BULLETIN DE LA S. M. F.

B. HOST

Le théorème des idempotents dans $B(G)$

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 215-223
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__215_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 215-223.

LE THÉORÈME DES IDEMPOTENTS DANS $B(G)$

PAR

B. HOST (*)

RÉSUMÉ. — On détermine les idempotents de l'algèbre de Fourier-Stieltjea $B(G)$ de tout groupe localement compact G; on en déduit la description des homomorphismes de $A(G)$ dans $B(H)$, où G et H sont deux groupes localement compacts, avec G abélien.

ABSTRACT. — The idempotents of the Fourier-Stieltjes algebra $B(G)$ are characterized for any locally compact group G. This leads to the description of the homomorphisms from $A(G)$ into $B(H)$, where G and H are two locally compact groups with G abelian.

G étant un groupe localement compact, $B(G)$ désigne l'espace vectoriel de fonctions sur G engendré par les fonctions définies positives et continues. Muni de la multiplication ponctuelle, $B(G)$ est une algèbre de fonctions sur G, appelée l'algèbre de Fourier-Stieltjes de G. Cette algèbre a été étudiée par P. EYMARD [4]. $A(G)$ désigne l'idéal de $B(G)$ formé des coefficients de la représentation régulière de G.

On caractérise ici les éléments idempotents de $B(G)$, c'est-à-dire les fonctions de $B(G)$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, et, plus généralement, les fonctions de $B(G)$ à valeurs entières. De ce résultat, on déduit une caractérisation des homomorphismes de $A(G)$ dans $B(H)$, où G et H sont deux groupes localement compacts avec G abélien.

Les énoncés obtenus sont exactement les mêmes que dans le cas abélien, où ils ont été démontrés par P. J. COHEN ([1], [2]).

Le résultat principal de cet article a déjà été annoncé par M. LEFRANC [5], mais aucune preuve n'a été publiée. La démonstration proposée ici est rapide et élémentaire.

(*) Texte reçu le 21 juin 1985.

B. HOST, Département de Mathématiques, C.S.P. Université Paris-Nord, avenue Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHEMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/02 215 9/$2.90

THÉORÈME. — *Soit G un groupe localement compact. Les fonctions de $B(G)$ à valeurs entières sont les combinaisons linéaires finies, à coefficients entiers, des translatées des fonctions indicatrices des sous-groupes ouverts de G.*

Appelons anneau des classes de G l'anneau de parties de G engendré par les translatés des sous-groupes ouverts de G. Du théorème, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE. — *Les idempotents de $B(G)$ sont les fonctions indicatrices des éléments de l'anneau des classes de G.*

Toute fonction du type indiqué dans l'énoncé du théorème est à valeurs entières, et appartient à $B(G)$, puisque cet espace est invariant par translation et que la fonction indicatrice d'un sous-groupe ouvert de G est définie positive et continue. Il faut prouver la réciproque.

1. Préliminaires

1.1. Dans la démonstration, on aura besoin plusieurs fois de comparer les topologies faible et forte de l'algèbre des opérateurs $L(H)$ d'un espace de Hilbert H.

(T_i) étant une suite généralisée (filtre) dans $L(H)$, on rappelle que (T_i) converge faiblement vers $T \in L(H)$ si, pour tous a, $b \in H$ la suite $(\langle T_i a \mid b \rangle)$ converge vers $\langle Ta \mid b \rangle$;

(T_i) converge fortement vers T si, pour tout $a \in H$, la suite $(\| T_i a - Ta \|)$ converge vers 0.

Soit A une partie de $L(H)$. Les topologies faible et forte de $L(H)$ coïncident sur A dans chacun des deux cas suivants :

(1) A est formé de projecteurs.

(2) Tous les éléments de A ont la même valeur absolue, qui est un projecteur de H.

1.2. On utilisera une définition équivalente de $B(G)$ (*cf* [3], chap. 13).

Pour qu'une fonction f sur G appartienne à $B(G)$, il faut et il suffit qu'il existe une représentation unitaire fortement continue π de G dans un espace de Hilbert H, et deux points a et b de H tels que

$$f(g) = \langle \pi(g)a \mid b \rangle \quad \text{pour tous } g \in G.$$

En fait, on peut de plus imposer que a et b sont totalisateurs, c'est-à-dire que les espaces fermés engendrés dans H respectivement par $\pi(G)a$ et par $\pi(G)b$ sont tous deux égaux à H.

1.3. Soit π une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H. $\pi(G)$ est, pour la multiplication des opérateurs, un sous-semi-groupe de la boule unité de $L(H)$.

On notera désormais $\bar{G}_\pi$ l'adhérence de $\pi(G)$ dans $L(H)$ pour la topologie faible de $L(H)$.

Comme la conjugaison est une application faiblement continue de $L(H)$ dans lui-même, et que $\pi(G)$ est stable par conjugaison,

$$\bar{G}_\pi \text{ est stable par conjugaison.}$$

D'autre part, la multiplication des opérateurs est une opération faiblement séparément continue sur $L(H)$; comme $\pi(G)$ est stable par cette opération,

$$\bar{G}_\pi \text{ est stable par multiplication.}$$

Enfin, $\bar{G}_\pi$ est une partie faiblement fermée de la boule unité de $L(H)$, d'où :

$$\bar{G}_\pi \text{ est faiblement compact.}$$

On note encore $\bar{G}_\pi^+$ l'ensemble des éléments positifs de $\bar{G}_\pi$. Alors $\bar{G}_\pi^+$ est une partie faiblement compacte de $L(H)$, contenant l'identité I, et, pour tout $X \in \bar{G}_\pi$, $|X|^2 = X^* X \in \bar{G}_\pi^+$.

2. Description de $\bar{G}_\pi$

Dans la suite, f désigne une fonction de $B(G)$ à valeurs entières; π est une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H, et a et b sont deux éléments de H, totalisateurs et tels que $\langle \pi(g)a \mid b \rangle = f(g)$ pour tout $g \in G$.

2.1. Pour tout $g \in G$, $\langle \pi(g)a \mid b \rangle$ est un entier. Par passage à la limite :

(1) Pour tout $X \in \bar{G}_\pi$, $\langle Xa \mid b \rangle$ est un entier.

Soient X, $Y \in \bar{G}_\pi$ tels que $\|Xa - Ya\| < \|b\|^{-1}$. Pour tout $g \in G$, $\pi(g^{-1})X$ et $\pi(g^{-1})Y$ appartiennent à $\bar{G}_\pi$, donc $\langle Xa \mid \pi(g)b \rangle$ et $\langle Ya \mid \pi(g)b \rangle$ sont des entiers; la différence de ces deux nombres a une valeur absolue strictement inférieure à 1. Ainsi, pour tout $g \in G$, $\langle Xa - Ya \mid \pi(g)b \rangle = 0$. Comme b est totalisateur, $Xa = Ya$. Finalement :

(2) L'ensemble $\{Xa;\ X \in \bar{G}_\pi\}$ est une partie discrète de H.

Soit $X \in \bar{G}_\pi^+$. La suite (X^n) converge fortement dans $L(H)$ vers un projecteur $E \in \bar{G}_\pi^+$. Soit $g \in G$; $E\pi(g) \in \bar{G}_\pi$, et $X^n \pi(g) \in \bar{G}_\pi$ pour tout n; la suite $(X^n \pi(g)a)$ converge en norme vers $E\pi(g)a$, et, d'après (2), il existe $n > 0$ tel que $X^n \pi(g)a = E\pi(g)a$; or, pour tout $n > 0$, les opérateurs $E - X^n$ et $E - X$ ont même noyau, donc $X\pi(g)a = E\pi(g)a$. Comme a est totalisateur :

(3) $\bar{G}_\pi^+$ est formé de projecteurs.

Pour tout $X \in \bar{G}$, $X^* X \in \bar{G}_\pi^+$ et est donc un projecteur, donc X est une isométrie partielle. Soient E, $F \in \bar{G}_\pi^+$. EF et FE sont des isométries partielles. Soit $x \in H$; pour que $\|EFx\|$ soit égal à $\|x\|$, il faut et il suffit que $Fx = x = Ex$, et alors $EFx = x$; de même, $\|FEx\| = \|x\|$ si et seulement si $Ex = x = Fx$, et alors $FEx = x$. Finalement, $EF = FE$:

(4) Les éléments de $\bar{G}_\pi^+$ commutent.

$\bar{G}_\pi^+$ étant formé de projecteurs, les topologies forte et faible coïncident sur cet ensemble, qui est donc fortement compact. Notons

$$A = \{Ea;\ A \in \bar{G}_\pi^+\}.$$

A est l'image de la partie fortement compacte $\bar{G}_\pi^+$ par l'application continue qui à E associe Ea, donc A est une partie compacte de H; d'autre part, d'après (2), A est une partie discrète de H :

(5) L'ensemble $A = \{Ea;\ A \in \bar{G}_\pi^+\}$ est fini.

3. Réduction du problème

Pour tout $x \in A$, l'ensemble $\{E \in \bar{G}_\pi^+;\ Ea = x\}$ est un semi-groupe compact abélien non-vide de projecteurs. Cet ensemble contient donc un plus petit élément, qu'on notera E_x.

Pour toute partie B de A, soit

$$F_B=\prod_{x\in B}E_x\prod_{x\in A\setminus B}(I-E_x).$$

Comme les projecteurs E_x commutent, et que l'identité I appartient à $\bar{G}_\pi^+$, chaque opérateur F_B est un projecteur, et aussi une combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de $\bar{G}_\pi^+$; chacun de ces opérateurs commute avec $\bar{G}_\pi^+$. La somme de ces opérateurs F_B, quand B parcourt l'ensemble des parties de A, est l'identité I.

Pour toute partie B de A, on note encore :

$$a_B=F_B\,a$$

et soit f_B la fonction sur G définie par

$$f_B(g)=\langle\pi(g)\,a_B\,|\,b\rangle\qquad\text{pour tout}\quad g\in G.$$

Pour chaque partie B de A, la fonction f_B est une combinaison linéaire, à coefficients entiers, des fonctions $g\to\langle\pi(g)\,Ea\,|\,b\rangle$, avec $E\in\bar{G}_\pi^+$; chacune de ces donctions appartient à $B(G)$ et est à valeurs entières, donc f_B est une fonction de $B(G)$ à valeurs entières.

D'autre part,

$$\sum_{B\subset A}f_B=f\quad\text{car}\ \sum_{B\subset A}a_B=\sum_{B\subset A}F_B\,a=a.$$

Pour démontrer que f a la forme indiquée, il suffit de le montrer pour chacune des fonctions f_B. Choisissons donc une partie B de A.

Pour alléger les notations, on posera désormais

$$c=a_B,$$

$$F=F_B,$$

et

$$h=f_B.$$

4. Fin de la démonstration

Par construction, $Fc=c$. Soit $E\in\bar{G}_\pi^+$, et soit $x=Ea$. $E\geqslant E_x$ par définition de E_x; si $x\in B$, $E\geqslant E_x\geqslant F$; au contraire, si $x\notin B$, $F\leqslant(I-E_x)$, et $Ec=EFa=FEa=Fx=0$. Finalement,

(6) $Fc=c$. Pour tout $E\in\bar{G}_\pi^+$, on a $Ec=0$ ou $E\geqslant F$.

Si $X\in\bar{G}_\pi$, $X^*X\in\bar{G}_\pi^+$, d'où :

(7) Pour tout $X\in\bar{G}_\pi$, si $Xc\neq 0$ alors $X^*X\geqslant F$.

Soit $\bar{G}_\pi c=\{Xc;\ X\in\bar{G}_\pi\}$. La fonction h est à valeurs entières, donc $\langle Xc\,|\,b\rangle$ est un entier pour tout $X\in\bar{G}_\pi$. b étant totalisateur, on peut appliquer la méthode utilisée pour montrer (2); d'où

(8) $\bar{G}_\pi c$ est une partie discrète de H.

Soit $D=\{x\in\bar{G}_\pi c;\ \langle x\,|\,b\rangle\neq 0\}$.

Soit (x_i) une suite dans D. Pour chaque i, soit $X_i\in\bar{G}_\pi$ avec $X_i c=x_i$, et soit encore $X\in\bar{G}_\pi$ un opérateur de H faiblement adhérant à la suite (X_i). Pour tout i, $\langle X_i c\,|\,b\rangle=\langle x_i\,|\,b\rangle$ est un entier non nul, donc $\langle Xc\,|\,b\rangle$ est non nul. Pour tout i, $X_i c\neq 0$ donc $X_i^*X_i\geqslant F$ d'après (7), et de même $X^*X\geqslant F$.

XF est faiblement adhérant à la suite $(X_i F)$; tous ces opérateurs ont la même valeur absolue F. D'après 1.1., XF adhère fortement à la suite $(X_i F)$, donc XFc adhère en norme à la suite $(X_i Fc)$; comme $Fc=c$, Xc adhère à la suite (x_i). D'autre part, $Xc\in D$. D est donc une partie compacte de H. Donc, d'après (8),

(9) D est une partie finie de H.

Soit $G_0=\{g\in G;\ \pi(g)c=c\}$. G_0 est un sous-groupe de G, ouvert car π est une représentation fortement continue de G et que $\bar{G}_\pi c$ est discret d'après (8).

La fonction h est constante sur chaque classe gG_0; plus précisément, $\pi(g)c=\pi(g')c$ si et seulement si $gG_0=g'G_0$. D'après (9), l'ensemble décrit par $\pi(g)c$ avec $h(g)\neq 0$ est fini. h est donc nulle en dehors de la réunion d'un nombre fini de classes gG_0, et est constante sur chacune de ces classes : la fonction h a donc bien la forme annoncée, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Homomorphismes de $A(G)$ dans $B(H)$

Définition. — Soient G, H deux groupes localement compacts, Y une partie de H et α une application de Y dans G. On dit que α est affine par morceaux s'il existe une partition de Y par une suite finie $(Y_i;\ i\in I)$ d'éléments de l'anneau des classes de H et si, pour tout $i\in I$ il existe :

– un sous-groupe ouvert H_i de H et un homomorphisme de groupes continu α_i de H_i dans G;

– un élément h_i de H tel que Y_i soit inclus dans $h_i H_i$ et

– un élément g_i de G tel que

$$\text{pour tout } h\in Y_i, \qquad \alpha(h)=g_i\,\alpha_i(h_i^{-1}h).$$

Proposition. — *Soient G et H deux groupes localement compacts, avec G abélien, et soit Φ un homomorphisme d'algèbres de $A(G)$ dans $B(H)$. Il existe une partie Y de H et une application affine par morceaux α de Y dans G telles que, pour tout $f\in A(G)$ et tout $h\in H$,*

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned} &\textit{Si } h\in Y, && \Phi f(h)=f(\alpha(h))\\ &\textit{et} && \\ &\textit{si } h\notin Y, && \Phi f(h)=0.\end{aligned}$$

Réciproquement, si Y est une partie de H et α une application affine par morceaux de Y dans G, les formules (10) *définissent un homomorphisme d'algèbres de $A(G)$ dans $B(H)$.*

La deuxième partie de la proposition est évidente. Soit Φ un homomorphisme d'algèbres de $A(G)$ dans $B(H)$. Pour tout $h\in H$, l'application qui à $f\in A(G)$ associe $\Phi f(h)$ est un caractère de l'algèbre de Banach commutative $A(G)$; d'après [4], le spectre de cette algèbre s'identifie à $G\cup\{0\}$; on en déduit qu'il existe une partie Y de H et une application α de Y dans G liées à Φ par les formules (10). Il reste à prouver que α est affine par morceaux.

On ne donne pas ici de preuve complète, car il suffit de suivre pas à pas la démonstration du résultat de Cohen [2], qu'elle est exposée par Rudin ([6], chap. 4). Seul l'argument employé pour démontrer le théorème 4.4.3. de [6] ne peut être généralisé directement au cas où H n'est pas abélien, et on le remplace par le lemme suivant.

Lemme. — *On suppose de plus G et H discrets. Alors le graphe de l'application α appartient à l'anneau des classes de $H\times G$.*

Munies de leurs normes habituelles, les algèbres $A(G)$ et $B(H)$ sont des algèbres de Banach commutatives et semi-simples (*cf.* [4]). L'homomorphisme Φ est donc continu, et il existe une constante $C>0$ telle que

$$\text{pour tout } f \in A(G), \qquad \|\Phi f\|_{B(H)} \leqslant C \|f\|_{A(G)}.$$

Pour toute fonction $u \in A(G \times G)$, soit ψu la fonction définie sur $H \times G$ par

$$\text{pour } g \in G \quad \text{et} \quad h \in Y, \qquad \psi u(h, g) = \Phi u(\alpha(h), g)$$

et

$$\text{pour } g \in G \quad \text{et} \quad h \in H \diagdown G, \qquad \psi u(h, g) = 0.$$

Comme G est abélien, l'espace de Banach $A(G \times G)$ s'identifie à $A(G) \hat{\otimes} A(G)$, et il existe deux suites (v_n) et (w_n) dans $A(G)$ avec

$$\sum_n \|v_n\|_{A(G)} \|w_n\|_{A(G)} < +\infty$$

et

$$u(g, g') = \sum_n v_n(g) w_n(g') \qquad \text{pour tous} \quad g, \quad g' \in G,$$

cette dernière série convergeant normalement. Pour tout $h \in H$ et tout $g \in G$, on a alors

$$u(h, g) = \sum_n \Phi v_n(h) w_n(g).$$

Pour tout n, la fonction $(h, g) \mapsto \Phi v_n(h) w_n(g)$ appartient à $B(H \times G)$, et sa norme dans cet espace est majorée par $C \|v_n\|_{A(G)} \|w_n\|_{A(G)}$.

Finalement, la fonction Ψu appartient à $B(H \times G)$ et

$$\|\Psi u\|_{B(H \times G)} \leqslant \sum_n C \|v_n\|_{A(G)} \|w_n\|_{A(G)}.$$

Ψ est ainsi une application de $A(G \times G)$ dans $B(H \times G)$, et est visiblement un homorphisme d'algèbres.

Comme G est discret, la diagonale de $G \times G$ est un sous-groupe ouvert de $G \times G$; la fonction indicatrice u de cet ensemble appartient à $B(G \times G)$, et sa norme dans cet espace est 1. Le groupe G étant abélien, il est moyennable, et il existe une suite (u_n) de fonctions de $A(G \times G)$, convergeant simplement vers u, et avec $\|u_n\|_{A(G \times G)} \leqq 1$ pour tout n. Pour tout n, ψu_n appartient à $B(H \times G)$; comme précédemment, l'homomorphisme ψ est continu, et la suite (ψu_n) est bornée dans $B(H \times G)$. D'autre part, la suite (ψu_n) converge simplement vers la fonction indicatrice du graphe de α. Cette dernière appartient donc à $B(H \times G)$ et, d'après le théorème, le graphe de α appartient à l'anneau des classes de $H \times G$.

Remarque. — La proposition peut facilement être généralisée au cas où G est une extension finie d'un groupe abélien, mais elle est fausse si G ne vérifie pas cette hypothèse :

Soit Φ l'isomorphisme de $A(G)$ dans lui-même défini par

$$\text{pour tout } f \in A(G), \qquad \Phi f(g) = f(g^{-1}).$$

Cet homomorphisme n'est pas de la forme indiquée dans la proposition, sauf si G est une extension finie d'un groupe abélien.

RÉFÉRENCES

[1] COHEN (P. J.). — On a conjecture of Littlewood and idempotents measures, *Amer. J. Math.*, vol. 82, 1960, p. 191-212.

[2] COHEN (P. J.). — On homomorphisms of groups algebras, *Amer. J. Math.*, vol. 82, 1960, p. 213-226.

[3] DIXMIER (J.). — *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[4] EYMARD (P.). — L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 92, 1964, p. 181-236.

[5] LEFRANC (M.). — Sur certaines algèbres de fonctions sur un groupe, *C.R. Acad. Sc.*, t. 274, 1972, p. 1882-1883.

[6] RUDIN (W.). — Fourier analysis on groups, *Interscience tracts in Math. n° 12*, Interscience, New York, 1962.