Bulletin de la S. M. F.

Jean-Luc Sauvageot

Une relation de chaîne pour les dérivées de Radon-Nikodym spatiales

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 105-117
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__105_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 105-117.

UNE RELATION DE CHAINE POUR LES DÉRIVÉES DE RADON-NIKODYM SPATIALES

PAR

JEAN-LUC SAUVAGEOT (*)

RÉSUMÉ. — La notion de produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert permet de donner un sens à une relation de chaîne entre dérivées de Radon-Nikodym spatiales de A. Connes, et d'écrire en termes simples d'ampliation relative l'isomorphisme canonique entre deux espaces L^p d'une même algèbre de von Neumann.

ABSTRACT. — The theory of relative tensor product of Hilbert spaces allows us to write a chain rule for A. Connes' spatial Radon-Nikodym derivatives, give meaning to it, and prove it. It provides also, expressed in termes of relative ampliation, the canonical isomorphism between two L^p-spaces associated with the same von Neumann algebra.

Introduction

Le propos de cet article est de lever une difficulté inhérente à la théorie des dérivées spatiales de A. Connes : qu'est-ce qu'une relation de chaîne entre dérivées de Radon-Nikodym? comment écrire un théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \times \frac{d\psi_1}{d\psi_2},$$

dont la conception même semble problématique, puisque la dérivation $d\varphi/d\psi$ se fait entre deux objets — un poids φ sur une algèbre de von Neumann et un poids ψ sur son commutant — qui sont hétérogènes, et que le signe « $\times$ » dans le membre de droite n'a donc aucun sens *a priori ?*

(*) Texte reçu le 29 janvier 1985, révisé le 15 octobre 1985.

Jean-Luc SAUVAGEOT, Laboratoire de Probabilités, L.A. n° 224, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/01 105 13/$ 3.30

Une autre manière de poser le problème est la suivante : si une algèbre de von Neumann M est représentée dans deux espaces de Hilbert H_1 et H_2, si ψ_1 et ψ_2 sont des poids n. s. f. f. sur les commutants respectifs de M dans $\mathscr{L}(H_1)$ et $\mathscr{L}(H_2)$, comment déduire l'une de l'autre les dérivées spatiales

$$\frac{d\varphi}{d\psi_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{d\psi_2} \quad (\varphi \text{ poids n. s. f. sur } M),$$

opérateurs agissant dans des espaces de Hilbert différents? comment reconstituer $L^1(\psi_2)$ à partir de $L^1(\psi_1)$, et plus généralement $L^p(\psi_2)$ à partir de $L^p(\psi_1)$?

Le cadre d'une réponse est fourni par la théorie du produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert ([2], [5]). Notons N_1 (resp. N_2) l'algèbre opposée du commutant $\mathscr{L}_M(H_1)$ (resp. $\mathscr{L}_M(H_2)$), et ν_1 le poids n. s. f. f. sur N_1 correspondant à ψ_1 : il existe (*cf.* [5], corollaire 3.4) un N_1-N_2 bimodule K, essentiellement unique, tel que l'on ait l'isomorphisme de $M-N_2$ bimodules

$$H_2 = H_1 \otimes_{\nu_1} K.$$

Notre travail consiste à donner un sens, puis démontrer l'équation

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \otimes_{\nu_1} \frac{d\nu_1}{d\psi_2},$$

qui n'est autre (en écrivant $\nu_1 = \psi_1^0$) que la relation de chaîne

$$\frac{d\varphi}{d\psi_2} = \frac{d\varphi}{d\psi_1} \otimes_{\psi_1^0} \frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}.$$

(Remarquons que ni $d\varphi/d\psi_1$ ni $d\nu_1/d\psi_2$ ne respectent en général la structure de N_1-module de H_1 ou de K : nous montrons que le second membre de l'équation est néanmoins naturellement défini comme fermeture de l'action produit sur les tenseurs élémentaires.)

L'isomorphisme canonique des espaces $L^1(\psi_1)$ et $L^1(\psi_2)$ s'écrit alors comme une ampliation relative d'opérateurs non bornés :

$$L^1(\psi_1) \ni T \to T \otimes_{\psi_1^0} \frac{d\psi_1^0}{d\psi_2} \in L^1(\psi_2);$$

et notre démonstration fournit de la même manière, pour tout $p>0$, l'isomorphisme canonique des espaces $L^p(\psi_1)$ et $L^p(\psi_2)$ comme une ampliation relative

$$T \to T \otimes_{\psi_1^0} \left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}.$$

1. Notations et rappels

1.1. Dans ce paragraphe et le suivant on se donne :

– une algèbre de von Neumann N, dont on note N^0 l'algèbre opposée;

– un poids n.s.f.f. ν sur N, dont on note $\mathcal{N}_\nu$ l'idéal de définition et $\mathcal{U}_0$ l'algèbre de Tomita; $\dot{\nu}$ désigne le poids n.s.f.f. correspondant sur N^0.

Si λ est un nombre complexe, on appelle *domaine de* σ_λ^ν et on note $\mathcal{D}(\sigma_\lambda^\nu)$ l'ensemble des y de N tels que l'application $\mathbb{R} \ni y \to \sigma_t^\nu(y)$ admette un prolongement continu à la bande $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} \lambda$ (ou $\operatorname{Im} \lambda \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$), analytique à l'intérieur. $\sigma_\lambda^\nu(y)$ est alors la valeur de ce prolongement pour $z=\lambda$, et est caractérisé par

$$\sigma_\lambda^\nu(y) \Delta_\nu^{i\lambda} \subset \Delta_\nu^{i\lambda} y.$$

En particulier on a $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{D}(\sigma_\lambda^\nu)$ pour tout λ.

1.2. On se donne également :

– un N-module à gauche K, c'est-à-dire un espace de Hilbert muni d'une représentation normale non dégénérée de N; classiquement, on note $y\eta$ le résultat de l'action d'un élément y de N sur un vecteur η de K;

– un N-module à droite H (c'est-à-dire un N^0-module à gauche); on note ξy le résultat de l'action d'un élément y^0 de N^0 sur un vecteur ξ de H.

On rappelle [1] qu'un vecteur η de K est ν-borné si il existe un opérateur borné $R^\nu(\eta)$ dans $\mathcal{L}_N(L^2(\nu), K)$ vérifiant

$$R^\nu(\eta)\Lambda_\nu(y) = y\eta, \quad \forall y \in \mathcal{N}_\nu;$$

l'espace vectoriel $D(K, \nu)$ des vecteurs ν-bornés est dense dans K.

On identifiera, via l'involution J_ν, les espaces $L^2(\nu)$ et $L^2(\dot{\nu})$, de sorte que si ξ est un vecteur $\dot{\nu}$-borné de H, on aura

$$R^{\dot{\nu}}(\xi) J_\nu \Lambda_\nu(y) = \xi y^*, \qquad \forall y \in \mathcal{N}_\nu.$$

1.3. A un couple (η_1, η_2) de vecteurs ν-bornés de K est associé l'opérateur borné

$$\theta^{\nu}(\eta_1, \eta_2) = R^{\nu}(\eta_1) R^{\nu}(\eta_2)^*,$$

qui appartient au commutant $\mathscr{L}_N(K)$ de N dans $\mathscr{L}(K)$.

Si ψ est un poids n. s. f. sur $\mathscr{L}_N(K)$, alors la forme quadratique

$$D(K, \nu) \ni \eta \to \psi(\theta^{\nu}(\eta, \eta)) \in [0, +\infty],$$

se prolonge en une forme quadratique fermée définie sur K (à valeurs dans $[0, +\infty]$); la dérivée spatiale $d\psi/d\nu$ de A. Connes est l'opérateur positif auto-adjoint sur K associé à cette forme (*cf.* [1]).

1.4. On définit sur $D(H, \dot{\nu})$ et $D(K, \nu)$ des produits scalaires à valeurs dans N (N identifiée à son image dans $\mathscr{L}(L^2(\nu))$) en posant :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\dot{\nu}} = R^{\dot{\nu}}(\xi_2)^* R^{\dot{\nu}}(\xi_1), \qquad \forall \xi_1, \quad \xi_2 \in D(H, \dot{\nu}),$$
$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} = J_{\nu} R^{\nu}(\eta_1)^* R^{\nu}(\eta_2) J_{\nu}, \qquad \forall \eta_1, \quad \eta_2 \in D(K, \nu).$$

Nota. — Pour éviter la confusion entre ces formes sesquilinéaires à valeurs opérateurs et le produit scalaire ordinaire des espaces de Hilbert H ou K, celui-ci sera noté $(.\,|\,.)$.

Rappelons les lemmes 1.5 et 1.6 de [5] :

1.5. LEMME. — Soient ξ_1 *et* ξ_2 *deux vecteurs* $\dot{\nu}$*-bornés de* H, η_1 *et* η_2 *deux vecteurs* ν*-bornés de* K. *On a alors :*

$$(a) \ \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\dot{\nu}} \in \mathscr{N}_{\nu} \ et \ \Lambda_{\nu}(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\dot{\nu}}) = R^{\dot{\nu}}(\xi_2)^* \xi_1.$$

(*b*) $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu} \in \mathscr{N}_{\nu}$ *et* $\Lambda_{\nu}(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\nu}) = J_{\nu} R^{\nu}(\eta_1)^* \eta_2$.

(*c*) $(\xi_1 < \eta_1, \eta_2 >_{\nu} | \xi_2) = (\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\dot{\nu}} \eta_1 | \eta_2)$.

1.6. LEMME. — *Soit* ψ *un poids n. s. f. f. sur* $\mathscr{L}_N(K)$ *et* λ *un nombre complexe.*

(*a*) *Pour* $y \in \mathscr{D}(\sigma^{\nu}_{i\lambda})$, *on a l'inclusion*

$$\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda} y \supset \sigma^{\nu}_{i\lambda}(y) \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\lambda};$$

(*b*) *si* $\eta \in \mathscr{D}((d\psi/d\nu)^\lambda)$ *est* ν-*borné et si* $(d\psi/d\nu)^\lambda\, \eta$ *est également* ν-*borné, on a l'inclusion*

$$\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^\lambda R^\nu(\eta) \supset R^\nu\left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^\lambda \eta\right)\Delta_\nu^{-\lambda};$$

(*c*) *si* η *et* η' *sont comme en* (*b*), *alors* $\langle (d\psi/d\nu)^\lambda \eta, \eta' \rangle_\nu$ *est dans le domaine de* $\sigma^\nu_{-i\lambda}$, *et on a l'égalité :*

$$\sigma^\nu_{-i\lambda}\left(\left\langle\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^\lambda \eta, \eta'\right\rangle_\nu\right) = \left\langle \eta, \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{\bar\lambda} \eta'\right\rangle_\nu.$$

1.7. Rappelons ([2] et [5]) que le *produit tensoriel relatif* $H \otimes_\nu K$ est l'espace de Hilbert séparé complété du produit tensoriel algébrique $D(H, \nu^0) \odot K$ pour le produit scalaire défini par

$$(\xi_1 \otimes_\nu \eta_1 \,|\, \xi_2 \otimes_\nu \eta_2) = (\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\nu}^{\circ} \eta_1 \,|\, \eta_2), \xi_1, \xi_2 \in D(H, \overset{\circ}{\nu}), \eta_1, \eta_2 \in K;$$

ou encore l'espace de Hilbert séparé complété de $H \odot D(K, \nu)$ pour le produit scalaire :

$$(\xi_1 \otimes_\nu \eta_1 \,|\, \xi_2 \otimes_\nu \eta_2) = (\xi_1 \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_\nu \,|\, \xi_2), \xi_1, \xi_2 \in H, \eta_1, \eta_2 \in D(K, \nu).$$

Cette construction est fonctorielle, et l'on peut représenter dans $H \otimes_\nu K$ *le produit tensoriel relatif* $T_1 \otimes_\nu T_2$ de deux opérateurs $T_1 \in \mathscr{L}_{N^0}(H)$ et $T_2 \in \mathscr{L}_N(K)$ par son action naturelle sur les tenseurs élémentaires; en outre, $\mathbb{C}_H \otimes_\nu \mathscr{L}_N(K)$ est exactement le commutant de $\mathscr{L}_{N^0}(H) \otimes_\nu \mathbb{C}_K$ ([5], proposition 3.3). De sorte que, si φ est un poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_{N^0}(H)$ et ψ un poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_N(K)$, la dérivée spatiale $d\varphi/d\psi$ existe comme opérateur fermé dans $H \otimes_\nu K$.

Le but du paragraphe suivant est de reconstituer $d\varphi/d\psi$ à partir des dérivées spatiales $d\varphi/d\overset{\circ}{\nu}$ et $d\nu/d\psi$.

2. Transitivité de la dérivée spatiale

Les notations sont celles du paraphe précédent. On s'est donné :

– une algèbre de von Neumann N, un N-module à droite H, un N-module à gauche K;

— un poids n. s. f. f. ν sur N; un poids n. s. f. f. φ sur $\mathscr{L}_{N^0}(H)$ et un poids n. s. f. f. ψ sur $\mathscr{L}_N(K)$.

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on peut donner un sens naturel à l'opérateur

$$\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}} \otimes_\nu \frac{d\nu}{d\psi}$$

et que l'on a l'équation, entre opérateurs fermés dans $H \otimes_\nu K$:

$$\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}} \otimes_\nu \frac{d\nu}{d\psi} = \frac{d\varphi}{d\psi}$$

(et plus généralement, pour tout λ complexe,

$$\left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^\lambda \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^\lambda\Bigg).$$

2.1. Notation. — Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on posera

$$\mathscr{D}_\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right) = \left\{\eta \in D(K, \nu)/\eta \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right) \text{ et } \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda \eta \in D(K, \nu)\right\}.$$

2.2. Lemme. — *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathscr{D}_\nu((d\nu/d\psi)^\lambda)$ *est un cœur pour* $(d\nu/d\psi)^z$.

Démonstration. — Reprenons les résultats et les notations de la proposition 2, chapitre II, de [4], et de sa démonstration :

Tout d'abord, on sait que

$$D = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda\right) \cap D(K, \nu)$$

est un cœur pour $(d\nu/d\psi)^z$.

Pour $\eta \in K$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\eta_\gamma = \sqrt{\gamma\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} \eta \, dt,$$

et on note D_0 *l'espace vectoriel engendré par les* η_γ, η parcourant D et γ parcourant $\mathbb{R}_+^*$.

D_0 est un cœur pour $(d\nu/d\psi)^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, et tout vecteur de D_0 est ν-borné. Il suffit donc de vérifier que, pour $\zeta \in D_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $(d\nu/d\psi)^\lambda \zeta$ est ν-borné. Pour cela, on fixe η dans D, γ dans $\mathbb{R}_+^*$, y dans $\mathscr{U}_0$ et on calcule :

$$
\begin{aligned}
y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta_\gamma &= \sqrt{\gamma\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda+it} \eta \, dt \\
&= \sqrt{\gamma\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(t+i\lambda)^2} y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} \eta \, dt \\
&= \sqrt{\gamma\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(t+i\lambda)^2} R^\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} \eta\right) \Lambda_\nu(y) \, dt;
\end{aligned}
$$

soit, puisque

$$
\left\| R^\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} \eta\right) \right\| = \| R^\nu(\eta) \|,
$$

$$
\left\| y\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta_\gamma \right\| \leq \| \mathrm{R}^\nu(\eta) \| \quad \| \Lambda_\nu(y) \| e^{\gamma(\mathrm{Im}\,\lambda)^2}.
$$

C.Q.F.D.

2.3. Proposition. — (*a*). Soit λ un nombre complexe. L'opérateur linéaire T_λ défini sur le produit tensoriel algébrique

$$
\mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^{\lambda}\right) \odot \mathscr{D}_\nu\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right) \subset H \odot D(K, \nu),
$$

par

$$
T_\lambda(\xi \odot \eta) = \left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^{\lambda} \xi \odot \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta,
$$

passe au quotient et définit un opérateur fermable $\tilde{T}_\lambda$ dans $H \otimes_\nu K$.

(*b*) *Si on note*

$$
\left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}
$$

la fermeture dans $H \otimes_\nu K$ de l'opérateur $\tilde{T}_\lambda$, on a l'équation entre opérateurs fermés de $H \otimes_\nu K$:

$$
\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda}.
$$

Démonstration. — (*a*) Soient

$$\xi,\ \xi' \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta,\ \eta' \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right).$$

On calcule, dans $H \otimes_{\nu} K$, en appliquant 1.6*c* et 1.6*a* :

$$\left(\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta \,\middle|\, \xi' \otimes_{\nu} \eta'\right)$$

$$= \left(\left[\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \xi\right] \left\langle \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta,\ \eta' \right\rangle_{\nu} \,\middle|\, \xi'\right)$$

$$= \left(\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \left[\xi \sigma^{\nu}_{i\lambda}\left(\left\langle \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta,\ \eta' \right\rangle_{\nu}\right)\right] \,\middle|\, \xi'\right)$$

$$= \left(\xi \left\langle \eta,\ \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\bar{\lambda}} \eta' \right\rangle_{\nu} \,\middle|\, \left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\bar{\lambda}} \xi'\right)$$

$$= \left(\xi \otimes_{\nu} \eta \,\middle|\, \left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\bar{\lambda}} \xi' \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\bar{\lambda}} \eta'\right).$$

Le calcul prouve, d'une part que T_{λ} passe au quotient, puisque si on a $\sum_i \xi_i \otimes_{\nu} \eta_i = 0$, on a encore

$$\sum_i \left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \xi_i \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \eta_i = 0;$$

d'autre part que l'opérateur $\tilde{T}_{\lambda}$ obtenu par passage au quotient est fermable, puisque son adjoint contient $\tilde{T}_{\bar{\lambda}}$.

(*b*) Le groupe à un paramètre d'unitaire de $H \otimes_{\nu} K$,

$$\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} ;\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

implémente les groupes d'automorphismes

$$\{\sigma^{\varphi}_t,\ t \in \mathbb{R}\} \ \text{ sur } \mathscr{L}_{N^{\mathrm{o}}}(H) \otimes_{\nu} \mathbb{C}_K; \qquad \{\sigma^{\psi}_{-t},\ t \in \mathbb{R}\} \ \text{ sur } \mathbb{C}_H \otimes_{\nu} \mathscr{L}_N(K).$$

On obtient ainsi l'existence d'un opérateur positif non singulier, h, affilié au centre de N (identifié au centre de $\mathscr{L}_{N^{\mathrm{o}}}(H) \otimes_{\nu} \mathbb{C}_K$ et de $\mathbb{C}_H \otimes_{\nu} \mathscr{L}_N(K)$), tel que l'on ait

$$\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} = h^{it} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par prolongement analytique, on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \subset h^{\lambda} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

On va d'abord montrer que l'on a

$$\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi} \otimes_{\nu} \frac{d\psi}{d\nu} \subset \frac{d\psi}{d\varphi},$$

l'inclusion étant prise au sens des formes quadratiques, ce qui impliquera que h est isométrique, donc que $h \equiv 1$.

2.4. LEMME. — *On a*

$$\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2} \subset \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. — On fixe

$$\xi \in \mathscr{D}\left(\frac{d\mathring{\nu}}{d\varphi}\right) \cap D(H, \varphi) \qquad \text{et} \qquad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{1/2}\right).$$

On va calculer

$$\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) = R^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta) R^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta)^* \qquad (cf.\ [1]).$$

On note δ_{η} l'opérateur continu

$$H \ni \xi_1 \to \xi_1 \otimes_{\nu} \eta \in H \otimes_{\nu} K.$$

On a alors, pour $\xi_1 \in H$, $\eta_1 \in D(K, \nu)$

$$\delta_{\eta}^*(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1) = \xi_1 \langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu}.$$

Pour $x \in \mathscr{L}_{N^0}(H)$, on a $x\xi \otimes_{\nu} \eta = \delta_{\eta} R^{\varphi}(\xi) \Lambda_{\varphi}(x)$: $\xi \otimes_{\nu} \eta$ est φ-borné et on a

$$\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) = \delta_{\eta} \theta^{\varphi}(\xi, \xi) \delta_{\eta}^*.$$

D'après le lemme 1.7 de [5] et 1.6 (c), $\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0$ est dans le domaine de $\sigma^{\nu}_{-i/2}$, et si l'on choisit η_1 dans $\mathscr{D}_{\nu}((d\nu/d\psi)^{1/2})$, $\langle \eta, \eta_1 \rangle_{\nu}$ est également dans le domaine de $\sigma^{\nu}_{-i/2}$. On calcule, pour ξ_1 dans K :

$$\begin{aligned}\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta)(\xi_1 \otimes_{\nu} \eta_1) &= \xi_1 \langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 \otimes_{\nu} \eta \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} \sigma^{\nu}_{-i/2}(\langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} R^{\nu}(\eta) \Delta_{\nu}^{1/2} \Lambda_{\nu}(\langle \eta_1, \eta \rangle_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0) \\ &= \xi_1 \otimes_{\nu} R^{\nu}(\eta) J_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 J_{\nu} R^{\nu}(\eta)^* \eta_1,\end{aligned}$$

d'après [5] 1.3 et 1.5; d'où l'égalité, dans $\mathscr{L}_N(K)$:

$$\begin{aligned}\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta) &= R^{\nu}(\eta) J_{\nu} \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 J_{\nu} R^{\nu}(\eta)^* \\ &= \theta^{\nu}(\eta, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta).\end{aligned}$$

On calcule alors pour

$$\xi \in \mathscr{D}\left(\frac{d\dot{\nu}}{d\varphi}\right) \cap D(H, \varphi) \qquad \text{et} \qquad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{1/2}\right) \cap \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\right):$$

$$\begin{aligned}\left\| \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^{1/2} (\xi \otimes_{\nu} \eta) \right\|^2 &= \psi(\theta^{\varphi}(\xi \otimes_{\nu} \eta, \xi \otimes_{\nu} \eta)) \\ &= \psi(\theta^{\nu}(\eta, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta)) \\ &= \left(\frac{d\psi}{d\nu}\eta \,\middle|\, \sigma^{\nu}_{-i/2}(\theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0)\eta\right) \\ &= \left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta \,\middle|\, \theta^{\varphi}(\xi, \xi)^0 \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta\right) \quad \text{d'après 1.6 } (a) \\ &= \left(\left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta \,\middle|\, \left\langle \left(\frac{d\dot{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi, \left(\frac{d\dot{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2}\xi \right\rangle_{\nu}^{\circ} \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\eta\right) \\ &= \left\| \left(\left(\frac{d\dot{\nu}}{d\varphi}\right)^{1/2} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\psi}{d\nu}\right)^{1/2}\right)(\xi \otimes_{\nu} \eta) \right\|^2 \quad \text{d'après [5], 1.7.}\end{aligned}$$

D'où l'inclusion cherchée et l'équation $h \equiv 1$.

Fin de la démonstration de la proposition 2.3.

On sait maintenant que l'on a

$$\left(\frac{d\varphi}{d\dot{\nu}}\right)^{it} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it} = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it} \quad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbb{R},$$

et

$$\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda} \subset \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda} \quad \text{pour tous } \lambda \text{ de } \mathbb{C}.$$

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et démontrons l'inclusion inverse.

Pour $\zeta \in H \otimes_{\nu} K$, $\gamma \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, on pose

$$\zeta_{\gamma} = \sqrt{\gamma\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it} \zeta \, dt.$$

On remarquera d'abord que, pour

$$\zeta = \xi \otimes_{\nu} \eta, \qquad \xi \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right),$$

ζ_{γ} est limite de combinaisons linéaires

$$\textstyle\sum_j \alpha_j \left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{it_j} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{it_j} \eta,$$

de sorte que $(d\varphi/d\psi)(\zeta_{\gamma})$, qui est égal à $((d\varphi/d\psi)^{\lambda})\zeta)_{\gamma}$, soit la limite des

$$\sum \alpha_j \left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{it_j+\lambda} \xi \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{it_j+\lambda} \eta;$$

ce qui signifie que ζ_{γ} est encore dans le domaine de

$$\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda} \otimes_{\nu} \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}.$$

Si ζ est quelconque dans le domaine de $(d\varphi/d\psi)^{\lambda}$, et si on fixe ε, on aura d'abord, pour γ suffisamment grand :

$$\|\zeta - \zeta_{\gamma}\| + \left\|\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^{\lambda} (\zeta - \zeta_{\gamma})\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ensuite, pour

$$\zeta' = \textstyle\sum_j \xi_j \otimes_{\nu} \eta_j, \qquad \left(\xi_j \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{d\varphi}{d\overset{\circ}{\nu}}\right)^{\lambda}\right), \qquad \eta_j \in \mathscr{D}_{\nu}\left(\left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^{\lambda}\right),\right.$$

suffisamment proche de ζ, au aura

$$\|\zeta_\gamma-\zeta'_\gamma\| + \left\|\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^\lambda(\zeta'_\gamma-\zeta_\gamma)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, ζ'_γ est dans le domaine de

$$\left(\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\right)^\lambda \otimes_\nu \left(\frac{d\nu}{d\psi}\right)^\lambda,$$

d'où le résultat. ■

3. Conclusion

Ce que nous avons obtenu avec la proposition 2.3 est d'abord une relation de chaîne pour les dérivées de Radon-Nikodym spatiales :

3.1. Théorème de Radon-Nikodym spatial

Soient M, N et P trois algèbres de von Neumann, φ, ν et ψ trois poids n. s. f. f. sur M, N et P respectivement.

Soit H un $M-N$ bimodule et K un $N-P$ bimodule tels que l'on ait

$$M=\mathscr{L}_{N^0}(H) \qquad \text{et} \qquad N=\mathscr{L}_{P^0}(K).$$

Alors les dérivées spatiales satisfont l'équation entre opérateurs non bornés de $H\otimes_\nu K$:

$$\frac{d\varphi}{d\psi^0}=\frac{d\varphi}{d\mathring{\nu}}\otimes_\nu\frac{d\nu}{d\psi^0}.$$

On obtient ensuite l'isomorphisme canonique des espaces L^p spatiaux : soient H_1 et H_2 deux M-modules à gauche fidèles, ψ_1 et ψ_2 deux poids n. s. f. f. sur $\mathscr{L}_M(H_1)$ et $\mathscr{L}_M(\mathrm{H}_2)$ respectivement. Notons N l'algèbre opposée de $\mathscr{L}_M(H_1)$, et ψ_1^0 le poids sur N correspondant à ψ_1. D'après [5] 3.4, il existe un $N-\mathscr{L}_M(H_2)^0$ bimodule K essentiellement unique, tel que l'on ait $H_2=H_1\otimes_{\psi_1^0}K$; on remarquera que $\mathscr{L}_N(K)$ est l'image de $\mathscr{L}_M(H_2)$ dans $\mathscr{L}(K)$, de sorte que $d\psi_1^0/d\psi_2$ existe comme opérateur positif autoadjoint de K.

On remarquera ensuite que, pour $\lambda>0$, la proposition 2.3 reste vraie lorsqu'on supprime l'hypothèse de fidélité sur le poids φ, donc en particulier lorsque φ est une forme linéaire positive normale sur M; et que la partie isométrique d'un opérateur de $L^p(\psi_1)$ appartient à M, et respecte donc la structure de N-module à droite de H_2. D'où le corollaire :

3.2. COROLLAIRE (Isomorphisme spatial des espaces L^p). — *Soient M, H_1, H_2, ψ_1, ψ_2, N, ψ_1^0 et K définis comme ci-dessus. Soit p un nombre réel strictement positif.*

(*a*) *Si T est un opérateur dans $L^p(\psi_1)$, l'opérateur $T\otimes(d\psi_1^0/d\psi_2)^{1/p}$ défini sur le produit tensoriel algébrique*

$$\mathscr{D}(T)\odot\mathscr{D}_{\psi_1^0}\left(\left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}\right)$$

se prolonge, par passage au quotient et fermeture, en un opérateur fermé

$$T\otimes_{\psi_1^0}\left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}$$

de $H_2=H_1\otimes_{\psi_1^0}K$ qui appartient à $L^p(\psi_2)$.

(*b*) *L'ampliation relative*

$$L^p(\psi_1)\ni T\to T\otimes_{\psi_1^0}\left(\frac{d\psi_1^0}{d\psi_2}\right)^{1/p}\in L^p(\psi_2)$$

est l'isomorphisme de $L^p(\psi_1)$ sur $L^p(\psi_2)$ qui, à l'élément générique $u(d\varphi/d\psi_1)^{1/p}$ $(u\in M,\ \varphi\in M_*^+,\ u^*u=\operatorname{supp}\varphi)$ de $L^p(\psi_1)$ associe $u(d\varphi/d\psi_2)^{1/p}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNES (A.), On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. F. A.*, vol. 35/2, 1980, p. 153-164.

[2] CONNES (A.). — Notes manuscrites, 1980.

[3] HAAGERUP U. — *L^p-spaces associated with a von Neumann algebra*, Preprint, Odense Universiteit, Denmark.

[4] HILSUM (M.). — Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann, *J.F.A.*, vol. 40/2, 1981, p. 151-169.

[5] SAUVAGEOT (J.-L.). — Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J.O.T.*, vol. 9, 1983, p. 237-252.