BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LOESER

À propos de la forme hermitienne canonique d'une singularité isolée d'hypersurface

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 385-392
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__385_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 385-392.

A PROPOS DE LA FORME HERMITIENNE CANONIQUE D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE D'HYPERSURFACE

PAR

FRANÇOIS LOESER (*)

RÉSUMÉ. — On détermine la « partie cachée » de la forme hermitienne canonique de Barlet en utilisant une compactification de la fibre de Milnor.

ABSTRACT. — We give an explicit description of the "hidden part" of Barlet's canonical hermitian form using a compactification of the Milnor fiber.

Introduction

Dans [2] D. Barlet a introduit sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une singularité isolée d'hypersurface une forme hermitienne canonique h qui permet de faire le lien entre l'intégration dans les fibres et le système de Gauss-Manin. Il montre en particulier que h est non dégénérée et que en dehors de la valeur propre 1 elle coincide avec la forme d'intersection.

Dans le présent travail nous nous proposons d'éclairer un peu « la partie cachée » correspondant à la valeur propre 1. Pour cela on utilise une compactification de la fibre de Milnor et on relie h à la forme d'intersection sur cette compactification. On en déduit comme corollaire des propriétés de réalité de h qui ne semblaient pas évidentes directement (ce corollaire m'a été indiqué par D. Barlet), une « nouvelle » démonstration de la non

(*) Texte reçu le 22 octobre 1985.

François LOESER, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, U.A. au C.N.R.S. n° 169, 91128 Palaiseau Cedex.

dégénérescence de h et des propriétés de polarisation utilisées de façon cruciale dans [3].

Les démonstrations sont proches de celles de l'article [3], mais les présents résultats n'étant que sous-entendus dans ce travail, il nous a semblé utile de les énoncer ici clairement et d'en offrir des démonstrations complètes.

Je remercie D. Barlet pour ses suggestions ainsi que pour ses encouragements à rédiger le présent travail.

Soit $f:(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C},0)$ un germe de fonction à singularité isolée. Soit $\tilde{f}$ un représentant de f, $X=\tilde{f}^{-1}(\Delta_\eta)\cap B_{\varepsilon/2}$, avec ε et η choisis tels que $0<\eta\ll\varepsilon\ll 1$ et $B_\varepsilon=\{Z\in\mathbb{C}^{n+1}/\|Z\|\leqslant\varepsilon\}$, $\Delta_\eta=\{Z\in\mathbb{C}\mid\|Z\|\leqslant\eta\}$. On note $\Delta=\Delta_\eta$ quand il n'y a pas d'ambiguité, on note $f:X\to\Delta$ la restriction de $\tilde{f}$ à X, et $X(t)=X\cap f^{-1}(t)$.

Sur $\Delta^*=\Delta\setminus\{0\}$ on dispose du fibré de Milnor $\underline{H}$ dont la fibre en t est $H^n(X(t),\mathbb{C})$.

Soit $\pi:U\to\Delta^*$ le revêtement universel de Δ^*, on note $H=\Gamma(U,\pi^*\underline{H})$, et H^* le dual de H.

Si $\mathcal{N}$ ilss désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe de Nilsson sur U, et $E\subset\mathcal{N}\mathrm{ilss}\otimes_{\mathbb{C}}H$ le sous-espace des invariants par la monodromie, on a un morphisme canonique :

$$s:\quad\Gamma(B_\varepsilon,\Omega^{n+1})\to E,$$

défini ainsi : pour $\gamma\in H^*$ on a

$$s(\omega)[\gamma]=\int_\gamma\frac{\omega}{df}$$

(Ω^{n+1} est le faisceau des $n+1$ formes holomorphes sur $\mathbb{C}^{n+1}$). Si $(2\pi/i)N$ désigne le logarithme de la partie unipotente de la monodromie, on peut écrire (*cf.* [7], [3]) :

$$s(\omega)=\textstyle\sum_{\alpha\in F+\mathbb{N}}t^\alpha t^N u_\alpha^\omega\qquad\text{avec}\quad u_\alpha^\omega\in H$$

où F est un ensemble fini de rationnels, et on note $\alpha(\omega)=\inf\{\alpha\mid u_\alpha^\omega\neq 0\}$. Soit $\mathcal{N}$ le $\mathbb{C}[[t,\bar{t}]]$ module

$$\oplus_{r\in\mathbb{Q},\,j\in[0,n]}\mathbb{C}[[t,\bar{t}]]\,|t|^r(\log t\bar{t})^j/\mathbb{C}[[t,\bar{t}]]$$

Dans [1] D. Barlet a montré que l'on a un morphisme canonique:

$$\mathscr{H}: \Gamma(B_\varepsilon, \Omega^{n+1}) \times \Gamma(B_\varepsilon, \Omega^{n+1}) \to \mathscr{N}$$

qui à deux $(n+1)$ formes ω et ω' associe le développement asymptotique de

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \overline{\frac{\omega'}{df}} \quad \text{dans } \mathscr{N}.$$

Dans [2] D. Barlet montre qu'il existe une forme hermitienne h sur H appelée forme hermitienne canonique telle que:

$$\mathscr{H}(\omega, \omega') = \sum_{\alpha \notin \mathbb{N},\, \alpha \notin \mathbb{N},\, k \in [0, N]} t^\alpha \bar{t}^{\alpha'} \frac{(\log t\bar{t})^k}{k!} h(N^k u_\alpha^\omega, u_{\alpha'}^{\omega'})$$
$$+ \sum_{\alpha \in \mathbb{N},\, \alpha' \in \mathbb{N},\, k \in [0, N]} t^\alpha \bar{t}^{\alpha'} \frac{(\log t\bar{t})^{k+1}}{(k+1)!} h(N^k u_\alpha^\omega, u_{\alpha'}^{\omega'}).$$

si $s(\omega) = \Sigma\, t^\alpha t^N u_\alpha^\omega$ et $s(\omega') = \Sigma\, t^{\alpha'} t^N u_{\alpha'}^{\omega'}$.

Pour λ une valeur propre de la monodromie on note H_λ le sous-espace propre généralisé qui lui est associé, et $H_{\neq 1} = \oplus_{\lambda \neq 1} H_\lambda$.

Dans [2], D. Barlet montre le résultat suivant:

THÉORÈME 1. — (1) *h est non dégénérée;*

(2) *si Q désigne la forme d'intersection sur $H_{\neq 1}$, on a*

$$\forall (x, y) \in H_{\neq 1} \times H_{\neq 1}: \quad h(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} Q(x, \bar{y}).$$

Il pose également la question de comprendre la restriction de h à H_1. Nous allons essayer de répondre à cette question en utilisant une compactification projective.

D'après [4] on peut par un changement analytique de coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+1}$ au voisinage de zéro supposer que f est un polynôme tel que:

(a) $Y(0) = \overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ a zéro pour unique point singulier.

(b) $Y(t) = \overline{f^{-1}(t)} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est lisse pour $t \neq 0$, $|t|$ petit.

(c) le degré de f est arbitrairement grand.

D'autre part, il est montré dans (*loc.cit.*, p. 296) que si le degré de f est suffisamment grand, la flèche de restriction $r_t: H^n(Y(t), \mathbb{C}) \to H^n(X(t), \mathbb{C})$ est surjective pour $t \neq 0$.

Notons $\underline{H'}$ le fibré sur Δ^* dont la fibre en t est $H^n(Y(t), \mathbb{C})$ et $H' = \Gamma(U, \pi^* \underline{H'})$. On a donc que si le degré de f est suffisamment grand la restriction $H' \xrightarrow{r} H$ est surjective.

D'après le théorème des cycles invariants [6] on a alors une suite exacte: $0 \to I \to H' \xrightarrow{r} H \to 0$, où I est l'espace des cycles de H' invariants par la monodromie. Si l'on note H'_1 l'espace propre généralisé associé à la valeur propre 1 de la monodromie on a alors (en notant toujours r le morphisme de restriction) une suite exacte:

$$0 \to I \to H'_1 \xrightarrow{r} H_1 \to 0.$$

Soit maintenant $(u_1, \ldots, u_k)$ une base de H_1, il existe des formes ω_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, et des entiers m_i tels que $\alpha(\omega_i) = m_i$ et $u_{m_i}^{\omega_i} = u_i$.

D'autre part il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si ω' a un p jet nul on a:

(i) $$\alpha(\omega') > \alpha(\omega_i), \qquad \forall i \in [1, k];$$

(ii) $$\left| \int_{X(t)} \frac{\omega_i}{df} \wedge \frac{\omega'}{df} \right| = 0(|t|^{2m_i}), \qquad \forall i \in [1, k].$$

Un changement de coordonnées supplémentaires permet de supposer que $\deg f > p + n + 1$.

Dans ce cas, si on pose η_i le jet à l'ordre p de ω_i, la forme $\eta_i/(f-t)$ se prolonge sur $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ en une forme méromorphe à pôles logarithmiques le long de $Y(t)$ notée $\tilde{\eta}_i(t)$ pour tout $t \neq 0$ petit d'après Varchenko [7]. On a bien sûr $\alpha(\omega_i) = \alpha(\eta_i)$ et $u_{m_i}^{\omega_i} = u_{m_i}^{\eta_i}$. Pour simplifier les notations on supprime temporairement l'indice i. Le résidu de $\tilde{\eta}(t)$ le long de $Y(t)$ définit une forme différentielle fermée sur $Y(t)$ que l'on note $R(\tilde{\eta}(t))$ et qui définit une classe de cohomologie $[R(\tilde{\eta}(t))]$ dans $H^n(Y(t), \mathbb{C})$. Quand t varie $[R(\tilde{\eta}(t))]$ est alors un élément invariant par la monodromie de $\mathcal{N}$ilss $\otimes_{\mathbb{C}} H'$. Pour t non nul on a: $r_t([R(\tilde{\eta}(t))]) = s(\eta)$ et donc d'après le théorème des cycles invariants on a:

$$[R(\tilde{\eta}(t))] = \sum_{j<m} t^j V_j + t^m t^{N'} U + \sum_{\alpha > m} t^\alpha t^{N'} U_\alpha,$$

avec $r(U)=u$, $V_j \in I$, $U_\alpha \in H'$ et $(2\pi/i)N'$ le logarithme de la partie unipotente de la monodromie sur H'. Rappelons que sur une variété lisse compacte Y de dimension réelle $2n$, pour α et β deux n formes différentielles fermées on a $\int_Y \alpha \wedge \beta = q(a, b)$ où q est la forme d'intersection sur $H^n(Y, \mathbb{R})$ et a (resp. b) la classe de cohomologie définie par α (resp. β).

Si Q' est la forme d'intersection sur H', on a donc

$$\int_{Y(t)} [R(\tilde{\eta}(t))] \wedge \overline{[R(\tilde{\eta}(t))]} = P(|t|^2) + |t|^{2m}\left(\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} Q'\left(\frac{(\log t)^r}{r!} N'^r U, \frac{(\overline{\log t})^s}{s!} \overline{N'^s U}\right)\right) + O(|t|^{2m}),$$

avec P un polynôme.

Remarquons que

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} Q'\left(\frac{(\log t)^r}{r!} N'^r U, \frac{(\overline{\log t})^s}{s!} \overline{N'^s U}\right) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(\log t\bar{t})^l}{l!} Q'(N'^l U, \bar{U}).$$

D'après la condition (ii)

$$\int_{X(t)} \left(\frac{\eta}{df} \wedge \frac{\bar{\eta}}{df} - \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\bar{\omega}}{df}\right) \text{est un } o(|t|^{2m})$$

et comme $\int_{Y(t)X(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ est $\mathscr{C}^\infty$, les images dans $\mathscr{N}$ de $\int_{Y(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ et $\int_{X(t)} \omega/df \wedge \overline{\omega/df}$ ont leurs termes en $|t|^{2m} (\log t\bar{t})^l$ qui coincident.

Le coefficient de $|t|^{2m} \log(t\bar{t})^{l+1}$ dans le développement de $\int_{Y(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ est $(1/(l+1)!)$ $Q'(N'^{l+1} U, \bar{U})$ et celui de $\int_{X(t)} \omega/df \wedge \overline{\omega/df}$ est par définition $((2\pi i)^n/(l+1)!)\, h(N^l u, u)$. On obtient donc en particulier,

$$h(u,u)=\frac{1}{(2\pi i)^n}Q'(N'\,U,\bar{U}).$$

Soit maintenant $\tilde{u}$ quelconque de H'_1 tel que $r(\tilde{u})=u$: comme $U-\tilde{u}\in I$, on a $Q'(N'\,U,\bar{U})=Q'\,(N'\,\tilde{u},\bar{\tilde{u}})$. On en déduit donc par linéarité que pour tout $x\in H_1$ et tout $\tilde{x}$ de H'_1 tel que $r(\tilde{x})=x$ on a

$$h(x,x)=\frac{1}{(2\pi i)^n}Q'\,(N'\,\tilde{x},\bar{\tilde{x}})$$

(un tel $\tilde{x}$ existe toujours car r est surjective).

On en déduit (en utilisant la formule $4\,h(x,y)=\sum_{\varepsilon\in\{1,-1,i,-i\}}\varepsilon\,h\,(x+\varepsilon\,y,\,x+\varepsilon\,y)$) le résultat suivant:

THÉORÈME 2. — *Avec les notations précédentes*:

$$\forall(x,y)\in H_1\times H_1: h(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^n}Q'\,(N'\,\tilde{x},\bar{\tilde{y}}),$$

pour tout $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{y}$) de H'_1 vérifiant $r(\tilde{x})=x$ (resp. $r(\tilde{y})=y$), de tels $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ existant toujours.

COROLLAIRE 1. — *h est réelle dans le sens suivant: (on appelle $\underline{H}_{\mathbb{R}}$ le fibré sur Δ^* de fibre $H^n(X(t),\mathbb{R})$ et*

$$H_{\mathbb{R}}=\Gamma(U,\pi^*\underline{H}_{\mathbb{R}}),\qquad H_{\mathbb{R},1}=H_{\mathbb{R}}\cap H_1,\qquad H_{\mathbb{R},\neq 1}=H_{\mathbb{R}}\cap H_{\neq 1})$$

$$\bullet\,\forall(x,y)\in H_{\mathbb{R},\neq 1}\times H_{\mathbb{R},\neq 1},\qquad h(x,y)\in i^n\,\mathbb{R}$$

$$\bullet\,\forall(x,y)\in H_{\mathbb{R},1}\times H_{\mathbb{R},1},\qquad h(x,y)\in i^{n+1}\,\mathbb{R}.$$

Démonstration du corollaire. — On utilise la constatation évidente suivante: si q est une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) sur un espace vectoriel réel E de complexifié $E_{\mathbb{C}}=E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $q_{\mathbb{C}}$ la complexifiée alors $q_{\mathbb{C}}(x,\bar{y})$ (resp. $iq_{\mathbb{C}}(x,\bar{y})$) définit une forme hermitienne sur $E_{\mathbb{C}}$ et sa restriction à E est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $i\,\mathbb{R}$). On obtient le corollaire en remarquant que:

— sur $H_{\mathbb{R},\neq 1}$ Q est symétrique réelle si n est pair, antisymétrique réelle sinon.

— sur $H_{\mathbb{R},1}$: la forme q définie par $q(x, y) = iQ'(N'\tilde{x}, \bar{\tilde{y}})$ avec $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ tels que $r(\tilde{x}) = x$ et $r(\tilde{y}) = y$ est bilinéaire réelle: en effet on peut choisir $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ réels, et comme la monodromie est réelle iN' est réel. Enfin on remarque que q est antisymétrique si n est pair et symétrique sinon.

COROLLAIRE 2 (D. Barlet). — *Soit G le groupe des automorphismes de H qui commutent avec la monodromie. G agit sur les formes hermitiennes sur H. Soit S le stabilisateur de h:*

G/S est un espace affine symétrique.

Démonstration. — Comme h est réelle et non dégénérée $\sigma : G \to G$ qui à u associe $\sigma(u) = h^t\bar{u}^{-1}h^{-1}$ est une involution et $S = \mathrm{Fix}(\sigma)$.

Remarque 1. — Il est clair que la démonstration du théorème 2 permettrait si on le désirait de retrouver le (2) du théorème 1.

Remarque 2. — On pourrait alors retrouver le (1) du théorème 1 de la façon suivante: il suffit de montrer que la restriction de h à H_1 est non dégénérée. Soit alors $x \in H_1$ tel que $h(x, y) = 0$ pour tout y de H_1. Choisissons $\tilde{x}$ tel que $r(\tilde{x})) = x$. On a alors $\forall y \in H'_1\ Q'(N'\tilde{x}, \bar{\tilde{y}}) = 0$. Mais comme la restriction de Q' à H_1 est non dégénérée (dualité de Poincaré) on a alors $N'\tilde{x} = 0$, d'où $\tilde{x} \in I$ et $x = 0$.

Soit $(F^\cdot)$ la filtration de Hodge sur H définie par Steenbrink dans [6] et $(W^\cdot)$ la filtration par le poids de la monodromie. On pose $P^{k+n} = \{u \in \mathrm{Gr}^W_{k+n} / N^{k+1}u = 0\}$. D'après [6] $(F^\cdot)$ induit sur P^{k+n} une structure de Hodge de poids $k+n$ et écrivons $P^{k+n} = \oplus_{p+q=k+n} P^{p,q}$ la décomposition de Hodge correspondante.

Alors d'après les théorèmes 1 et 2 et le théorème de Schmid ([5], p. 255) on obtient que h vérifie les propriétés de polarisation suivantes (on note $P^{p,q}_1 = H_1 \cap P^{p,q}$ et $P^{p,q}_{\neq 1} = H_{\neq 1} \cap P^{p,q}$):

COROLLAIRE 3. — (i) *Soient $(u, v) \in P^{p,q}_1 \times P^{r,s}_1$ avec $p+q = r+s = n+k$.*

— *Alors $h(N^{k-1}u, v) = 0$ si $(p, q) \neq (s, r)$;*

— *si $u \neq 0$, alors $(-1)^{[n(n-1)/2]+k+p}\, h(N^{k-1}u, u) > 0$.*

(ii) *Soient $(u, v) \in P^{p,q}_{\neq 1} \times P^{r,s}_{\neq 1}$ avec $p+q = r+s = n+k$.*

— *Alors $h(N^k u, v) = 0$ si $(p, q) \neq (s, r)$;*

— *si $u \neq 0$, alors $(-1)^{[n(n-1)/2]+k+p}\, h(N^k u, u) > 0$.*

Remarque 3. — N définie ici diffère de $i/2\pi$ du N de [5].

Remarque 4. — Dans [3] nous avons utilisé implicitement le corollaire 2 pour déterminer des pôles du courant $|f|^{2s}$.

Remarque (*ajoutée sur épreuves*). — Soit I la forme d'intersection $H \times H_c \to \mathbb{C}$, H_c étant l'analogue de H pour la cohomologie à support. Soit M la partie unipotente de la monodromie sur H, Var: $H \to H_c$, l'isomorphisme de variation et

$$V = \mathrm{Var} \circ \left(\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \frac{(M-\mathrm{Id})^i}{i+1} \right).$$

On déduit facilement du théorème 2 la formule purement locale suivante: pour x et y dans H_1, on a

$$h(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} I(x, V\bar{y}).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres. *Inventiones Math.*, vol. 68, 1982, p. 129-174.

[2] BARLET (D.). — Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. *Inventiones Math.*, vol. 81, 1985, p. 115-153.

[3] LOESER (F.). — Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. XXXV, n° 1, 1985, p. 75-92.

[4] SCHERK (J.). — On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities. *Inventiones Math.*, vol. 58, 1980, p. 289-301.

[5] SCHMID (W.). — Variation of Hodge structures; the singularities of the period mapping. *Inventiones Math.*, vol. 22, 1973, p. 211-319.

[6] STEENBRINK (J.). — Mixed Hodge structure on the Vanishing cohomology. Real and Complex singularities, Oslo, 1976, p. 525-563.

[7] VARCHENKO (A.). — Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure, *Dolk. Akad. Nauk.*, vol. 255, n° 5, 1980, p. 1035-1038.