, puisque $A_2/A_1 \simeq A_3$, un homomorphisme

$$\xi: \quad A_3[G, \rho] \to A_2[G, \rho]/A_1[G, \rho].$$

On vérifie aisément que φ et ξ sont des bijections réciproques. D'où (i). Enfin (iii) résulte de [BZ] proposition 2.35.*b*. □

Démonstration du lemme 3.3. — Écrivons $A[G_1, \rho_1] \simeq E_1 \otimes A_2$ comme au lemme 3.2, et soit B un espace vectoriel tel que $A_2[G_2, \rho_2] \simeq E_2 \otimes B$. On a les isomorphismes:

$$(A[G_1, \rho_1])[G_2, \rho_2] \simeq E_1 \otimes A_2[G_2, \rho_2] \simeq E_1 \otimes E_2 \otimes B.$$

En particulier cet espace est somme directe de copies de $E_1 \otimes E_2$. D'après la propriété universelle évoquée ci-dessus, la projection $A \to (A[G_1, \rho_1])[G_2, \rho_2]$ se factorise par un homomorphisme

$$\varphi: \quad A[G, \rho_1 \otimes \rho_2] \to (A[G_1, \rho_1])[G_2, \rho_2].$$

D'après (ii) du lemme 3.1, $A[G, \rho_1 \otimes \rho_2]$ est isomorphe à une somme directe de copies de $E_1 \otimes E_2$. En particulier en tant que G_1-module, il est isomorphe à une somme directe de copies de E_1 et comme ci-dessus la projection $A \to A[G, \rho_1 \otimes \rho_2]$ se factorise par un homorphisme

$$\xi_1: \quad A[G_1, \rho_1] \to A[G, \rho_1 \otimes \rho_2].$$

En tant que G_2-module, $A[G, \rho_1 \otimes \rho_2]$ est isomorphe à une somme directe de copies de E_2, et ξ_1 se factorise par un homorphisme

$$\xi: \quad (A[G_1, \rho_1])[G_2, \rho_2] \to A[G, \rho_1 \otimes \rho_2].$$

Il est immédiat que φ et ξ sont des bijections réciproques. □

4. La paire réductive en question

Soient W un espace de dimension 4 sur F, muni d'une forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$, (ε_i), $i=1, \ldots, 4$, une base de W telle que

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_4 \rangle = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle = 1,$$
$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0, \qquad \text{si} \quad \{i, j\} \neq \{1, 4\}, \{2, 3\}.$$

Posons $S=GSp(W)$, qu'on peut considérer comme un ensemble de matrices. On note Q le sous-groupe parabolique maximal des éléments $s \in S$ tels que $s\varepsilon_1 \in F\varepsilon_1$, R son sous-groupe de Lévi formé des éléments $s \in Q$ tels que $s\varepsilon_4 \in F\varepsilon_4$, U le radical unipotent de Q. C'est un groupe de Heisenberg. Pour $a, b, c \in F$, posons

$$u(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors $U=\{u(a, b, c);\ a, b, c \in F\}$. Pour $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, F)$, et $x, y \in F^\times$, tels que $xy=ad-bc$, posons

$$r(x, \sigma, y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

Alots $R=\{r(x, \sigma, y);\ x, y \in F^\times,\ \sigma \in GL(2, F),\ xy=\det(\sigma)\}$.

Soient (e_i), $i=1, \ldots, 4$, la base canonique de F^4, μ la forme linéaire sur $\Lambda_4(F^4)$ telle que $\mu(e_1 \wedge \ldots \wedge e_4)=1$. Posons $V=\Lambda^2(F^4)$. Soit ν : $V^{\otimes 2} \to \Lambda^4(F^4)$ l'application canonique. On munit V de la forme bilinéaire symétrique q telle que

$$q(v_1, v_2) = \mu \circ \nu(v_1 \otimes v_2).$$

Pour $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, $i \neq j$, soit $e_{ij}=e_i \wedge e_j$. Alors $\{e_{12}, e_{14}, e_{31}, e_{24}, e_{32}, e_{34}\}$ est une base de V, telle que

$$q(e_{14}, e_{32}) = -1, \qquad q(e_{12}, e_{34}) = q(e_{31}, e_{24}) = 1,$$

$$q(e_{ij}, e_{kl})=0, \qquad \text{si} \quad \{i, j, k, l\}\neq\{1, 2, 3, 4\}.$$

On note V_0 l'espace engendré par e_{14}, e_{31}, e_{24}, e_{32}. On identifie V_0 à $M(2, F)$ par

$$ae_{14}+be_{31}+ce_{24}+de_{32}\mapsto\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

La forme $q|_{V_0}$ s'identifie à la forme sur $M(2, F)$ suivante

$$(m_1, m_2)\mapsto -Tr(m_1 m_2^*),$$

où pour $m=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M(2, F)$, on pose

$$m^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Le groupe $G=GL(4, F)$ agit naturellement sur F^4 et sur V. Soit T le groupe des homothéties de V, qu'on peut identifier à $F^\times$. Soient $\tilde{G}=G\times T$, $\Theta=\{(z\text{ id}, z_{-2})\in\tilde{G};\ z\in F^\times\}$, $G^s=\tilde{G}/\Theta$. Alors G^s est le groupe des similitudes directes de V muni de q. Soit $(g, z)\in\tilde{G}$. Son rapport de similitude est $\lambda(g, z)=z^2\det(g)$. Soient P^s le sous-groupe parabolique des éléments $g\in G^s$ tels que $ge_{12}\in Fe_{12}$, M^s le sous-groupe de Lévi des éléments $g\in P^s$ tels que $ge_{34}\in Fe_{34}$, N^s le radical unipotent de P^s. Soit P le sous-groupe parabolique des matrices blocs de G de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix},\ A, D\in GL(2, F),\ B\in M(2, F),$$

M le sous-groupe de Lévi des matrices diagonales par blocs, N le radical unipotent de P. Alors $P^s=(P\times T)/\Theta$, $M^s=(M\times T)/\Theta$, $N^s\simeq N$. Pour $B\in M(2, F)$, on pose

$$n(B)=\begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour A, $D\in GL(2, F)$, on pose

$$m(A, D)=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Écrivons un élément général $xe_{12}+m+ye_{34}$ de V, avec $x, y \in F$, $m \in V_0$, sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ m. \\ y \end{pmatrix}$$

Alors l'action de P sur V s'écrit explicitement

$$n(B)\begin{pmatrix} x \\ m \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+Tr(Bm^{*})+y\det(B) \\ m+yB \\ y \end{pmatrix}$$

$$m(A, D)\begin{pmatrix} x \\ m \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\det(A) \\ AmD \\ y\det(D) \end{pmatrix}$$

pour tous $B \in M(2, F)$, $A, D \in GL(2, F)$.

Soit $Z = W \otimes V$, qu'on munit de la forme symplectique produit de la forme symplectique sur W et de la forme quadratique sur V. Soit $\Gamma = GSp(Z)$. Alors S et G^s s'identifient à des sous-groupes de Γ. La paire $(S, G^s$ va jouer un rôle analogue à celui des paires réductives duales de $Sp(Z)$. Remarquons que les centres de S et G^s s'identifient dans Γ. Ce centre commun est le groupe T des homothéties de Z.

Soit (π, E) une représentation admissible irréductible de S. Supposons que π intervienne comme quotient de $\omega_{\Gamma|S}$. Alors $\mathscr{L}_Z[S, \pi]$ est un $S \times G^s$-module, et il existe une représentation de G^s qu'on note $(\theta'(\pi), \theta'(E))$ telle que $\mathscr{L}_Z[S, \pi] \simeq E \otimes \theta'(E)$, comme $S \times G^s$-modules. On dit que la conjecture de Howe est vraie pour π si $\theta'(E)$ admet un unique quotient irréductible (ou bien si π n'intervient pas comme quotient de $\omega_{\Gamma|S}$). On note alors $(\theta(\pi), \theta(E))$ ce quotient.

5. Les représentations induites

Soient (ρ, E) une représentation admissible irréductible de $GL(2, F)$, χ un caractère de F^{*}. On définit une représentation $(\chi \times \rho, E)$ de R par

$$(\chi \times \rho)(r(x, \sigma, y)) = \chi(x)\,\rho(\sigma).$$

Les couples (χ, ρ) paramètrent les représentations irréductibles de R. On suppose désormais ρ cuspidale (certains disent plutôt « supercuspidale »). Soit $(i(\chi, \rho), I(\chi, \rho))$ la représentation induite de S. L'espace $I(\chi, \rho)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : S \to E$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, et telles que

$$\varphi(rus) = \delta(r)^{1/2}(\chi \times \rho)(r)[\varphi(s)]$$

pour tous $r \in R$, $u \in U$, $s \in S$, où

$$\delta(r(x, \sigma, y))^{1/2} = |xy^{-1}|.$$

On calcule aisément le module de Jacquet $i(\chi, \rho)[U]$. Comme R-module, il possède une suite de Jordan-Hölder de quotients $\chi \times \rho$ et $\chi^{-1} \times (\rho \otimes \chi)$. Donc $i(\chi, \rho)$ est au plus de longueur 2. Supposons $i(\chi, \rho)$ réductible. Si $\chi \neq \chi^{-1}$, ou $\rho \not\simeq \rho \otimes \chi$, $(i(\chi, \rho), I(\chi, \rho))$ possède un unique sous-module irréductible $(i_s(\chi, \rho), I_s(\chi, \rho))$ et un unique quotient irréductible $(i_q(\chi, \rho), I_q(\chi, \rho))$. On a d'ailleurs

$$i_s(\chi, \rho) \simeq i_q(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi).$$

Si $\chi = \chi^{-1}$ et $\rho \simeq \rho \otimes \chi$ [et toujours $i(\chi, \rho)$ réductible], comme, à torsion près, on peut supposer ρ unitaire, et donc $i(\chi, \rho)$ également, $I(\chi, \rho)$ est somme de deux sous-modules irréductibles non isomorphes :

$$(i(\chi, \rho), I(\chi, \rho)) = (i_1(\chi, \rho), I_1(\chi, \rho)) \oplus (i_2(\chi, \rho), I_2(\chi, \rho)).$$

Notre premier résultat est le suivant.

Proposition 5.1. — *Soient ρ une représentation cuspidale irréductible de $GL(2, F)$, et χ un caractère de F^*. La représentation $i(\chi, \rho)$ de $GSp(4, F)$ est réductible si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $\chi = 1$;

(2) *il existe un caractère quadratique χ' de F^* tel que $\chi' \neq 1$, $\rho \otimes \chi' \simeq \rho$, et $\chi = \chi' |.|$, ou $\chi = \chi' |.|^{-1}$.*

Remarque. — Ici et dans la suite, on entend par « caractère quadratique » un caractère d'ordre au plus 2.

Soient ρ_1, ρ_2 deux représentations cuspidales irréductibles de $GL(2, F)$. Alors $\rho_1 \times \rho_2$ est une représentation de M et on définit la représentation induite $(j(\rho_1, \rho_2), J(\rho_1, \rho_2))$ de $G = GL(4, F)$. Soit χ un caractère de F^*, et supposons que $\chi^2 = \omega_{\rho_1} \omega_{\rho_2}$, où ω_{ρ_i} est le caractère central de ρ_i. On définit la représentation $(j(\rho_1, \rho_2; \chi), J(\rho_1, \rho_2))$ de $\tilde{G}$ ou G^s par

$$j(\rho_1, \rho_2; \chi)(g, t) = \chi(t) j(\rho_1, \rho_2)(g)$$

pour tous $g \in G$, $t \in T$. On sait bien que $j(\rho_1, \rho_2)$ est irréductible sauf si $\rho_1 \simeq \rho_2 \otimes |\det|^{\pm 1}$ ([Z], proposition 1.11), auquel cas elle admet un unique sous-module irréductible $(j_s(\rho_1, \rho_2), J_s(\rho_1, \rho_2))$ et un unique quotient irréductible $(j_q(\rho_1, \rho_2), J_q(\rho_1, \rho_2))$. On définit de même $j_s(\rho_1, \rho_2; \chi)$ et $j_q(\rho_1, \rho_2; \chi)$. Notre deuxième résultat est le suivant.

Proposition 5.2. — *Soient ρ une représentation cuspidale irréductible de $GL(2, F)$ et χ un caractère de $F^\times$.*

(1) *La conjecture de Howe est vraie pour tout sous-quotient irréductible de $i(\chi, \rho)$.*

(2) (*a*) *Si $\chi = 1$, un et un seul sous-module irréductible $i_1(1, \rho)$ de $i(1, \rho)$ intervient comme quotient de $\omega_{\Gamma | S}$. On a*

$$\theta(i_1(1, \rho)) = j(\rho, \rho; \omega_\rho).$$

(*b*) *S'il existe un caractère quadratique χ' de $F^\times$ tel que $\chi' \neq 1$, $\rho \otimes \chi' \simeq \rho$ et $\chi = \chi' |.|$ ou $\chi = \chi' |.|^{-1}$, les représentations $i_s(\chi, \rho)$ et $i_q(\chi, \rho)$ interviennent comme quotients de $\omega_{\Gamma | S}$. On a*

$$\theta(i_s(\chi, \rho)) = j_s(\rho \otimes \chi, \rho; \chi\omega_\rho),$$

$$\theta(i_q(\chi, \rho)) = j_q(\rho \otimes \chi, \rho; \chi\omega_\rho).$$

(*c*) *Si $\chi = |.|$ ou $\chi = |.|^{-1}$, la représentation $i(\chi, \rho)$ intervient comme quotient de $\omega_{\Gamma | S}$. Si $\chi = |.|$, on a*

$$\theta(i(|.|, \rho)) = j_q(\rho \otimes |.|, \rho; |.|\omega_\rho).$$

(*d*) *Si χ ne vérifie aucune des conditions précédentes, la représentation $i(\chi, \rho)$ intervient comme quotient de $\omega_{\Gamma | S}$. On a*

$$\theta(i(\chi, \rho)) = j(\rho \otimes \chi, \rho; \chi\omega_\rho).$$

On pourrait énoncer un résultat dans « l'autre sens ». Le seul point intéressant serait que la représentation $j_s(\rho \otimes |.|, \rho; |.|\omega_\rho)$ n'interviendrait pas comme quotient de $\omega_{\Gamma | \tilde{G}}$

En suivant Bernstein, on peut regrouper les représerntations $i(\chi |.|^s, \rho \otimes |\det|^{s'})$, pour $s, s' \in \mathbb{C}$, en remplaçant les valeurs q^{-s} et $q^{-s'}$ qui interviennent dans les coefficients de ces représentations par des indéterminées X et Y. Précisément soit

$$A = \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]$$

et B un A-module. Soit $I^B(\chi, \rho)$ l'espace des fonctions

$$\varphi: \quad S \to B \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E$$

invariantes à droite par un sous-groupe ouvert et telles que

$$\varphi(rus) = \delta(r)^{1/2} (\chi(x) X^{v(x)} Y^{v(\det \sigma)} \otimes \rho(\sigma)) [\varphi(s)]$$

pour tous $r = r(x, \sigma, y) \in R$, $u \in U$, $s \in S$. Le groupe S agit par translations à droite dans $I^B(\chi, \rho)$. On note $i^B(\chi, \rho)$ cette représentation. Si C est un sous-A-module de B, $(i^C(\chi, \rho), I^C(\chi, \rho))$ est un sous-S-module de $(i^B(\chi, \rho), I^B(\chi, \rho))$. Par exemple si $B = A$ et C est l'idéal engendré par $X - q^{-s}$, $Y - q^{-s'}$, la représentation de S sur le quotient $I^A(\chi, \rho)/I^C(\chi, \rho)$ est canoniquement isomorphe à $i(\chi|.|^s, \rho \otimes |det|^{s'})$.

On peut de même regrouper les représentations

$$j(\rho_1 \otimes |\det|^s, \rho_2 \otimes |\det|^{s'}; \chi|.|^{s+s'})$$

pour $s, s' \in \mathbb{C}$ en remplaçant q^{-s} par X et $q^{-s'}$ par Y. Pour tout A-module B, on définit la représentation $(j^B(\rho_1, \rho_2; \chi), J^B(\rho_1, \rho_2))$.

6. Calcul d'un module de Jacquet

On se propose de calculer le $R \times G^s$-module $\mathcal{S}_Z[U]$. On va définir divers sous-quotients de $\mathcal{S}_Z$. Quand la représentation ω_Γ, restreinte à un sous-groupe H de Γ, définira naturellement une représentation de H dans ces sous-quotients, on notera encore encore ω_Γ la représentation ainsi définie de H.

Explications $\mathcal{S}_Z$ et ω_Γ. On choisit comme sous-espaces isotropes maximaux de Z :

$$X = F\varepsilon_1 \otimes V + W'' \otimes Fe_{12} + F\varepsilon_2 \otimes V_0,$$

$$Y = F\varepsilon_4 \otimes V + W'' \otimes Fe_{34} + F\varepsilon_3 \otimes V_0,$$

où W″ est le sous-espace de W de base $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. On note (v, w'', m) l'élément $\varepsilon_4 \otimes v + w'' \otimes e_{34} + \varepsilon_3 \otimes m$ de Y. On a $\mathscr{L}_Z = \mathscr{S}(Y \times F^\times)$ (*cf.* notations). Pour $f \in \mathscr{S}(Y \times F^\times)$, $(v, w'', m) \in Y$, $t \in F^\times$, on a les formules explicites suivantes :

(6.1) (i) pour tous $A, D \in GL(2, F)$, $z \in T$,

$$\omega_\Gamma(m(A, D), z)\, f(v, w'', m, t) = |z|^{-6} |\det A|^{-5/2} |\det D|^{-7/2}$$
$$\times f(z^{-1} m(A, D)^{-1} v,\ z^{-1} \det(D)^{-1} w'',\ z^{-1} A^{-1} m D^{*-1},\ tz^2 \det(AD));$$

supposons f de la forme $f(v, w'', m, t) = f_1(v, w'') f_2(m, t)$, alors

(6.1) (ii) pour tout $B \in M(2, F)$,

$$\omega_\Gamma(n(B))\, f(v, w'', m, t) = f_1(n(B)^{-1} v, w'')\, \omega_{Z''}(\psi', -w'' \otimes B)\, f_2(m, t),$$

(6.1) (iii) pour tous $\sigma \in GL(2, F)$, $x, y \in F^\times$, tels que $xy = \det(\sigma)$,

$$\omega_\Gamma(r(x, \sigma, y))\, f(v, w'', m, t)$$
$$= |x|^{-1/2} |y|^{-7/2} f_1(y^{-1} v, \sigma^{-1} w'')\, \omega_{\Gamma''}(\sigma)\, f_2(m, t),$$

où $Z'' = W'' \otimes V_0$, $\Gamma'' = GSp(Z'')$;

supposons f de la forme $f(v, w'', m, t) = f_3(v) f_4(w'', m, t)$, alors

(6.1) (iv) pour tous $a, b, c \in F$,

$$\omega_\Gamma(u(a, b, c))\, f(v, w'', m, t) = \psi(ctq(v, v)/2)\, f_3(v)$$
$$\times \omega_{Z'}(\psi', -b\varepsilon_2 \otimes v + a\varepsilon_3 \otimes v)\, f_4(w'', m, t),$$

(6.1) (v) pour tout $g \in G$,

$$\omega_\Gamma(g)\, f(v, w'', m, t) = |\det g|^{-1/2} f_3(g^{-1} v)\, \omega_{\Gamma'}(g)\, f_4(w'', m, t),$$

où $Z' = W'' \otimes V$, $\Gamma' = GSp(Z')$.

Posons $Y' = W'' \otimes F e_{34} + F\varepsilon_3 \otimes V_0$. Considérons l'application

$$\mathscr{S}(Y \times F^\times) \xrightarrow{\lambda} \mathscr{S}(Y' \times F^\times)$$
$$f \mapsto f' = \lambda(f)$$

où $f'(w'', m, t) = f(0, w'', m, t)$. Soit $\mathscr{S}_0$ son noyau. Il est stable par $Q \times G^s$, d'où une action de ces groupes sur le quotient $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)$ D'apres (6.1) (iv), U agit trivialement sur le quotient $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)$, et $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)[U] = \mathscr{S}(Y' \times F^\times)$.

Pour calculer $\mathscr{S}_0[U]$, commençons par calculer $\mathscr{S}_0[U_c]$, où $U_c=\{u(0, 0, c);\ c\in F\}$. Soit $\Sigma_0=\{v\in V;\ q(v, v)=0\}$. D'après (6;1) (iv), $\mathscr{S}_0[U_c]$ est l'image de $\mathscr{S}_0$ par l'application naturelle de restriction à $\Sigma_0\times Y'\times F^\times$. Cette image est l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $\Sigma_0\times Y'\times F^\times$, de support disjoint de $\{0\}\times Y'\times F^\times$, i.e. à support compact dans $(\Sigma_0-\{0\})\times Y'\times F^\times$. Soient $\tilde{P}_1$ l'ensemble des

$$\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, z\right)\in\tilde{G}$$

tels que $z\det(A)=1$, et P_1^s son image dans G^s. C'est le stabilisateur de e_{12} dans G^s. L'application

$$\begin{gathered}\tilde{P}_1\backslash\tilde{G}=P_1^s\backslash G^s\to\Sigma_0-\{0\}\\ g\mapsto g^{-1}e_{12}\end{gathered}$$

est un isomorphisme analytique. Pour $f\in\mathscr{S}_0$, soit $\varphi'_f:\tilde{G}\to\mathscr{S}(Y'\times F^\times)$ la fonction

$$\varphi'_f(g)(w'', m, t)=\omega_\Gamma(g)f(e_{12}, w'', m, t).$$

Alors $\mathscr{S}_0[U_c]$ s'identifie à l'espace des fonctions φ'_f, à savoir l'espace des fonctions $\varphi':\tilde{G}\to\mathscr{S}(Y'\times F^\times)$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, à support compact modulo P_1 et telles que

$$\varphi'(pg)=|\det(p\mid V)|^{-1/2}\,\omega_{\Gamma'}(p)[\varphi'(g)] \tag{6.2}$$

pour tous $g\in\tilde{G}$, $p\in\tilde{P}_1$ (où $\det(p\mid V)$ est le déterminant de l'action de p dans V). Transportons à cet espace de fonctions l'action de U. Pour φ' comme ci-dessus, a, $b\in F$, on a

$$[w_\Gamma(u(a, b, 0))\varphi'](g)(w'', m, t)=\psi(t\langle w'', -b\varepsilon_2+a\varepsilon_3\rangle)\varphi'(g)(w'', m, t).$$

On obtient le module de Jacquet $\mathscr{S}_0[U]$ en restreignant les fonctions ci-dessus à la variété $w''=0$. Soit donc $\mathscr{A}_c$ l'espace des fonctions φ : $\tilde{G}\to\mathscr{S}(V_0\times F^\times)$, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, à support compact modulo $\tilde{P}_1$, et telles que

$$\begin{aligned}(6.3)\quad &\varphi((m(A, D)n(B), z)g\\ &\qquad=|z|^{-4}|\det A|^{-3/2}|\det D|^{-5/2}\omega_\Gamma\ (m(A, D), z)[\varphi(g)]\end{aligned}$$

pour tous $B \in M(2, F)$, A, $D \in GL(2, F)$, $z \in T$ tels que z det $(A)=1$. [Remarquons que M s'envoie naturellement dans $GO(V_0, q \mid V_0) \subset \Gamma''$. La formule ci-dessus se déduit de (6.2)]. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_0 &\to \mathscr{A}_c \\ f &\mapsto \varphi_f \end{aligned}$$

définie par $\varphi_f(g)(m, t)=\omega_\Gamma(g) f(e_{12}, 0, m, t)$, définit un isomorphisme $\mathscr{S}_0[U] \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_c$.

Soit $\mu : \mathscr{S}(Y' \times F^\times) \to \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$ l'application telle que

$$\mu(f)(m, t)=f(0, m, t).$$

Soit $\mathscr{A}$ l'espace des couples (φ, ξ), où $\xi \in \mathscr{S}(Y' \times F^\times)$, $\varphi : \tilde{G} \to \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$, tels que

(6.4) (i) φ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert,

(ii) φ vérifie (6.3),

(iii) pour tout compact C de $\tilde{G}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $g \in C$, tout $z \in T$ tel que $|z|<\varepsilon$, on a $\varphi(zg)=0$,

(iv) pour tout compact C de $\tilde{G}$, il existe $N>0$ tel que pour tout $g \in C$, tout $z \in T$ tel que $|z|>N$, on a

$$\varphi(zg)=|z|^{-3} |\det(g \mid V)|^{-1/2} \mu \circ \omega_{\Gamma'}(zg) \xi.$$

Pour $f \in \mathscr{S}(Y \times F^\times)$, on définit (φ_f, ξ_f) par

$$\begin{gathered} \xi_f=\lambda(f), \\ \varphi_f(g)(m, t)=\omega_\Gamma(g) f(e_{12}, 0, m, t). \end{gathered}$$

Il est facile de voir que $(\varphi_f, \xi_f) \in \mathscr{A}$.

LEMME 6. — *L'application $f \mapsto (\varphi_f, \xi_f)$ se factorise par $\mathscr{S}(Y \times F^\times)[U]$ et définit un isomorphisme de $\mathscr{S}(Y \times F^\times)[U]$ sur $\mathscr{A}$.*

Démonstration. — Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{S}_0[U] \arrow[r] \arrow[d, "f \mapsto \varphi_f"'] & \mathscr{S}(Y \times F^\times)[U] \arrow[r] \arrow[d, "f \mapsto (\varphi_f, \xi_f)"'] & \mathscr{S}(Y' \times F^\times) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{A}_0 \arrow[r, "\varphi \mapsto (\varphi, 0)"'] & \mathscr{A} \arrow[r, "(\varphi, \xi) \mapsto \xi"'] & \mathscr{S}(Y' \times F^\times) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il est commutatif. La suite du bas est évidemment exacte. Celle du haut l'est aussi [Lemme 3.1.(iii)]. On a montré que la flèche de gauche était un isomorphisme. Celle de droite l'est aussi, donc celle du milieu également. □

Transportons sur l'espace $\mathscr{A}$ la représentation ω_T de $R \times \tilde{G}$. Pour $(\varphi, \xi) \in \mathscr{A}$, on a

(6.5) (i) pour $g \in \tilde{G}$, $\omega_T(g)(\varphi, \xi) = (\varphi', \xi')$, où

$$\varphi'(g') = \varphi(g' g), \quad \text{pour tout } g' \in G,$$
$$\xi' = |\det(g \mid V)|^{-1/2} \omega_{T'}(g) \xi,$$

(ii) pour $x, y \in F^\times$, $\sigma \in GL(2, F)$ tels que $xy = \det(\sigma)$,

$$\omega_T(r(x, \sigma, y))(\varphi, \xi) = (\varphi', \xi'),$$

où

$$\varphi'(g) = |x|^{-1/2} |y| 1/2\, \omega_{T''}(y^{-1} \sigma)[\varphi(yg)],$$

pour tout $g \in \tilde{G}$,

$$\xi' = |y|^{-3} \omega_{T'}(\sigma) \xi.$$

7. Calcul de coïnvariants sous R

Soient (ρ, E) une représentation cuspidale irréductible de $GL(2, F)$, χ un caractère de $F^\times$, (π, E) la représentation de R définie par

$$\pi(r) = \delta(r)^{1/2} (\chi \times \rho)(r).$$

On se propose de calculer $\mathscr{A}[R, \pi]$.

Pour $\sigma \in GL(2, F)$, $x \in F^\times$, on pose $r_1(\sigma) = r(\det \sigma, \sigma, 1)$, $r_2(x) = r(x, 1, x^{-1})$. Soient

$$R_1 = \{ r_1(\sigma);\ \sigma \in GL(2, F) \},$$
$$R_2 = \{ r_2(x);\ x \in F^\times \},$$

(π_1, E) la représentation de R_1 définie par

$$\pi_1(r_1(\sigma)) = |\det \sigma| \rho \otimes \chi(\sigma),$$

π_2 le caractère de R_2 défini par

$$\pi_2(r_2(x)) = |x|^2 \chi(x).$$

On a $R = R_1 \times R_2$, $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$. On va d'abord calculer $\mathscr{A}[R_1, \pi_1]$. Rappelons un résultat de Jacquet, Langlands et Shimizu. On considère la paire $GSp(2, F) \times GO(V_0, q|_{V_0})$. Le groupe $GL(2, F) \times GL(2, F)$ s'envoie naturellement dans $GO(V_0, q|_{V_0})$.

LEMME 7.1. — *Soit* (ρ', E') *une représentation cuspidale irréductible de* $GL(2, F) (\simeq GSp(2, F))$. *Alors le* $GSp(2, F) \times GL(2, F) \times GL(2, F)$*-module* $\mathscr{S}(V_0 \times F^\times)[GSp(2, F), \rho']$ *est isomorphe à* $(\rho' \otimes \rho' \otimes \rho', E' \otimes E' \otimes E')$. ([Shim], théorème 1).

On fixe un isomorphisme de $GSP(2, F) \times GL(2, F) \times GL(2, F)$-modules

$$\nu: \quad \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)[GSp(2, F), \rho \otimes \chi|.|^{3/2}] \to E \otimes E \otimes E,$$

où chaque groupe agit dans E par la représentation $\rho \otimes \chi|.|^{3/2}$. On note encore ν l'application qui s'en déduit sur $\mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$.

La partie $\tilde{G}$-lisse de $\mathrm{Hom}_{R_1}(\mathscr{A}_c, E)$ (où R_1 agit dans E par π_1) est l'espace des fonctions $\varphi^* : \tilde{G} \to \mathrm{Hom}_{GSp(2, F)}(\mathscr{S}(V_0 \times F^\times), E)$ (où $GSp(2, F)$ agit dans E par $\rho \otimes \chi|.|^{3/2}$), invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, et vérifiant une condition analogue à (6.3), l'action de φ^* sur un élément $\varphi \in \mathscr{A}_c$ étant donnée par

$$(\varphi^*, \varphi) = \int_{\tilde{P}_1 \backslash \tilde{G}} (\varphi^*(g), \varphi(g))\, dg.$$

Pour que $\varphi \in \mathscr{A}_c$ annule toutes ces fonctions φ^*, il faut et il suffit que les valeurs $\varphi(g)$ appartiennent à $\mathscr{S}(V_0 \times F^\times)(GSp(2, F), \rho \otimes \chi|.|^{3/2})$.

Soit donc $\mathscr{B}_c$ l'espace des fonctions $\Phi : \tilde{G} \to E^{\otimes 3}$, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, à support compact modulo $\tilde{P}_1$, et telles que

$$\begin{aligned}(7.1)\quad & \Phi((m(A, D)n(B), z)g) \\ & = |z|^{-1} \chi^2(z)\omega_\rho(z)\chi(\det AD)|\det(D)|^{-1}(\mathrm{id} \otimes \rho(A) \otimes \rho(D))\Phi(g)\end{aligned}$$

pour tous $g \in \tilde{G}$, $B \in M(2, F)$, $A, D \in GL(2, F)$, $z \in T$, tels que $z\det(A) = 1$. Alors l'application $\varphi \mapsto \Phi_\varphi$ définie par

$$\Phi_\varphi(g) = \nu \circ \varphi(g)$$

définit un isomorphisme de $\mathscr{A}_c[R_1, \pi_1]$ sur $\mathscr{B}_c$.

Rappelons qu'on a une application $\mu : \mathscr{S}(Y' \times F^\times) \to \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$. Soit $\mathscr{S}_1$ le noyau de μ. Il est stable par $R \times P$, ce qui permet de munir $\mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$ d'une action ω_Γ de $R \times P$. Pour $f \in \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$, on a les égalités

$$\omega_\Gamma(r(x, \sigma, y))\, f = |y|^{-3}\, |\det \sigma|^{-1/2}\, \omega_{\Gamma''}(\sigma)\, f,$$

$$\omega_\Gamma(m(A, D)\, n(B), z)\, f$$
$$= |z|^{-4}\, |\det A|^{-3/2}\, |\det D|^{-5/2}\, \omega_{\Gamma''}(m(A, D), z)\, f.$$

Alors $\mathscr{S}(V_0 \times F^\times)\,[R_1, \pi_1]$ s'identifie par ν à $E \otimes E \otimes E$. L'action ω_Γ de P sur $E \otimes E \otimes E$ est donnée par

$$\omega_\Gamma(m(A, D)\, n(B), z) = |z|^{-1}\, \chi^2(z)\, \omega_\rho(z)$$
$$\times \chi(\det AD)\, |\det D|^{-1}\, (\mathrm{id} \otimes \rho(A) \otimes \rho(D)).$$

La réciprocité de Frobenius définit une application

$$\zeta : \quad \mathscr{S}(Y' \times F^\times) \to E \otimes J(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi).$$

On a $\zeta(f)(g) = \nu \circ \mu(\omega_\Gamma(g)\, f)$, pour tous $f \in \mathscr{S}(Y' \times F^\times)$, $g \in GL(4, F)$.

LEMME 7.2. — *L'application ζ se factorise par $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)[R_1, \pi_1]$ et définit un isomorphisme de $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)[R_1, \pi_1]$ sur $E \otimes J_s(\rho \otimes J_s(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi)$.*

Démonstration. — La factorisation est claire. Calculons $\mathscr{S}(Y' \times F^\times)[R_1, \pi_1][N]$, et d'abord $\mathscr{S}_1[R_1, \pi_1][N]$. L'espace $\mathscr{S}_1$ est l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $(W'' - \{0\}) \times V_0 \times F^\times$. L'application

$$GSp(2, F) \to W'' - \{0\}$$
$$\sigma \mapsto \sigma^{-1}\varepsilon_2$$

est un isomorphisme analytique de $Q_1 \backslash GSp(2, F)$ sur $W'' - \{0\}$, où $Q_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix};\ b \in F,\ d \in F^\times \right\}$. Soit $\mathscr{S}'_1$ l'espace des fonctions $\varphi : GSp(2, F) \to \mathscr{S}(V_0 \times F^\times)$ telles que

(7.2) (i) φ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert,

(ii) φ est à support compact modulo Q_1,

(iii) on a l'égalité

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\sigma\right) = |d|^{-1/2}\omega_{\Gamma''}\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right)\varphi(\sigma),$$

pour tous $\sigma \in GSp(2, F)$, $b \in F$, $d \in F^{\times}$. Alors l'application $f \mapsto \varphi_f$ définie par

$$\varphi_f(\sigma)(m, t) = \omega_\Gamma(\sigma) f(\varepsilon_2, m, t)$$

est un isomorphisme de $\mathscr{S}_1$ sur $\mathscr{S}'_1$. L'action de $R_1 \times N$ qui s'en déduit sur $\mathscr{S}'_1$ est

$$\omega_\Gamma(r_1(\sigma))\varphi(\sigma') = \varphi(\sigma'\sigma),$$

$$\omega_\Gamma(n(B))\varphi(\sigma)(m, t) = \psi(-t\, Tr\, Bm^*)\varphi(\sigma)(m, t).$$

Passer aux coïnvariants $\mathscr{S}'_1[N]$ correspond donc à se restreindre à la variété $m=0$, i.e. soit $\mathscr{S}_2$ l'espace des fonctions $\varphi' : GSp(2, F) \to \mathscr{S}(F^{\times})$ vérifiant (7.2)(i), (ii), et

(iv) $\varphi'\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\sigma\right)(t) = |d|^{-5/2}\varphi'(\sigma)(dt)$ pour tous $\sigma \in GSp(2, F)$, $b \in F$, d, $t \in F^{\times}$. Alors $\mathscr{S}'_1[N]$ est isomorphe à $\mathscr{S}_2$. Mais la représentation de $GSp(2, F)$ dans $\mathscr{S}_2$ est induite à partir d'une représentation de Q_1 triviale sur le radical unipotent de Q_1. Elle ne peut pas posséder de quotient cuspidal. Donc $\mathscr{S}_2[R_1, \pi_1] = \{0\}$, et $\mathscr{S}_1[R_1, \pi_1][N] = \{0\}$.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{S}_1[R_1, \pi_1][N] & \to & \mathscr{S}(Y' \times F^{\times})[R_1, \pi_1][N] & \to & \mathscr{S}(V_0 \times F^{\times})[R_1, \pi_1][N] & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow^{id} & & \downarrow^{\nu} & & \\
0 & \to & \mathscr{S}(Y' \times F^{\times})[R_1, \pi_1][N] & \xrightarrow{\nu \circ \mu} & E \otimes E \otimes E & \to & 0
\end{array}$$

où la suite du haut est déduite de la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}(Y' \times F^{\times}) \to \mathscr{S}(V_0 \times F^{\times}) \to 0.$$

Le diagramme est commutatif. Les flèches verticales sont des isomorphismes. La suite du haut est exacte [lemme 3.1.(i)]. Donc $\nu \circ \mu$ est ici un isomorphisme C'est le morphisme déduit par fonctorialité de ζ. Donc $\mathrm{Ker}(\zeta)[N] = \{0\}$. Mais, d'après le théorème de Kudla et le lemme 7.1, tout sous-quotient irréductible (π', E') de la représentation de G dans $\mathcal{S}(Y' \times F^{\times})[R_1, \pi_1]$ apparait dans une induite de la forme $J(\rho \otimes \chi|.|^s, \rho \otimes \chi|.|^{s'})$. Alors pour un tel sous-quotient, $E'[N] \neq \{0\}$. Donc $\mathrm{Ker}(\zeta) = \{0\}$, et ζ est injectif.

Il n'y a que deux sous-$R \times \tilde{G}$-modules de $E \otimes J(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi)$, à savoir $E \otimes J$ et $E \otimes J_r$ avec une notation évidente. Si ζ était surjective, on aurait

$$\mathcal{S}(Y' \times F^{\times})[R_1, \pi_1][N] \simeq E \otimes J[N] \simeq E \otimes ((E \otimes E) \oplus (E \otimes E))$$

contrairement au calcul ci-dessus. Donc l'image de ζ ne peut être que $E \otimes J_r$. $\square$

Soit $e : J(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi) \to E \otimes E$ l'évaluation au point 1. Soit $\mathcal{B}$ l'espace des couples (Φ, Ξ), avec

$$\Phi : \tilde{G} \to E \otimes E \otimes E, \Xi \in E \otimes J_s(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi),$$

tels que

(7.3) (i) Φ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert,

(ii) Φ vérifie (7.1),

(iii) pour tout compact C de $\tilde{G}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in C$, tout $z \in T$ tel que $|z| < \varepsilon$, on a $\Phi(zg) = 0$,

(iv) pour tout compact C de G, il existe $N > 0$ tel que pour tout $g \in C$, tout $z \in T$ tel que $|z| > N$, on a

$$\Phi(zg) = |z|^{-1} \chi^2(z) \omega_\rho(z) [\mathrm{id} \otimes (e \circ j_s(g))] \Xi,$$

où $j_s = j_s(\rho \otimes \chi|\,.\,|^{-1}, \rho \otimes \chi)$.

Pour $(\varphi, \xi) \in \mathcal{A}$, on définit $b(\varphi, \xi) = (\Phi, \Xi)$ par

$$\Phi(g) = \nu \circ \varphi(g),$$
$$\Xi = \zeta(\xi).$$

Il est clair que $b(\varphi, \xi) \in \mathcal{B}$.

LEMME 7.3. — *L'application $b : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se factorise par $\mathcal{A}[R_1, \pi_1]$ et définit un isomorphisme de $\mathcal{A}[\mathcal{R}_1, \pi_1]$ sur $\mathcal{B}$.*

Démonstration. — Soient $g \in \tilde{G}$, $l \in (E \otimes E)^*$. L'application

$$\mathcal{B} \to E$$
$$(\Phi, \Xi) \mapsto (\mathrm{id} \otimes l) \quad \Phi(g)$$

composée avec b, définit un élément de $\mathrm{Hom}_{R_1}(\mathscr{A}, E)$, où R_1 *agit dans* E par π_1. Donc cette application s'annule sur $\mathscr{A}(R_1, \pi_1)$. Soit $(\varphi, \xi) \in \mathscr{A}(R_1, \pi_1)$, $(\Phi, \Xi) = b(\varphi, \xi)$. On a donc

$$(\mathrm{id} \otimes l) \circ \Phi(g) = 0$$

pour tous l, g. Donc $\Phi = 0$, puis $\Xi = 0$. D'où la factorisation par $\mathscr{A}[R_1, \pi_1]$.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A}_c[R_1, \pi_1] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \mapsto \Phi_\varphi"'] & \mathscr{A}[R_1, \pi_1] \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \mathscr{S}(Y' \times F^\times)[R_1, \pi_1] \arrow[r] \arrow[d, ";"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{B}_c \arrow[r, "\Phi \mapsto (\Phi, 0)"'] & \mathscr{B} \arrow[r, "(\Phi, \Xi) \mapsto \Xi"'] & E \otimes J_s(\varphi \otimes \chi |\cdot|^{-1}, \rho \otimes \chi) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il est commutatif. La suite du bas est évidemment exacte. Celle du haut l'est aussi [lemme 3.1. (i)]. On a montré que les deux flèches latérales étaient des isomorphismes. Donc celle du milieu l'est aussi. □

Transportons sur $\mathscr{B}$ l'action de $R \times \tilde{G}$ sur $\mathscr{A}[R_1, \pi_1]$. Pour $(\Phi, \Xi) \in \mathscr{B}$, on a les formules :

(7.4) (i) pour $g \in \tilde{G}$, $\omega_\Gamma(g)(\Phi, \Xi) = (\Phi', \Xi')$, où

$$\Phi'(g') = \Phi(g'g), \quad \text{pour tout } g' \in \tilde{G},$$
$$\Xi' = (\mathrm{id} \otimes j_s(g))\Xi,$$

où $j_s = j_s(\rho \otimes \chi |\cdot|^{-1}, \rho \otimes \chi; |\cdot|^{-1} \chi^2 \omega_\rho)$ (*cf.* § 5);

(ii) pour $\sigma \in GL(2, F)$, $\omega_\Gamma(r_1(\sigma))(\Phi, \Xi) = (\Phi', \Xi')$, où

$$\Phi'(g') = |\det \sigma| \rho \otimes \chi(\sigma) \circ \Phi(g'), \quad \text{pour tout } g' \in \tilde{G},$$
$$\Xi' = |\det \sigma| [(\rho \otimes \chi(\sigma)) \otimes \mathrm{id}](\Xi);$$

(iii) pour $x \in F^*$, $\omega_\Gamma(r_2(x))(\Phi, \Xi) = (\Phi', \Xi')$, où

$$\Phi'(g') = \omega_\rho(x) \chi^2(x) |x|^2 \Phi(x^{-1} g'), \quad \text{pour tout } g' \in \tilde{G},$$
$$\Xi' = |x|^3 \Xi.$$

Rappelons que $A = \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]$. Posons $B = \mathbb{C}[X, X^{-1}] = A/(Y-1)A$. Soit α un caractère de $\mathbb{C}^\times$, et $(\Phi, \Xi) \in \mathscr{B}$. On définit une fonction

$$\Phi_\alpha : \quad G \to B \otimes E \otimes E \otimes E$$

par les formules suivantes. On pose

$$\Phi'_\alpha(g)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{-n}(\chi^2\omega_\rho)(\omega^{-n})X^{-n}\int_{\mathcal{O}^\times}\Phi(\omega^n zg)(\chi^{-2}\omega_\rho^{-1}\alpha^{-1})(z)\,dz,$$

et

$$\Phi_\alpha(g)=\begin{cases}(1-X)\Phi'_\alpha(g), & \text{si } \alpha \text{ n'est pas ramifié,}\\ \Phi'_\alpha(g), & \text{si } \alpha \text{ est ramifié.}\end{cases}$$

La série $\Phi'_\alpha(g)$ prend ses valeurs dans $\mathbf{C}((X))\otimes E\otimes E\otimes E$, où $\mathbf{C}((X))$ est le corps des séries formelles, mais la condition (7.3) (iv) implique qu'en fait $\Phi_\alpha(g)\in B\otimes E\otimes E\otimes E$. Il est clair que Φ_α est nul pour presque tout α. Grâce à (7.1), on peut identifier Φ_α à un élément de $E\otimes J^B(\rho\otimes(\chi\alpha|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi)$, où α désigne ici le prolongement de α à $F^\times$ défini par $\alpha(\omega)=1$. La condition (7.3) (iv) signifie que l'image de Φ_1 dans $E\otimes J(\rho\otimes(\chi|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi)$ par l'application

$$J^B(\rho\otimes(\chi|\cdot|^{-1}), \rho\otimes\chi)$$

$$\xrightarrow{p_1} J^B(\varphi\otimes(\chi|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi)/(X-1)J^B(\rho\otimes(\chi|\cdot|^{-1}), \rho\otimes\chi)$$
$$\to J(\rho\otimes(\chi|\cdot|^{-1}), \varphi\otimes\chi)$$

appartient à $E\otimes J_s(\rho\otimes(\chi|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi)$. Soit donc $\mathscr{C}$ l'espace des familles (Φ_α), telles que

(7.5) (i) $\Phi_\alpha\in E\otimes J^B(\rho\otimes(\chi\alpha|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi)$,

(ii) $\Phi_\alpha=0$ pour presque tout α,

(iii) $(\mathrm{id}\otimes p_1)\Phi_1\in E\otimes J_s(\rho\otimes(\chi|\cdot|^{-1}), \rho\otimes\chi)$.

Alors l'application $(\Phi, \Xi)\mapsto(\Phi_\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{C}$. Transportons sur $\mathscr{C}$ l'action de $R\times\tilde{G}$ sur $\mathscr{B}$. Pour $(\Phi_\alpha)\in\mathscr{C}$, on a :

(7.6) (i) pour $g\in\tilde{G}$, $\omega_T(g)((\Phi_\alpha))=(\Phi'_\alpha)$, où

$$\Phi'_\alpha=[\mathrm{id}\otimes j^B(\rho\otimes(\chi\alpha|\,.\,|^{-1}), \rho\otimes\chi, |\,.\,|^{-1}\chi^2\omega_\rho\alpha)(g)](\Phi_\alpha);$$

(ii) pour $\sigma\in GL(2, F)$, $x\in F^\times$, $\omega_T(r(x\det(\sigma), \sigma, x^{-1}))((\Phi_\alpha))=(\Phi'_\alpha)$, où

$$\Phi'_\alpha=\alpha(x^{-1})|x|^3X^{-v(x)}|\det\sigma|((\rho\otimes\chi(\sigma))\otimes\mathrm{id})(\Phi_\alpha).$$

Notons encore (π, E) la représentation de Q définie par

$$\pi(ru)=\pi(r)$$

pour tous $r \in R$, $u \in U$. Nous pouvons maintenant démontrer le

LEMME 7.4. — *La représentation de $R \times \tilde{G}$ dans $\mathcal{L}_Z[Q, \pi]$ est isomorphe à $\pi \otimes j(\rho, \rho \otimes \chi; \chi\omega_\rho)$ si $\chi \neq |\,.\,|$, à $\pi \otimes j(\rho \otimes |\,.\,|, \rho; |\,.\,|\omega_\rho)$ si $\chi = |\,.\,|$.*

Démonstration. — D'après les lemmes 3.3,6, et 7.3, il reste à calculer $\mathscr{C}[R_2, \pi_2]$. Écrivons avec une notation évidente $\mathscr{C} = \oplus_\alpha \mathscr{C}_\alpha$. Par définition de π_2 et d'après les formules ci-dessus, il est clair que

$$\mathscr{C}_\alpha[R_2, \pi_2] = \{0\}, \qquad \text{si} \quad \alpha \neq \chi^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{O}^\times,$$
$$\mathscr{C}_\alpha[R_2, \pi_2] = \mathscr{C}_\alpha/(X - |\omega|\chi(\omega^{-1}))\mathscr{C}_\alpha, \qquad \text{si} \quad \alpha = \chi^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{O}^\times.$$

Si χ est ramifié ou si $\chi(\omega^{-1})|\omega| \neq 1$, il est clair que

$$\mathscr{C}_\alpha/(X - |\omega|\chi(\omega^{-1}))\mathscr{C}_\alpha \simeq E \otimes J(\rho, \rho \otimes \chi).$$

Si $\chi = |\,.\,|$, on doit calculer $\mathscr{C}_1/(X-1)\mathscr{C}_1$. Soit $\mathscr{C}'_1$ l'espace des $\Phi \in J^B(\rho, \rho \otimes |\,.\,|)$ tels que $p_1(\Phi) \in J_s(\rho, \rho \otimes |\,.\,|)$. On a

$$\mathscr{C}_1/(X-1)\mathscr{C}_1 = E \otimes (\mathscr{C}'_1/(X-1)\mathscr{C}'_1).$$

Soit η l'automorphisme de A qui échange X et Y. On a un opérateur d'entrelacement η-linéaire

$$\mathscr{I}: \quad J^A(\rho, \rho \otimes |\,.\,|) \to J^A(\rho \otimes |\,.\,|, \rho),$$

défini ainsi : pour $\Phi \in J^A(\rho, \rho \otimes |\,.\,|)$ et $g \in G$,

$$\mathscr{I}\Phi(g) = (q^2 Y^2 - X^2)\,\eta\left[\int_N \Phi(wng)\,dn\right],$$

où

$$w = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Soit $B' = \mathbb{C}[Y, Y^{-1}] = A/(X-1)A$. L'opérateur d'entrelacement passe aux quotients et définit

$$\mathscr{I}': \quad J^B(\rho, \rho \otimes |\,.\,|) \to J^{B'}(\rho \otimes |\,.\,|, \rho)$$

On définit de façon analogue

$$\mathscr{I}'' : \quad J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho) \to J^B(\rho, \rho \otimes |.|).$$

On sait que $\mathscr{I}'' \circ \mathscr{I}'$ est la multiplication par un élément P de B s'annulant à l'ordre 1 en $X=1$ ([Sha 2] 1.2 et théorème 2.1.c). Spécialisés en $X=1$, resp. $Y=1$, les opérateurs $\mathscr{I}'$ et $\mathscr{I}''$ deviennent les opérateurs habituels

$$\mathscr{I}'_1 : J(\rho, \rho \otimes |.|) \to J(\rho \otimes |.|, \rho),$$
$$\mathscr{I}''_1 : \quad J(\rho \otimes |.|, \rho) \to J(\rho, \rho \otimes |.|).$$

Le noyau de $\mathscr{I}'_1$ et l'image de $\mathscr{I}''_1$ sont égaux à $J_s(\rho, \rho \otimes |.|)$. Donc si $\Phi_1 \in \mathscr{C}'_1$, $\mathscr{I}' \Phi_1 \in (Y-1) J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho)$. Soit

$$p'_1 : \quad J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho) \to J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho)/(Y-1) J_{B'}(\rho \otimes |.|, \rho) \simeq J(\rho \otimes |.|, \rho).$$

On définit $c : \mathscr{C}'_1 \to J(\rho \otimes |.|, \rho)$ par $c(\Phi_1) = p'_1 \circ (Y-1)^{-1} \circ \mathscr{I}'(\Phi_1)$. Certainement $(X-1)\mathscr{C}'_1 \subset \mathrm{Ker}(c)$, et c définit une application

$$c' : \mathscr{C}'_1/(X-1)\mathscr{C}'_1 \to J(\rho \otimes |.|, \rho).$$

Soit $\varphi \in J(\rho \otimes |.|, \rho)$, et $\Phi \in J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho)$ tel que $p'_1(\Phi) = \varphi$. On a

$$p_1 \circ \mathscr{I}''(\Phi) = \mathscr{I}''_1(\Phi) \in J_s(\rho, \rho \otimes |.|).$$

Donc $\mathscr{I}'' \varphi \in \mathscr{C}'_1$. Si $\Phi' \in J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho)$ est tel que $p'_1(\Phi') = \varphi$, on a

$$\Phi' - \Phi \in (Y-1) J^{B'}(\rho \otimes |.|, \rho)$$

et

$$\mathscr{I}''(\Phi' - \Phi) \in (X-1)\mathscr{C}'_1.$$

Donc l'image de $\mathscr{I}'' \Phi$ dans $\mathscr{C}'_1/(X-1)\mathscr{C}'_1$ ne dépend pas du choix de Φ. On note $c''(\varphi)$ cette image ce qui définit

$$c'' : \quad J(\rho \otimes |.|, \rho) \to \mathscr{C}'_1/(X-1)\mathscr{C}'_1.$$

Il est facile de vérifier que $c'' \circ c'$ comme $c' \circ c''$ sont les multiplications par $P'(1)$, où $P' = (X-1)^{-1} P$. Or $P'(1) \neq 0$. Donc c' est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration $\square$

8. Calcul de coïnvariants par P

On va effectuer des calculs analogues en échangeant les rôles de S et G'. Les démonstrations étant similaires, on les laisse au lecteur.

On choisit maintenant comme sous-espace isotropes maximaux de Z :

$$X = W \otimes Fe_{12} + L' \otimes V_0, \quad Y = W \otimes Fe_{34} + L \otimes V_0,$$

où L', resp. L, sont les sous-espaces de W engendrés par ε_1, ε_2, resp. ε_3, ε_4. On note (w, m) l'élément $w \otimes e_{34} + \mathrm{m}$ de Y, pour $\mathrm{m} \in L \otimes V_0$. On identifie $\mathscr{L}_Z$ et $\mathscr{S}(Y \times F^\times)$. Pour $f \in \mathscr{S}(Y \times F^\times)$, $(w, \mathrm{m}) \in Y$, $t \in F^\times$, on a les formules explicites suivantes :

(8.1) (i) supposons f de la forme $f(w, \mathrm{m}, t) = f_1(w) f_2(\mathrm{m}, t)$, alors pour tout $s \in S$,

$$\omega_\Gamma(s) f(w, \mathrm{m}, t) = |\lambda(s)|^{-1} f_1(s^{-1} w)\, \omega_{\Gamma'}(s) f_2(\mathrm{m}, t),$$

où $\lambda = \lambda_\Gamma$, $Z' = W \otimes V_0$, et $\Gamma' = GSp(Z')$;

(ii) en particulier si $s = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, avec a, $d \in GL(2, \mathrm{F})$ (et $s \in S$),

$$\omega_\Gamma(s) f(w, \mathrm{m}, t) = |\lambda(s)|^{-1} |\det d|^{-2} f(s^{-1} w, d^{-1}\mathrm{m}, t\lambda(s));$$

(iii) de même si $s = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $b \in M(2, F)$ de la forme $b = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$,

$$\omega_\Gamma(s) f(w, \mathrm{m}, t) = \psi(t(2\alpha q(m_3, m_4) + \beta q(m_4, m_4) + \gamma q(m_3, m_3))/2) f(s^{-1} w, \mathrm{m}, t),$$

où $\mathrm{m} = \varepsilon_3 \otimes m_3 + \varepsilon_4 \otimes m_4$;

(iv) pour tous A, $D \in GL(2, F)$, $z \in T$,

$$\omega_\Gamma(m(A, D), z) f(w, \mathrm{m}, t) = |\det A|^{-2} |\det D|^{-4} |z|^{-6} f(z^{-1} \det(D)^{-1} w, z^{-1} A^{-1} \mathrm{m} D^{*-1}, tz^2 \det(AD))$$

avec une notation évidente;

(v) pour tout $B \in M(2, F)$,

$$\omega_\Gamma(n(B)) f(w, \mathrm{m}, t) = \psi(t\langle 1', 1\rangle \det(B) + t\langle 1' \otimes B, \mathrm{m}\rangle) f(w, \mathrm{m} - 1 \otimes B, t),$$

où $w=(l'+l)\otimes e_{34}$, avec $l'\in L'$, $l\in L$.

Soit $Y'=L\otimes V_0$, $\lambda : \mathscr{S}(Y\times F^\times)\to\mathscr{S}(Y'\times F^\times)$ l'application définie par $\lambda(f)(m, t)=f(0, m, t)$, $\mu : \mathscr{S}(Y'\times F^\times)\to\mathscr{S}(V_0\times F^\times)$ l'application définie par $\mu(f)(m, t)=f(\varepsilon_3\otimes m, t)$. On note $Z''=W''\otimes V_0$, $\Gamma''=GSp(Z'')$, où W'' est le sous-espace de W engendré par ε_2 et ε_3. Soit $\mathscr{A}$ l'espace des couples (φ, ξ), où $\xi\in\mathscr{S}(Y'\times F^\times)$, $\varphi : S\to\mathscr{S}(V_0\times F^\times)$, tels que

(8.2) (i) φ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert,

(ii) on a l'égalité

$$\varphi(r(1, \sigma, \det\sigma)us)=|\det\sigma|^{-3}\omega_{\Gamma''}(\sigma)\varphi(s),$$

(iii) pour tout compact C de S, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $s\in C$, tout $x\in F^\times$ tel que $|x|<\varepsilon$, on a $\varphi(r_2(x)s)=0$,

(iv) pour tout compact C de S, il existe $N>0$ tel que pour tout $s\in S$, tout $x\in F^\times$ tel que $|x|>N$, on a

$$\varphi(r_2(x)s)=\mu\circ\omega_{\Gamma'}(r_2(x)s).$$

Pour $f\in\mathscr{S}(Y\times F^\times)$, on définit (φ_f, ξ_f) par

$$\xi_f=\lambda(f),$$
$$\varphi_f(s)(m, t)=\omega_\Gamma(s)f(\varepsilon_1, \varepsilon_3\otimes m, t).$$

LEMME 8.1. — *L'application $f\mapsto(\varphi_f, \xi_f)$ se factorise par $\mathscr{S}(Y\times F^\times)[N]$ et définit un isomorphisme de $\mathscr{S}(Y\times F^\times)[N]$ sur $\mathscr{A}$.* □

L'action qui s'en déduit de $S\times\tilde{P}$ sur $\mathscr{A}$ est donnée par les formules suivantes, pour $(\varphi, \xi)\in\mathscr{A}$:

(8.3) (i) pour $s\in S$, $\omega_\Gamma(s)(\varphi, \xi)=(\varphi', \xi')$, où

$$\varphi'(s')=\varphi(s's), \quad \text{pour tout } s'\in S,$$
$$\xi'=|\lambda(s)|^{-1}\omega_{\Gamma'}(s)\xi;$$

(ii) pour $A, D\in GL(2, F)$, $z\in T$, $\omega_\Gamma(m(A, D), z)(\varphi, \xi)=(\varphi', \xi')$, où

$$\varphi'(s')=|\det A|^{-1}|\det D|^{-5}|z|^{-6}$$
$$\times\omega_{\Gamma''}(m(A, D), z)\varphi'(r_2(z\det(D))s'),$$
$$\xi'=|\det D|^{-2}|z|^{-2}\omega_{\Gamma'}(m(A, D), z)\xi.$$

Soient (ρ, E) une représentation cuspidale irréductible de $GL(2, F)$, χ un caractère de $F^\times$, $(\pi, E\otimes E)$ la représentation de $\tilde{M}$ définie par

$$\pi(m(A, D), z) = \chi\omega_\rho(z)\chi(\det D)\,|\det AD^{-1}|\,\rho(A)\otimes\rho(D).$$

Soient $\tilde{M}_1 = \{(m(A, D), \det D^{-1});\ A, D\in GL(2, F)\}$, et $\pi_1 = \pi|_{\tilde{M}_1}$. Pour $A, D\in GL(2, F)$, on pose $\tilde{m}_1(A, D) = (m(A, D), \det D^{-1})$. Comme au lemme 7.1, le $GSp(2, F)\times GL(2, F)\times GL(2, F)$-module

$$\mathscr{S}(V_0\times F^\times)[GL(2, F)\times GL(2, F),\ \rho\otimes|\cdot|^2,\ \rho\otimes|\cdot|^2]$$

est isomorphe à $((\rho\otimes|\cdot|^2)^{\otimes 3}, E^{\otimes 3})$. On fixe une application $\nu : \mathscr{S}(V_0\times F^\times)\to E\otimes E\otimes E$ qui réalise cet isomorphisme par passage au quotient. On peut alors définir une application

$$\zeta :\quad \mathscr{S}(Y'\times F^\times)\to I(1, \rho)\otimes E\otimes E$$

par $\zeta(f)(s) = \nu\circ\mu(\omega_T(s)f)$. Le même raisonnement que celui de la démonstration du lemme 7.2 montre que ζ se factorise par $\mathscr{S}(Y'\times F^\times)[\tilde{M}_1, \pi_1]$, définit une injection non nulle de cet espace dans $I(1, \rho)\otimes E\otimes E$, et n'est pas surjective. D'où

LEMME 8.2. — (1) *La représentation $I(1, \rho)$ est réductible.*

(2) *Il existe un unique sous-module $I_1(1, \rho)$ de $I(1, \rho)$ tel que ζ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(Y'\times F^\times)[\tilde{M}_1, \pi_1]$ sur $I_1(1, \rho)\otimes E\otimes E$.* □

Il semble accessible de démontrer que $I_1(1, \rho)$ est le sous-module de $I(1, \rho)$ admettant un modèle de Whittaker.

Pour $(\varphi, \xi)\in\mathscr{A}$, on définit $b(\varphi, \xi) = (\Phi, \Xi)$ par

$$\Phi(s) = \nu\circ\varphi(s),$$
$$\Xi = \zeta(\xi),$$

puis, pour un caractère α de $\mathcal{O}^\times$, on définit

$$\Phi_\alpha :\quad S\to B\otimes E\otimes E\otimes E$$

par les formules suivantes. On pose

$$\Phi'_\alpha(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{2n}X^{-n}\int_{\mathcal{O}^\times}\Phi(r_2(x\omega^n)s)\,\alpha^{-1}(x)\,dx,$$

et

$$\Phi_\alpha(s) = \begin{cases} (1-X)\,\Phi'_\alpha(s), & \text{si } \alpha \text{ n'est pas ramifié,} \\ \Phi'_\alpha(s), & \text{si } \alpha \text{ est ramifié.} \end{cases}$$

Alors $\Phi_\alpha \in I^B(\alpha, \rho) \otimes E \otimes E$, et, en notant

$$p_1 : \quad I^B(1, \rho) \to I(1, \rho)$$

la spécialisation en $X=1$, on a $(p_1 \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\,\Phi_1 \in I_1(1, \rho) \otimes E \otimes E$. Soit $\mathscr{C}$ l'espace des familles (Φ_α), telles que

(8.4) (i) $\Phi_\alpha \in I^B(\alpha, \rho) \otimes E \otimes E$,

(ii) $\Phi_\alpha = 0$ pour presque tout α,

(iii) $(p_1 \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\,\Phi_1 \in I_1(1, \rho) \otimes E \otimes E$.

LEMME 8.3. — *L'application* $(\varphi, \xi) \mapsto (\Phi_\alpha)$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{A}[\tilde{M}_1, \pi_1]$ *sur* $\mathscr{C}$. □

Transportons sur $\mathscr{C}$ l'action de $S \times \tilde{M}$ sur $\mathscr{A}[\tilde{M}_1, \pi_1]$. Alors S agit par son action $i^B(\alpha, \rho)$ sur chaque composante $\mathscr{C}_\alpha$, $\tilde{M}_1$ agit via son action π_1 sur $E \otimes E$. Pour $z \in T$ et $(\Phi_\alpha) \in \mathscr{C}$, on a $\omega_T((\Phi_\alpha)) = (\Phi'_\alpha)$, où

$$\Phi'_\alpha = \omega_\rho\, \alpha(z)\, X^{v(z)}\, \Phi_\alpha.$$

Notons encore $(\pi, E \otimes E)$ la représentation de $\tilde{P}$ définie par $\pi(mn) = \pi(m)$ pour tous $m \in \tilde{M}$, $n \in N$.

LEMME 8.4. — (1) *Si* $\chi \neq 1$, *la représentation de* $S \times \tilde{P}$ *dans* $\mathscr{L}_Z[\tilde{P}, \pi]$ *est isomorphe à* $i(\chi, \rho) \otimes \pi$.

(2) *Si* $\chi = 1$, *il existe une représentation* $i'(1, \rho)$ *de* S, *de longueur* 2, *telle que* $i_1(1, \rho)$, *resp.* $i_2(1, \rho)$, *soit quotient, resp. sous-représentation, de* $i'(1, \rho)$, *et telle que la représentation de* $S \times \tilde{P}$ *dans* $\mathscr{L}_Z[\tilde{P}, \pi]$ *soit isomorphe à* $i'(1, \rho) \otimes \pi$.

Cf. § 5 pour la définition de $i_1(1, \rho)$ et $i_2(1, \rho)$. La représentation $i_1(1, \rho)$ est celle qui apparaît au lemme 8.2.

Démonstration. — D'après les lemmes 3.3, 8.1, 8.3, il reste à calculer $\mathscr{C}[T, \chi\omega_\rho]$. En écrivant $\mathscr{C} = \oplus_\alpha \mathscr{C}_\alpha$, on a

$$\mathscr{C}_\alpha[T, \chi\omega_\rho] = \{0\}, \text{ si } \alpha \neq \chi \text{ sur } \mathcal{O}^*,$$

$$\mathscr{C}_\alpha[T, \chi\omega_\rho] = \mathscr{C}_\alpha/(X - \chi(\omega))\,\mathscr{C}_\alpha, \text{ si } \alpha = \chi \text{ sur } \mathcal{O}^*.$$

Si $\chi \neq 1$, il est clair que

$$\mathscr{C}_\alpha/(X-\chi(\omega))\mathscr{C}_\alpha \simeq I(\chi, \rho) \otimes E \otimes E.$$

Pour $\chi = 1$, on doit calculer $\mathscr{C}_1/(X-1)\mathscr{C}_1 = (\mathscr{C}'_1/(X-1)\mathscr{C}'_1) \otimes E \otimes E$, si $\mathscr{C}'_1$ est l'espace des $\Phi_1 \in I^B(1, \rho)$ tels que $p_1(\Phi_1) \in I_1(1, \rho)$. Or on a la filtration

$$(X-1)\mathscr{C}'_1 \subset (X-1) I^B(1, \rho) \subset \mathscr{C}'_1,$$

dont les quotients successifs sont

$$\mathscr{C}'_1/(X-1)\, I^B(1, \rho) \simeq I_1(1, \rho),$$
$$(X-1) I^B(1, \rho)/(X-1)\mathscr{C}'_1 \simeq I^B(1, \rho)/\mathscr{C}'_1 \simeq I(1, \rho)/I_1(1, \rho) \simeq I_2(1, \rho). \quad \square$$

9. Démonstration des propositions 5.1 et 5.2

Soient ρ, χ comme dans la proposition 5.1. Notons ici $\pi^S(\chi, \rho)$, resp. $\pi^G(\chi, \rho)$, la représentation π de Q, resp. P, définie au paragraphe 7, resp. paragraphe 8. Remarquons que la représentation induite $j(\rho, \rho \otimes \chi)$ est réductible si et seulement si $\rho \simeq \rho \otimes \chi |.|^{\pm 1}$, i.e. s'il existe un caractère χ', nécessairement quadratique, tel que $\rho \otimes \chi' \simeq \rho$, et $\chi = \chi' |.|^{\pm 1}$. Supposons que cette condition n'est pas vérifiée. Alors $j(\rho, \rho \otimes \chi; \chi\omega_\rho)$ est irréductible et isomorphe à $j(\rho \otimes \chi, \rho; \chi\omega_\rho)$. Par réciprocité de Frobenius, on voit facilement que

$$\mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)] \simeq \mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)]$$

en tant que S-modules. Si $\chi \neq 1$, on déduit alors du lemme 8.4 que $i(\chi, \rho) \simeq i(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)$. D'après les remarques précédant la proposition 5.1, si de plus $\chi \neq \chi^{-1}$, ou $\rho \not\simeq \rho \otimes \chi$, cela implique que $i(\chi, \rho)$ est irréductible. Supposons $\chi = \chi^{-1}$ et $\rho \simeq \rho \otimes \chi$, et supposons que $i(\chi, \rho)$, si $\chi \neq 1$, resp. $i'(1, \rho)$, si $\chi = 1$, est décomposable. Alors

$$i(\chi, \rho)[Q, \pi^S(\chi, \rho)] \simeq \pi^S(\chi, \rho) \oplus \pi^S(\chi, \rho),$$

resp.

$$i'(1, \rho)[Q, \pi^S(1, \rho)] \simeq \pi^S(1, \rho) \oplus \pi^S(1, \rho).$$

Le lemme 8.4 implique que

$$\mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)][Q, \pi^S(\chi, \rho)] \simeq 2(\pi^S(\chi, \rho) \otimes \pi^G(\chi, \rho)).$$

Or

$$\mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)][Q, \pi^S(\chi, \rho)]$$
$$\simeq \mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi, \rho)][\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)]$$
$$\simeq \pi^S(\chi, \rho) \otimes j(\rho, \rho \otimes \chi; \chi\omega_\rho)[\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)]$$

d'après le lemme 7.4. Mais comme $j(\rho, \rho \otimes \chi)$ est irréductible,

$$j(\rho, \rho \otimes \chi; \chi\omega_\rho)[\bar{P}, \pi^G(\chi, \rho)] \simeq \pi^G(\chi, \rho)),$$

et non pas $2\pi^G(\chi, \rho)$. Contradiction. Donc $i(\chi, \rho)$ est irréductible, si $\chi = \chi^{-1}$, $\rho \simeq \rho \otimes \chi$ et $\chi \neq 1$, et

LEMME 9. — *La représentation $i'(1, \rho)$ du lemme 8.4 est indécomposable.* □

Si $\chi = 1$, on a déjà vu que $i(1, \rho)$ est réductible.

Supposons maintenant qu'il existe un caractère quadratique χ' tel que $\rho \otimes \chi' \simeq \rho$, et $\chi = \chi' |.|^{\pm 1}$. Supposons $i(\chi, \rho)$ irréductible. Alors $i(\chi, \rho) \simeq i(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)$, d'où $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi, \rho)] \simeq \mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)]$. Si de plus $\chi' \neq 1$, le lemme 7.4 implique que $j(\rho, \rho \otimes \chi) \simeq j(\rho \otimes \chi, \rho)$. Cela n'est pas vrai : on est dans le cas où $j(\rho, \rho \otimes \chi)$ est réductible. Donc $i(\chi, \rho)$ est réductible dans ce cas. Supposons maintenant $\chi' = 1$, par exemple $\chi = |.|$, et supposons $i(|.|, \rho)$ réductible. On a

$$\mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \simeq i(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \otimes \pi^G(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|),$$

qui admet pour quotient $i_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \otimes \pi^G(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|)$. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit un morphisme non nul

$$\mathscr{L}_Z \xrightarrow{\alpha} I_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \otimes J(\rho \otimes |.|, \rho).$$

Comme I_q est irréductible, ce dernier espace n'a que deux sous-modules, $I_q \otimes J_s$ et $I_q \otimes J$. Si α était surjectif, par exactitude à droite des foncteurs de coïnvariants, on aurait une surjection

$$\mathscr{L}_Z[\bar{P}, \pi^G(|.|, \rho)] \to I_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \otimes J(\rho \otimes |.|, \rho)[\bar{P}, \pi^G(|.|, \rho)].$$

La représentation de $S \times \bar{P}$ sur ce dernier espace est

$$i_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|) \otimes \pi^G(|.|, \rho).$$

D'après le lemme 8.4, on aurait une surjection

$$i(|.|, \rho) \to i_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|).$$

Cela n'est pas vrai : $i_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|)$ intervient comme sous-module dans $i(|.|, \rho)$, mais pas comme quotient. Donc α n'est pas surjectif. Il a pour image $I_q \otimes J_s$. On a alors une surjection

$$\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(|.|, \rho)] \to I_q(|.|^{-1}, \rho \otimes |.|)[Q, \pi^S(|.|, \rho)] \otimes J_s(\rho \otimes |.|, \rho).$$

La représentation de $Q \times \tilde{Q}$ sur ce dernier espace est

$$\pi^S(|.|, \rho) \otimes j_s(\rho \otimes |.|, \rho; |.|\omega_\rho).$$

D'après le lemme 7.4, on aurait une surjection

$$j(\rho \otimes |.|, \rho; |.|\omega_\rho) \to j_s(\rho \otimes |.|, \rho; |.|\omega_\rho).$$

Cela n'est pas vrai. Donc $i(\chi, \rho)$ est irréductible. Cela achève la démonstration de la proposition 5.1. □

Quand $i(\chi, \rho)$ est irréductible, elle intervient comme quotient de $\omega_{T|S}$ si et seulement si $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi, \rho)] \neq \{0\}$. Et si cette condition est vérifiée, $\theta'(i(\chi, \rho))$ est la représentation de $\tilde{G}$ telle que $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi, \rho)]$ soit isomorphe à $\pi^S(\chi, \rho) \otimes \theta'(i(\chi, \rho))$. Le lemme 7.4 implique alors les assertions de la proposition 5.2 dans ce cas. Si $\chi = 1$, le lemme 8.4 (2) implique que $i_1(1, \rho)$ est quotient de $\omega_{T|S}$. Si $i_2(1, \rho)$ l'était aussi, $\theta'(i_1(1, \rho)) \oplus \theta'(i_2(1, \rho))$ serait quotient de $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(1, \rho)]$. Or cet espace est irréductible. Donc $i_2(1, \rho)$ n'intervient pas comme quotient de $\omega_{T|S}$. Alors de même $\theta'(i_1(1, \rho))$ est la représentation de G telle que $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(1, \rho)]$ soit isomorphe à $\pi^S(1, \rho) \otimes \theta'(i_1(1, \rho))$ et le lemme 7.4 permet de conclure. Enfin s'il existe un caractère quadratique $\chi' \neq 1$ tel que $\rho \otimes \chi' \simeq \rho$ et $\chi = \chi'|.|^{\pm 1}$, le lemme 8.4 (1) montre que $i_q(\chi, \rho)$ intervient comme quotient de $\omega_{T|S}$. Comme

$$i_q(\chi, \rho)[Q, \pi^S(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)] = \pi^S(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi),$$

$\theta'(i_q(\chi, \rho))$ est en tout cas un quotient de $\mathscr{L}_Z[Q, \pi^S(\chi^{-1}, \rho \otimes \chi)]$ Le lemme 7.4 permet de conclure. □

BIBLIOGRAPHIE

[B] BERNSTEIN (J.). – *Le centre de Bernstein*, in BERNSTEIN (J.), DELIGNE (P.), KAZHDAN (D.) et VIGNERAS (M.F.), *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Travaux en cours, 1984.

[BZ] BERNSTEIN (J.) and ZELEVINSKI (A. V.). – Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non archimedean local field, *Russian Math. Surveys*, vol. 31, 1976, p. 1-68.

[K] KUDLA (S.), *On the local thêta-correspondence*, preprint.

[R] RALLIS (S.). – On the Howe duality conjecture, *Comp. Math.*, vol. 51, 1984, p. 333-399.

[Sha 1] SHAHIDI (F.). – On certain L-functions, *Amer. J. of Math.*, vol. 103, 1981, p. 297-355.

[Sha 2] SHAHIDI (F.). – Local coefficients and normalization of intertwining operators for $GL(n)$, *Comp. Math.*, vol. 48, 1983, p. 271-295.

[Shim] SHIMIZU (H.). – Thêta series and automorphic forms on $GL(2)$, *Journal Math. Soc. of Japan*, vol. 24, 1972, p. 638-683.

[V] VIGNERAS (M.-F.). – *Correspondances entre représentations automorphes de $GL(2)$ sur une extension quadratique et de $GSp(4)$ sur* $\mathbf{Q}$, *conjecture locale de Langlands pour $GSp(4)$*, preprint 1985.

[Z] ZELEVINSKI (A. V.). – Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, vol. 13, 1980, p. 165-210.