BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL COGNET

Représentation de Weil et changement de base quadratique

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 403-457

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__403_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 403-457.

REPRÉSENTATION DE WEIL ET CHANGEMENT DE BASE QUADRATIQUE

PAR

MICHEL COGNET (*)

RÉSUMÉ. — Soit F' une extension quadratique d'un corps local non archimédien F de caractéristique différente de deux. Le changement de base de Langlands associe, à une représentation admissible irréductible de $GL_2(F)$, une représentation de $GL_2(F')$. D'autre part, la conjecture de Howe suggère qu'en décomposant une représentation de Weil sur un espace de dimension 4 sur F on établira une correspondance de $GL_2(F)$ sur $GL_2(F')$. On montre que ces deux correspondances coïncident, en donnant une méthode explicite pour décomposer la représentation de Weil.

ABSTRACT. — Let F' be a quadratic extension of a non archimedean local field F of characteristic different to two. The base change of Langlands gives a correspondance between the set of irreducible admissible representations of $GL_2(F)$ and a set of irreducible representations of $GL_2(F')$. The Howe's conjecture gives a correspondance between representations of $GL_2(F)$ and representations of $GL_2(F')$ when we decompose the Weil representation on a vector space of dimension four on F. This article proves that these correspondances are the same and the method gives an explicit construction of the base change of Langlands.

1. Le cas non archimédien

	Page
Introduction	404
Notations et généralités	405
Préliminaires	409
Le cas de la série principale et de la série spéciale	413
Le cas des représentations cuspidales	431
Correspondance de Langlands entre $GL_2(F)$ et $GL_2(F')$	448
Références bibliographiques	456

(*) Texte reçu le 22 janvier 1985, révisé le 15 mai 1985.

M. COGNET, E.N.S.J.F., Mathématiques et informatique, 1, rue M.-Arnoux, 92120 Montrouge.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/04 403 55/$ 7.50

Introduction

Ce travail propose d'établir une construction de la correspondance de Langlands entre l'ensemble des représentations algébriques irréductibles de $GL_2(F)$ (où F désigne un corps local non archimédien de caractérisrique différente de 2) et celles de $GL_2(F')$ (où F' désignera une extension quadratique de F) qui sont équivalentes à leurs transformées par le groupe Galois de F' sur F (*cf.* [9]). Langlands — dans [9] —a en effet étudié un tel changement de base dont il a montré l'existence et l'unicité en passant par l'adélisation du problème et en utilisant la formule des traces. Or, on connaît au moins un autre moyen pour étudier des correspondances entre les représentations irréductibles de deux groupes qui forment une paire réductive duale : les relèvements via les séries thêta définies à partir de la représentation de Weil. Ainsi Piatetski-Shapiro a étudié la paire (GSP_4, SO_3) (*cf.* [11]) et Waldspurger la paire (SL_2, SO_3) (*cf.* [12]).

C'est ainsi que, dans ce travail, on veut étudier la paire $GL_2(F)$, $GL_2(F')$) qui n'est pas duale, mais qui est issue de la paire ($GL_2(F)$, $GO(q)$) (où q est une forme quadratique en quatre variables) qui, elle, est réductive duale. Friedberg — dans [2], page 17 — a utilisé, dans le cas archimédien, le même espace de matrices et la même forme quadratique pour construire la représentation de Weil.

Les trois premiers paragraphes établissent une correspondance entre représentations de $GL_2(F)$ et représentations de $GL_2(F')$ en donnant l'image de chaque représentation de $GL_2(F)$. L'obligation de séparer le cas cuspidal du cas non cuspidal provient de ce que, dans le premier cas, si les problèmes de convergence d'intégrales sont assez simples à traiter, on ne connaît pas de classification simple des représentations cuspidales, et que, dans le second cas, à l'inverse, si on connaît une description utilisable des représentations irréductibles (*cf.* [8]), on a quelques problèmes d'intégration des fonctions du modèle de Kirillov (*cf.* le lemme 9 qui n'est démontré que dans le cas cuspidal à cause des calculs d'intégration).

Le quatrième paragraphe montre que la correspondance étudiée est en fait la correspondance de Langlands. Et ceci par des moyens purement locaux. La difficulté de ce paragraphe était d'établir que, pour π représentation cuspidale de $GL_2(F)$ donnée dont π' désigne la représentation de $GL_2(F')$ image par la correspondance étudiée, si π' est cuspidale, alors π' est effectivement l'image de π par le changement de base de Langlands. On a utilisé, pour traiter ce cas, la théorie des facteurs ε du produit de deux représentations (*cf.* Jacquet dans [6]). On a suivi la méthode de [6];

notamment en considérant les intégrales qui permettent de définir les facteurs ε et qui lient étroitement les fonctions des modèles de Whittaker les deux représentations (*cf.* page 12 de [6]).

Je voudrais aussi remercier Jean-Lou Waldspurger et Marie-France Vigneras pour leurs nombreux conseils et suggestions ainsi que pour l'atmosphère propice au travail qu'ils ont su créer et sans laquelle ce travail n'aurait pas vu le jour sous cette forme.

Notations et généralités

F désignera un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2. On notera parfois G le groupe $GL_2(F)$.

Soit F' une extension quadratique de F et soit ξ un élément de F qui n'est pas un carré dans F et tel que F' est l'extension $F(\sqrt{\xi})$ (où $\sqrt{\xi}$ désigne une racine carrée de ξ).

On considère alors la forme quadratique en les quatre variables :

$$q(x, y, z, t)=xy+z^2-\xi t^2 \qquad \text{pour} \quad x, y, z \quad \text{et} \quad t,$$

dans F.

Elle peut être considérée comme définie sur l'espace E des matrices A dans $M_2(F')$ vérifiant $\bar{A}^t=A$, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} y & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}$, où x et y décrivent F, b décrit F' et où $\bar{b}$ désigne le conjugué de b dans F'. La forme q est définie par :

$$q(x, y, z, z)=-\det\left[\begin{pmatrix} y & z-\sqrt{\xi}\,t \\ z+\sqrt{\xi}\,t & -x \end{pmatrix}\right].$$

Soit $GO(q)$ le groupe des similitudes de l'espace quadratique (E, q). L'application :

$$GL_2(F') \to GO(q),$$
$$g_1 \mapsto \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto g_1 M \bar{g}_1^t \end{cases}$$

(où $\bar{g}_1^t$ désigne la transconjuguée dans $GL_2(F')$ de la matrice g_1) définit un homomorphisme de groupe dont le noyau est l'ensemble des matrices diagonales de $GL_2(F')$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a\bar{a}$ égal à 1.

Remarque. — On peut en fair montrer que l'application :

$$GL_2(F') \times F^* \to GO(q),$$

$$(g_1, u) \mapsto \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto \left(\frac{u \quad 0}{0 \quad u}\right) g_1 M \bar{g} \end{cases}$$

est de noyau égal à l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a\bar{a})^{-1}, a \in F^{1*} \right\}$, a un conoyau d'ordre deux et a pour l'image l'ensemble des similitudes dont le déterminant est égal au carré de leur rapport. $GO(q)$ est ainsi engendré par l'image de $GL_2(F') \times F^*$ et la transposition de rapport 1 et de déterminant -1.

On déduit de ce qui précède une représentation R de $GL_2(F')$ sur $\mathcal{S}(E \times F^*)$, espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $E \times F^*$:

Quels que soient g_1 appartenant à $Gl_2(F')$, f à $\mathcal{S}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}^*)$ et (x, u) à $E \times F^*$,

$$R(g_1) f(x, u) = f(g_1^{-1} . x (\bar{g}_1)^{-1}, \det g_1 \overline{\det g_1} . u).$$

On définit aussi la représentation de Weil r_ψ (*cf.* [14]) de $GL_2(F)$ sur $\mathcal{S}(E \times F^*)$, liée à un caractère additif continu non trivial ψ_F de F et à la forme quadratique q :

Quels que soient les éléments b de F et a de F^*,

$$r_\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f(x, u) = \psi_F(buq(x)) f(x, u).$$

On a :

$$r_\psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} f(x, u) = (a, \xi) |a|_F^2 f(ax, u),$$

où (a, ξ) est le symbole des restes normiques de a de l'extension F' sur F.

$$r_\psi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f(x, u) = \gamma_q(u) \int_E f(y, u) \psi_F(uq(x, y)) |u|_F^2 dy.$$

(où $|\ |_F$ désigne le module de F, dy la mesure autoduale sur E où $q(x, y)$ est égal à

$$q(x+y) - q(x) - q(y) \qquad \text{et} \qquad \gamma_q(u)$$

est le facteur de Weil de la forme quadratique uq pour le caractère additif ψ_F (défini dans [14])).

Remarques. — 1. Le facteur $\gamma_q(1)$ *est égal au facteur de Weil* $\gamma_{q_1}(1)$ où q_1 est la forme quadratique définie sur F^2 et égale à la norme $N_{F'/F}$: $(z, t) \mapsto z^2 - \xi t^2$.

2. Pour tout f de $\mathcal{S}(E \times F^*)$, on définit sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ par rapport à y qui appartient à $\mathcal{S}(F^2 \times F' \times F^*)$:

$$\forall (x, y, b, u) \in F^2 \times F' \times F^*,$$

$$\tilde{f}(x, y, b, u) = \int_F f\left(\begin{pmatrix} v & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u\right) \psi_F(vuy) |u|_F^{1/2} dv.$$

(où dv est la mesure autoduale pour ψ_F).

L'homomorphisme de $\mathcal{S}(E \times F^*)$ dans $\mathcal{S}(F^2 \times F' \times F^*)$ qui à f associe $\tilde{f}$ est un isomorphisme. On définit $\tilde{R}$ (resp. $\tilde{r}_\psi$) représentation de $GL_2(F')$ (resp. $GL_2(F)$) sur $\mathcal{S}(F^2 \times F' \times F^*)$ par :

Quels que soient g dans $GL_2(F)$, g_1 dans $GL_2(F')$, f dans $\mathcal{S}(F^2 \times F' \times F^*)$, si h est la fonction dont f est la transformée de Fourier :

$$\tilde{r}_\psi(g) \tilde{R}(g_1) f = \widetilde{r_\psi(g) R(g_1) h}.$$

Soit $\psi_{F'}$ le caractère de F' égal à $\psi_F \circ \mathrm{Tr}_{F'/F}$ (où $\mathrm{Tr}_{F'/F}(b)$ est égal à $b + \bar{b}$ quel que soit b dans F') et soit $|\ |_{F'}$ le module de F' égal à $|N_{F'/F}(\ )|_F$. Soit w la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit ρ_ψ la représentation de Weil de $GL_2(F)$ sur l'espace $\mathcal{S}(F' \times F^*)$ relative au caractère ψ_F et à la forme quadratique $N_{F'/F}$.

On a les relations :

(R$_1$) $$\tilde{R}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}(x, y, b, u) = |a|_{F'}^{1/2} \tilde{f}(x, y, b\bar{a}^{-1}, ua\bar{a}).$$

(R$_2$) $$\tilde{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}(x, y, b, u) = \psi_{F'}(uynb) \psi_F(n\bar{n}yxu) \tilde{f}(x, y, b + \bar{n}x, u).$$

(R$_3$) $\tilde{R}(w) \tilde{f}(x, y, b, u)$

$$= \int_{F^2} \tilde{f}(x', y', -\bar{b}, u) \psi_F(u(y'x - yx')) |u|_F dx |dy|.$$

(R_4) Soit f dans $\mathscr{S}(E\times F')$ telle que :

$$\tilde{f}(x, y, b, u)=f_1(x, y)\, f_2(b, u),$$

avec f_1 dans $\mathscr{S}(F^2)$ et f_2 dans $\mathscr{S}(F'\times F^*)$. Quel que soit g dans $GL_2(F)$:

$$\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{f}(x, y, b, u)=f_1((x, y)g)\,(\rho_\psi(g)\, f_2)(b, u).$$

Cette relation découle de l'équivalence connue entre la représentation de Weil de $GL_2(F)$ sur $\mathscr{S}(F^2)$ associée à la forme quadratique xy et la représentation de translation à droite de $GL_2(F)$ sur $\mathscr{S}(F^2)$.

$$(R_5)\quad \tilde{r}_\psi\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tilde{R}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tilde{f}(x, y, b, u)$$
$$=\psi F(m\bar{m}yxu)\,\psi_{F'}(uymb)\,\psi_F(nu(xy+b\bar{b}$$
$$+bmx+\bar{b}\bar{m}x+m\bar{m}x^2))\,\tilde{f}(x, y, b+\bar{m}x, u).$$

Ainsi, la fonction $g\mapsto\tilde{r}_\psi(g)(f(0, 1, 1, 1)$ de $GL_2(F)$ dans $\mathbb{C}$ (resp. $g_1\mapsto\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0, 1, 1, 1)$ de $GL_2(F')$ dans $\mathbb{C}$) est une fonction de Whittaker pour le caractère ψ_F (resp. pour le caractère $\psi_{F'}$).

Notations standard utilisées dans les paragraphes suivants :

(1) R (resp. R') désigne l'anneau de la valuation normalisée v de F (resp. de la valuation de F'). R^* (resp. R'^*) en est le groupe des éléments inversibles. Le symbole ω (resp. ω') désignera une uniformisante de F (resp. de F').

(2) dx est une mesure de Haar additive de F (resp. de F'), d_x^* est la mesure de Haar multiplicative $dx/|x|_F$ de F^* (resp. $dx/|x|_{F'}$ de F'^*).

(3) On utilisera le triplet (π, H, E') pour désigner une représentation du groupe H sur l'espace vectoriel complexe E'. Le mot « représentation » signifiera toujours « représentation algébrique » (ou encore « lisse » selon une autre terminologie).

(4) On notera K le groupe compact maximal $GL_2(R)$ de $GL_2(F)$, B le groupe des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(F)$ et N le groupe unipotent des matrices de la forme $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec n décrivant F. Z sera le centre de $GL_2(F)$.

(5) $\chi_{F'/F}$ est le caractère de F^* qui associe à tout élément a de F son symbole des restes normiques (a, ξ).

(6) Pour tout ensemble A on notera 1_A la fonction caractéristique de A.

Préliminaires

Soit ψ_F^- le caractère tel que $\psi_F^-(x)=\psi_F(-x)$ quel que soit x dans F.

Soit π une représentation irréductible de dimension infinie de $GL_2(F)$, réalisée dans son modèle de Whittaker $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ relatif au caractère continu non trivial ψ_F^-.

Pour f appartenant à $\mathscr{S}(E\times F^*)$, W à $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ et g_1 à $GL_2(F')$, on définit la fonction (*cf.* [13], p. 24, lemme 2 ii et [12], p. 87).

$$B_{f,W}^{g_1}:\quad GL_2(F)\to\mathbb{C},$$
$$g\mapsto W(g)\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0,\,1,\,1,\,1).$$

D'après la relation (R_5), la fonction $B_{f,W}^{g_1}$ a les deux propriétés :

(1) Pour $m\in F'$ et pour $g\in GL_2(F)$,

$$*\qquad B_{f,W}^{\left(\begin{smallmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g_1}(g)=\psi_{F'}(m)\,B_{f,W}^{g_1}(g).$$

(2) La fonction $B_{f,W}^{g_1}$ est invariante par translation à droite par n'importe quel élément de N et peut être considérée comme fonction sur $N\backslash G$.

LEMME 1. — *Quels que soient $f\in\mathscr{S}(E\times F^*)$ et $W\in\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$, quel que soit $g_1\in GL_2(F')$, la fonction $B_{f,W}^{g_1}$ est intégrable sur $N\backslash G$.*

Démonstration. — La fonction $B_{f,W}^{g_1}$ est localement constante car W l'est et car $\tilde{r}_\psi$ est algébrique.

Montrons que la fonction h : $g\mapsto\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0,\,1,\,1,\,1)$ est à support compact dans $N\backslash G$, ce qui démontre le lemme. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, on peut écrire $g=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}k$ avec α et β dans F^* et k dans K.

On a :

$$h(g)=\tilde{r}_\psi(k)\,\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0,\,\beta,\,\alpha,\,1/\alpha\beta)(\alpha,\,\xi)\,|\alpha.\beta^{-1}|_F^{1/2}.$$

Cette fonction de α et de β est à support compact dans F^{*2} car $\tilde{R}(g_1)\tilde{f}$ est dans $\mathcal{S}(F^2 \times F' \times F^*)$. $\square$

Soit la fonction

$$A_{f, W}: \quad GL_2(F') \to \mathbb{C},$$
$$g_1 \mapsto \int_{N \backslash G} B^{g_1}_{f, W}(g)\, dg.$$

On définit l'espace

$$\mathcal{B} = \{ A_{f, W}, f \in \mathcal{S}(E \times F^*), W \in \mathcal{W}^{\psi -}_{\pi} \}.$$

Il est stable par translation à droite. Soit π' la représentation de $GL_2(F')$ sur $\mathcal{B}$, action de translation à droite de $GL_2(F')$. D'après la relation $(*)$, $\mathcal{B}$ est un modèle de Whittaker de π' relatif au caractère additif $\psi_{F'}$.

Soit f un élément de $\mathcal{S}(E \times F^*)$ et W un élément de $\mathcal{W}^{\psi -}_{\pi}$. Soit $K_{f, W}$ la fonction de F'^* définie par :

$$K_{f, W}(a) = A_{f, W}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

et soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions $K_{f, W}$ pour f décrivant $\mathcal{S}(E \times F^*)$ et W décrivant $\mathcal{W}^{\psi -}_{\pi}$.

LEMME 2. — *Pour f dans $\mathcal{S}(E \times F^*)$ et W dans $\mathcal{W}^{\psi -}_{\pi}$, il existe un entier relatif n tel que :*

$$\textit{si} \quad v(b\bar{b}) \leqq n, \quad \textit{alors } K_{f, W}(b) \textit{ est nul.}$$

Démonstration. — On a l'égalité :

$$K_{f, W}(b) = |b\bar{b}|_F^{1/2} \int_{F^* \times F^* \times K} W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} k\right)(\alpha, \xi) |\beta . \alpha^{-1}|_F^{1/2}$$
$$\times \tilde{r}_{\psi}(k) \tilde{f}\left(0, \beta, \alpha . \bar{b}^{-1}, \frac{b\bar{b}}{\alpha\beta}\right) d^*_{\alpha}\, d^* \beta\, dk.$$

Comme K est compact, on se ramène à une somme finie d'intégrales de la forme :

$$|b\bar{b}|_F^{1/2} \int_{F^* \times F^*} W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \times (\alpha, \xi) |\beta . \alpha^{-1}|_F^{1/2} \tilde{f}\left(0, \beta, \alpha . \bar{b}^{-1}, \frac{b\bar{b}}{\alpha\beta}\right) d^* \alpha\, d^* \beta.$$

La fonction $\bar{f}$ est à support compact dans $F^2 \times F' \times F^*$. Il existe donc quatre constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 telles que la fonction intégrée est non nulle seulement si :

(1) $$v(\beta) \geqq c_1.$$

(2) $$2v(\alpha) - v(b\bar{b}) \geqq c_2.$$

(3) $$c_3 \leqq v(b\bar{b}) - v(\alpha) - v(\beta) \leqq c_4,$$

ce qui impose :

$$v(b\bar{b}) \geqq 2c_3 + c_2 + 2c_1.$$

PROPOSITION 1. — *L'espace $\mathscr{B}$ n'est pas l'espace nul.*

Démonstration. — On va chercher f et W telles que $A_{f,\,W}(\mathrm{Id})$ est différent de 0. On aura aussi démontré que l'espace $\mathscr{C}$ n'est pas l'espace nul.

Soit f dans $\mathscr{S}(E \times F^*)$ telle que $\bar{f}$ est le produit de deux fonctions f_1 et f_2 dans $\mathscr{S}(F^2)$ et $\mathscr{S}(F' \times F^*)$. On a :

$$A_{f,\,W}(\mathrm{Id}) = \int_K \left(\int_{N \setminus B} W(bk)\, f_1((0,1)\, bk)(\rho_\psi(bk)\, f_2)(1,\ 1)\, db \right) dk.$$

Désignons par $F_{f_1,\,f_2,\,W}(k)$ l'intégrale intérieure.

Premier choix de fonction. — On va faire en sorte que $F_{f_1,\,f_2,\,W}$ dépende le moins possible de la variable k.

Soit $f_1(x, y) = 1_{\omega^n R}(x)\, 1_{1+\omega^n R}(y)$ avec n entier naturel non nul à fixer ultérieurement.

En écrivant $k = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, il est clair que $F_{f_1,\,f_2,\,W}(k)$ est non nul seulement si :

(1) C appartient à $\omega^n R$.

(2) D appartient à R^*.

Soit alors K' l'ensemble

$$\left\{ k \in K,\ k = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ C \in \omega^n R,\ D \in R^* \right\}.$$

Soit N_n le sous-groupe de congruence $\begin{pmatrix} 1+\omega^n R & \omega^n R \\ \omega^n R & 1+\omega^n R \end{pmatrix}$. On a :

$$K' = (B \cap K) . N_n.$$

En écrivant l'élément k de K' sous la forme $b_k u_k$ avec b_k dans $B \cap K$ et u_k dans N_n, on obtient que :

(1) si $k \in K'$, $F_{f_1, f_2, W}(k) = F_{f_1, f_2, W}(u_k)$.

(2) si $k \notin K'$, $F_{f_1, f_2, W}(k) = 0$.

Deuxième choix. — Soit $b = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dans B.

$$(\rho_\psi(b) f_2)(1, 1) = \psi_F(cd^{-1})(a, \xi) |a|_F |ad|_F^{-1/2} f_2(a, 1/ad).$$

Choisissons

$$f_2(b, u) = \mathbf{1}_{(1+\omega^\alpha R)+\sqrt{\xi} R}(b) \mathbf{1}_{R^*}(u)$$

avec α suffisamment grand pour que $\chi_{F'/F}$ soit trivial sur $1+\omega^\alpha R$.

Soit W la fonction de $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ telle que :

$$W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{1}_{R^*}(a).$$

Avec ces deux choix de fonctions, on peut maintenant fixer n pour que W et f soient stables par N_n sous les actions de translation à droite et de ρ_ψ.

D'autre part, il est facile de voir que si x appartient à B, $f_1((0, 1) x u_k)$ est égal à $f_1((0,1) x)$.

Donc :

$$F_{f_1, f_2, W}(k) = \mathbf{1}_{K'}(k) \int_{N \backslash B} W(b) f_1((0,1) b) (\rho_\psi(b) f_2)(1,1) \, db,$$

c'est-à-dire :

$$F_{f_1, f_2, W}(k) = \mathbf{1}_{K'}(k) \int_{F^* \times F^*} \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)$$
$$\times \mathbf{1}_{R^*}(a) \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(a) |da^{-1}|_F^{1/2} d^* a \, d^* d$$

et on a l'égalité :

$$A_{f,\,W}(\mathrm{Id}) = (\mathrm{mes}(K')) \int_{F^* \times F^*} \mathbf{1}_{1+\varpi^n R}(d)\, \mathbf{1}_{1+\varpi^a R}(a)\, d^* a\, d^* d,$$

qui est non nul.

De cette proposition qui assure la non nullité de l'espace $\mathscr{C}$, on déduit en fait que $\mathscr{C}$ contient un ensemble suffisamment gros.

LEMME 3. — *L'espace $\mathscr{C}$ contient l'ensemble $\mathscr{S}(F'^*)$ des fonctions de Schwartz-Bruhat sur F'^*.*

C'est une adaptation de la preuve du lemme 2.9.1, page 41 de [8].

2. Le cas de la série principale et de la série spéciale

Soient μ_1 et μ_2 deux caractères de F^*. On notera $\rho(\mu_1, \mu_2)$ la série principale correspondante, représentation induite de la représentation τ du groupe B définie par :

$$\tau\left[\begin{pmatrix} a_1 & n \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right] = \mu_1(a_1)\,\mu_1(a_2) \qquad \text{pour} \quad a_1, a_2 \in F^* \quad \text{et} \quad n \in F.$$

On notera $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ la série spéciale (*cf.* (8), p. 104).

MODÈLE DE WHITTAKER DE π

Comme $\rho(\mu_1, \mu_2)$ (resp. σ (μ_1, μ_2)) est équivalente à $\rho(\mu_2, \mu_1)$ (resp. $\sigma(\mu_2, \mu_2)$), on peut se restreindre au cas où, quel que soit t dans F, $|\mu_1(t)\mu_2^{-1}(t)|$ est égal à $|t|_F^s$ avec s positif ou nul.

Soit φ un élément de $B(\mu_1, \mu_2)$ (*cf.* notations de [8]) et soit g un élément de $GL_2(F)$. Il existe un entier naturel m_0 tel que :

(1) $$\forall m \geq m_0,$$

$$\int_{\varpi^{-m}R} \varphi(w^{-1} ng)\, \psi_F(n)\, dn = \int_{\varpi^{-m_0}R} \varphi(w^{-1} ng)\, \psi_F(n)\, dn.$$

(dans cette égalité, on a confondu l'élément $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de N et l'élément n de F).

On pose alors :

$$\int_F \varphi(w^{-1}ng)\,\psi_F(n)\,dn = \lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\omega^{-m}R} \varphi(w^{-1}ng)\,\psi_F(n)\,dn\right).$$

En effet (*cf.* [God], paragraphe 1.9), si m est un entier non nul,

$$\int_{\omega^{-m}R} \varphi(w^{-1}ng)\,\psi_F(n)\,dn = \int_R \varphi(w^{-1}ng)\,\psi_F(n)\,dn$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{\omega^{-k}R^*} \varphi(w^{-1}ng)\,\psi_F(n)\,dn.$$

Quitte à changer φ en sa translatée à droite par g, on peut supposer que g est la matrice identité. On remarque successivement :

(a) φ est dans $B(\mu_1, \mu_2)$: il existe un entier naturel n_1 tel que, quel que soit g dans $GL_2(F)$,

$$\varphi\left(g\begin{pmatrix} 1+\omega^{n_1}R & \omega^{n_1}R \\ \omega^{n_1}R & 1+\omega^{n_1}R\end{pmatrix}\right)=\varphi(g).$$

(b) Il existe un entier n_2 tel que $\mu_1\mu_2^{-1}$ est trivial sur $1+\omega^{n_2}.R$.

(c) Il existe un entier n_3 tel que, si n est supérieur à n_3, on peut trouver u_n dans R^* tel que $\psi_F(\omega^{-n}u_n)$ est distinct de 1.

(d) $$w^{-1}n=\begin{pmatrix} n^{-1} & -1 \\ 0 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

Posons $\delta=\varphi(\mathrm{Id})$ et supposons que k est un entier supérieur à $3+2\sup(n_1, n_2, n_3)$ (pour que $(k-1)/2$ *soit supérieur à* $1+sup(n_1, n_2, n_3)$).

On a :

$$\int_{\omega^{-k}R^*} \varphi(w^{-1}n)\,\psi_F(n)\,dn$$

$$=(\mu_1\mu_2^{-1})(\omega^k).\,\delta\int_{R^*}(\mu_1\mu_2^{-1})(u^{-1})\,\psi_F(\omega^{-k}u)\,du^*.$$

Soit le changement de variable

$$u=v+\omega^{k/2}u_{k/2},$$

ou

$$u=v+\omega(k-1)/2\, u_{(k+1)/2}$$

et posons :

$$\lambda_k=\psi_F(\omega^{-k/2} u_{k/2}) \qquad \text{ou} \qquad \psi_F(\omega^{-(k+1)/2} u_{(k+1)/2}),$$

suivant que k est pair ou impair. On obtient l'égalité :

$$\int_{\omega^{-k}R^*} \varphi(w^{-1} n)\,\psi_F(n)\,dn=(\mu_1 \mu_2^{-1})(\omega^k)\,\delta\,.\,\lambda_k \times \int_{R^*} (\mu_1 \mu_2^{-1})(u^{-1})\,\psi_F(\omega^{-k} u)\,du^*.$$

Puisque λ_k est distinct de 1, cette expression est nulle.

Donc, on peut choisir m_0 égal à $3+2 \sup(n_1, n_2, n_3)$.

On définit l'ensemble :

$$D_\pi=\left\{g\mapsto\int_F \varphi(w^{-1} ng)\,.\,\psi_F(n)\,dn,\quad \varphi\in B(\mu_1, \mu_2) \text{ si } \pi=\rho(\mu_1, \mu_2)\quad \varphi\in B^S(\mu_1, \mu_2) \text{ si } \pi=\sigma(\mu_1, \mu_2)\right\}.$$

LEMME 4. — *L'espace D_π n'est pas nul et constitue le modèle de Whittaker relatif au caractère ψ_F^-.*

Il suffit d'adapter les résultats de [5], pages 1.27 et 1.28. □

Caractérisation de π'. — Pour mener les calculs sans problèmes (relatifs notamment à l'application du théorème de Fubini) et quitte à faire des prolongements analytiques pour avoir des égalités vraies quel que soit le nombre réel positif s, on introduit un facteur complexe supplémentaire.

Soit φ un élément de $B(\mu_1, \mu_2)$, soit x un nombre complexe.

Considérons la fonction φ^x :

$$GL_2(F)\to\mathbb{C},$$

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\mapsto|\alpha\beta^{-1}|_F^{x/2}-\varphi(g).$$

Elle est bien définie et appartient à l'espace $B(\mu_1||_F^{x/2}, \mu_2||_F^{-x/2})$ et coïncide avec φ sur K.

Considérons aussi les applications

$$W_\varphi^x : \quad GL_2(F) \to \mathbb{C},$$
$$g \mapsto \int_F \varphi^x(w^{-1} ng)\, \psi_F(n)\, dn$$

et

$$A_{f,\,W}^x : \quad GL_2(F') \to \mathbb{C},$$
$$g_1 \mapsto \int_{N\backslash G} W_\varphi^x(g)\, \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{R}(g_1)\, \tilde{f}(0,\ 1,\ 1,\ 1)\, dg.$$

Le lemme suivant est un lemme d'analyticité qui permettra de prolonger à tout nombre complexe x de partie réelle positive les résultats de la proposition 2.

LEMME 5. — *Soit φ un élément de $B(\mu_1, \mu_2)$, f dans $\mathscr{S}(E \times F^*)$ et g_1 dans $GL_2(F')$. L'application $x \mapsto A_{f,\,W}^x(g_1)$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Quitte à changer f, on peut supposer que g_1 est la matrice identité. On a l'égalité :

$$A_{f,\,W}^x(\mathrm{Id}) = \int_{F^* \times F^* \times K} W_\varphi^x\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} k\right) \tilde{r}_\psi(k)\, \tilde{f}(0,\ \beta,\ \alpha,\ 1/\alpha\beta)$$
$$|\beta_\alpha^{-1}|_F^{1/2}(\alpha,\ \xi)\, d^*\alpha\, [d^*\beta\, dk.$$

Puisque la fonction W_φ^x est K-finie à droite, il suffit d'établir l'analyticité sur $\mathbb{C}$ de la fonction $\delta_{f,\,W}$ définie sur $\mathbb{C}$:

$$\delta_{f,\,W}(x) = \int_{F^* \times F^*} W_\varphi^x\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \tilde{f}(0,\ \beta,\ \alpha,\ 1/\alpha\beta)$$
$$\times |\beta\alpha^{-1}|_F^{1/2}(\alpha,\ \xi)\, d^*\alpha\, d^*\beta.$$

On a : $$W_\varphi^x\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \int_F \varphi^x\left(w^{-1} n \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \psi_F(n)\, dn.$$

De l'égalité

$$w^{-1} n \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & n\beta\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et du changement de variable $n\beta\alpha^{-1}=r$, on déduit que :

$$W_\varphi^x\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)=I_1^x(\alpha,\beta)+I_2^x(\alpha,\beta),$$

avec :

$$I_1^x(\alpha,\beta)=\int_R \varphi^x\left(\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}w^{-1}r\right)|\beta^{-1}\alpha|_F\,\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.r)\,dr$$

et

$$I_2^x(\alpha,\beta)=\int_{F-R} \varphi^x\left(\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}w^{-1}r\right)|\beta^{-1}.\alpha|_F.\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.r)\,dr.$$

1. ÉTUDE DE $I_2^x(\alpha,\beta)$

On a l'égalité :

$$\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}w^{-1}r=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^{-1} & -1\\ 0 & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ r^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

Si r appartient à $F-R$, la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ r^{-1} & a\end{pmatrix}$ appartient à K et on a l'égalité :

$$I_2^x(\alpha,\beta)=|\beta\alpha^{-1}|_F^{(x-2)/2}\mu_1(\beta)\mu_2(\alpha)$$
$$\int_{F-R}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ r^{-1} & 1\end{pmatrix}\right)|r^{-1}|_F^{x+1}$$
$$x(\mu_1\mu_2^{-1})(r^{-1})\psi_F(\beta^{-1}.\alpha r)\,dr.$$

On considère alors les intégrales $J_k^{\alpha,\beta,x}$ égales à :

$$\int_{\omega^{-k}R^*}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ r^{-1} & 1\end{pmatrix}\right)|r^{-1}|_F^{x+1}(\mu_1\mu_2^{-1})(r^{-1})\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.r)\,dr.$$

On a :

$$J_k^{\alpha,\beta,x}=|\omega^K|_F^x(\mu_1\mu_2^{-1})(\omega^k)\int_{R^*}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \omega^k u^{-1} & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times(\mu_1\mu_2^{-1})(u^{-1})\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.\omega^{-k}u)\,d^*u.$$

Reprenons les notations utilisées pour montrer l'existence de $\int_F \varphi(w^{-1}n)\psi_F(n)\,dn$ (cf. page 12). Supposons que k soit tel que $(k-v(\beta^{-1}.\alpha)-1)/2$ est supérieur à $1+\sup(n_1, n_2, n_3)$ et posons, pour α et β fixés,

$$\alpha\beta^{-1}=\omega^{v(\alpha.\beta^{-1})}u_{\alpha,\beta} \qquad (\text{avec } u_{\alpha,\beta} \text{ dans } R^*).$$

Soit le changement de variable :

$$u=v+\omega^{\gamma}u_r u_{\alpha,\beta}$$

avec :

$$\gamma=(k-v(\beta^{-1}\alpha))/2 \qquad \text{si} \quad k-v(\beta^{-1}\alpha) \text{ est pair}$$

et

$$\gamma=(k-v(\beta^{-1}\alpha)+1)/2 \qquad \text{si} \quad k-v(\beta^{-1}\alpha) \text{ est impair.}$$

On conclut alors que $J_k^{\alpha,\beta,x}$ est nulle pour de telles valeurs de k. On peut donc se restreindre aux valeurs de k telles que :

$$1\leqq k\leqq 3+2\sup(n_1, n_2, n_3)+v(\beta^{-1}.\alpha)=b(\alpha, \beta).$$

Posons $m=-2-2\sup(n_1, n_2, n_3)$ et soit T, l'ensemble des couples (α, β) tels que la valuation $v(\beta^{-1}.\alpha)$ est supérieure à m.

On a l'égalité :

$$\begin{aligned} I_2^x(\alpha, \beta)={}&1_T((\alpha, \beta))\,|\beta\alpha-1|_F^{(x-2)/2}\mu_1(\beta)\mu_2(\alpha)\\ &\times\sum_{K=1}^{b(\alpha,\beta)}(\mu_1\mu_1^{-1})(\omega^k)\,|\omega|_F^{kx}\\ &\times\int_{R^*}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \omega^k u^{-1} & 1\end{pmatrix}\right)(\mu_1\mu_2^{-1})(u^{-1})\\ &\times\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.\omega^{-k}u)\,d^*u\end{aligned}$$

(expression (E)).

2. Étude de $I_1^x(\alpha, \beta)$

Puisque $w^{-1}r$ appartient à K si r appartient à R, on a l'égalité (E') :

$$I_1^x(\alpha, \beta)=|\beta\alpha^{-1}|_F^{(x-2)/2}\mu_1(\beta)\mu_2(\alpha)\times\int_R\varphi(w^{-1}r)\,|\beta^{-1}\alpha|_F\,\psi_F(\beta^{-1}.\alpha.r)\,dr.$$

3. Analyticité de la fonction $\delta_{f,\,W}$

Puisque $\tilde{f}$ est à support compact dans $F^2 \times F' \times F^*$, il existe deux compacts ouverts K_1 et K_2 de F^* tels que $\tilde{f}(0, \beta, \alpha, 1/\alpha\beta)$ est non nul seulement si α appartient à K_1 et β à K_2.

Posons :

$$L_1^{\alpha,\,\beta}(x) = I_1^x(\alpha, \beta)\,\tilde{f}(0, \beta, \alpha, 1/\alpha\beta)\,|\beta.\alpha^{-1}|_F^{1/2}(\alpha, \xi)$$
$$L_2^{\alpha,\,\beta}(x) = I_2^x(\alpha, \beta)\,\tilde{f}(0, \beta, \alpha, 1/\alpha\beta)\,|\beta\alpha^{-1}|_F^{1/2}(\alpha, \xi).$$

On a l'égalité : (E'') :

$$\delta_{f,\,W}(x) = \int_{K_1 \times K_2} L_1^{\alpha,\,\beta}(x)\,d^*\alpha\,d^*\beta + \int_{K_1 \times K_2} L_2^{\alpha,\,\beta}(x)\,d^*\alpha\,d^*\beta.$$

D'après les expressions (E) et (E'), les fonctions $L_1^{\alpha,\,\beta}$ et $L_2^{\alpha,\,\beta}$ sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

Soit x_0 un nombre complexe. Du fait que le nombre $b(\alpha, \beta)$ est borné sur le compact $K_1 \times K_2$, des expressions (E) et (E'), on déduit que les deux fonctions

$$x \longmapsto |L_1^{\alpha,\,\beta}(x)| \qquad et \qquad x \longmapsto |L_2^{\alpha,\,\beta}(x)|$$

sont majorées par des fonctions intégrables pour la mesure $d^*\alpha\,d^*\beta$ de $F^* \times F^*$ et indépendantes de x_0 dans un voisinage de ce nombre complexe.

Comme ce raisonnement est valable quel que soit le nombre complexe x_0, les intégrales figurant dans l'expression (E'') sont analytiques en x et $\delta_{f,\,W}$ l'est aussi. □

Si μ est un caractère de F^*, on désignera par μ' le caractère de F'^* égal à $\mu \circ N_{F'/F}$.

Proposition 2. — *Soit f appartenant à $\mathcal{S}(E \times F^*)$, φ à $B(\mu_1, \mu_2)$ et soit x un nombre complexe dont la partie réelle est strictement supérieure à $-s+1$. Il existe une fonction $\Phi^x_{f,\,\varphi}$ à valeurs complexes et définie sur $GL_2(F')$ telle que :*

(1) *$\Phi^x_{f,\,\varphi}$ appartient à $B(\mu'_1|\ |_{F'}^{x/2}, \mu'_2|\ |_{F'}^{-x/2})$.*

(2) *Quel que soit l'élément g_1 de $GL_2(F')$,*

$$A^x_{f,\,w}(g_1) = \int_{F'} \Phi^x_{f,\,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\Psi_{F'}(a)\,da.$$

(3) *Quels que soient g_1 et g dans $GL_2(F')$,*

$$\Phi^{x}_{f,\,\varphi}(gg_1)=\Phi^{x}_{R(g_1)f,\,\varphi}(g).$$

Démonstration. — On a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}A^{x}_{f,\,W}(g)&=\int_{N\backslash G} W^{x}_{\varphi}(g_1)\tilde{r}_{\psi}(g)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0,1,1,1)\,dg.\\&=\int_{N\backslash G}\left(\int_{N}\varphi^{x}(w^{-1}ng)\psi_F(n)\,dn\right)\\&\quad\times\tilde{r}_{\psi}(g)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0,1,1,1)\,dg\\&=\int_{G}\varphi^{x}(w^{-1}g)\tilde{r}_{\psi}(g)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0,1,1,1)\,dg.\end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}A^{x}_{f,\,W}(g_1)=\int_{F^*\times F^*\times F\times K}&\varphi\times\left(\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}k\right)\\&\times\tilde{r}_{\psi}\left(w\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}k\right)\tilde{R}(g_1)\\&\tilde{f}(0,1,1,1)\,|\beta.\alpha^{-1}|_F[d^*\alpha\,d^*\beta\,dn\,dk,\end{aligned}$$

qui est égal à :

$$\begin{aligned}\int_{F^*\times F^*\times F\times K}&|\alpha\beta^{-1}|_F^{x/2}\mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{1/2}\varphi(k)\\&\times\tilde{r}_{\psi}\left(wn\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}k\right)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0,1,1,1)\\&\times|\beta.\alpha^{-1}|_F\,d^*\alpha\,d^*\beta\,dn\,dk,\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}&\tilde{r}_{\psi}\left(wn\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}k\right)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0,1,1,1)\\&\quad=\gamma_q(1)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{1/2}(\alpha,\xi)\int_{F'}\tilde{r}_{\psi}(k)\tilde{R}(g_1)\\&\quad\times\tilde{f}(-\alpha,-n\beta,\alpha,-n\beta,\alpha.b,1/\alpha\beta)\psi_F(nb\bar{b}+\mathrm{Tr}(b))\,[db].\end{aligned}$$

L'application

$$(\alpha, \beta, n, b) \mapsto |\alpha.\beta^{-1}|_F^{x/2} |\mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}\left(-\alpha, -n\beta, \alpha b, \frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

est intégrable dès que $\mathrm{Re}(x)$ est supérieure strictement à $-s+1$, ce qui justifie les calculs formels précédents et permet d'appliquer le théorème de Fubini pour ces valeurs de x.

Posons :

$$j_f(\alpha, \beta, k, g_1) = \mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2} \times \int_F \tilde{r}_\psi\left(wn\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}k\right)\tilde{R}(g_1)\tilde{f}(0, 1, 1, 1)\,dn$$

et soit

$$j_f(\alpha, \beta) = j_f(\alpha, \beta, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}).$$

On notera que : $j_f(\alpha, \beta, K, g_1) = j_{R(g_1)r_\psi(K)\,f}(\alpha, \beta)$.

On a l'égalité :

$$A^x_{f,\,W}(g_1) = \int_{F^*\times F^*\times F\times K} j(\alpha, \beta, k, g_1)\,\varphi(k)\,|\beta.\alpha^{-1}|_F\, d^*\alpha\, d^*\beta\, dk.$$

On a :

$$j(\alpha, \beta) = \mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}\gamma_q(1) \times \int_{F\times F'} \tilde{r}_\psi\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\tilde{f}(-1, -n, b, 1) \times \psi_F(nb\bar{b} + \mathrm{Tr}(b))\,db\,dn.$$

Par inversion de Fourier, on a l'égalité :

$$\left(r_\psi\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}f\right)\left(\begin{pmatrix}b\bar{b} & \bar{b}\\ b & 1\end{pmatrix}\right) = \int_F \tilde{r}_\psi\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)\tilde{f}(-1, n, b, 1)\,\psi_F(-nb\bar{b})\,dn.$$

et donc on a l'égalité :

$$j(\alpha, \beta) = \mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}\gamma_q(1) \times \int_{F'} \left(r_\psi\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}f\right)\left(\begin{pmatrix}b\bar{b} & \bar{b}\\ b & 1\end{pmatrix}, 1\right)\psi_{F'}(b)\,db$$

$$=\mu_2(\alpha)\,\mu_2(\beta)\,\gamma_q(1)\,|\alpha.\beta^{-1}|_{(x+1)/2}^{F}(\alpha,\xi)\,|\alpha\beta^{-1}|_F$$
$$\times\int_{F'} f\left(\begin{pmatrix}\alpha b\bar{b} & \alpha\bar{b}\\ \alpha b & \alpha\end{pmatrix}, 1/\alpha\beta\right)\psi_{F'}(b)\,db.$$

Fixons ν dans F^* tel que ν n'est pas une norme de F'^*.

(1) Supposons que α est la norme d'un élément de F'^* et choisissons a dans F'^* tel que $\alpha=a\bar{a}$. On a :

$$\begin{pmatrix}\alpha b\bar{b} & \alpha\bar{b}\\ \alpha b & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{a}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.$$

(2) Si α n'est pas une norme de F'^*, choisissons a dans F'^* tel que $\alpha=\nu.a\bar{a}$. On a :

$$\begin{pmatrix}\alpha b\bar{b} & \alpha\bar{b}\\ \alpha b & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{a}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.$$

Soit S le groupe des normes de F'^*. L'application $N_{F'/F}$:

$$F'^*\to S,$$
$$b\mapsto b\bar{b}.$$

est surjective. Fixons une section continue ε de $N_{F'/F}$.

On obtient l'égalité :

$$j(\alpha,\beta)=\mu_2(\alpha)\,\mu_2(\beta)\,\gamma_q(1)\,|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+3)/2}\Big(\mathbf{1}_S(\alpha)$$
$$\times\int_{F'} R\left(\begin{pmatrix}(\varepsilon(\alpha))^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}w\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\beta\right)db-\mathbf{1}_{\nu S}(\alpha)$$
$$\times\int_{F'} R\left(\begin{pmatrix}(\varepsilon(\alpha.\nu^{-1}))^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.w\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$\times f\left(\begin{pmatrix}\nu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\nu\beta\right)db\Big).$$

On a finalement l'égalité cherchée :

$$A^{x}_{f.\,w}(g_1)=\int_{F'}\Phi^{x}_{f.\,\bullet}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{F'}(b)\,db,$$

avec :

$$\Phi^x_{f.\varphi}(g_1)=\gamma_q(1)\int_{F^*\times F^*}\mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}(1_S(\alpha)$$

$$\times\int_K\varphi(k)\Big(R\begin{pmatrix}(\varepsilon(\alpha))^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\Big)$$

$$\times r_\psi(k)f)\Big(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\beta\Big)[dk]-1_{\nu S}(\alpha)$$

$$\times\int_K\varphi(k)\Big(R\begin{pmatrix}\varepsilon(\alpha.\nu^{-1}))^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\Big)r_\psi(k)f\Big)$$

$$\times\Big(\begin{pmatrix}\nu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\nu\beta\Big)dk\Big)d^*\alpha\, d^*\beta.$$

id est :

$$\Phi^x_{f.\varphi}(g_1)=\gamma_q(1)$$

$$\times\int_{F^*\times F^*}\mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}(\alpha,\xi)$$

$$\times\int_K\varphi(k)(R(g_1)r_\psi(k)f)\Big(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\alpha\beta\Big)dk\Big)d^*\alpha\, d^*\beta.$$

Il est facile de vérifier les propriétés énoncées dans la proposition. □

Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est strictement supérieure à $-s-1$.

L'application :

$$(\alpha,\beta)\mapsto\mu_1(\alpha)\mu_2(\beta)|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}(\alpha,\xi)$$

$$\times\int_K\varphi(k)(r_\psi(k)R(g_1)f)\Big(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\alpha\beta}\Big)dk\,[d^*\alpha\, d^*f]$$

est intégrale dès que $\mathrm{Re}(x)>-s-1$. On peut donc définir $\Phi^x_{f.\varphi}(g_1)$ par la formule ci-dessus dès que x est dans Ω.

Puisque $\Phi^x_{f.\varphi}$ appartient à $B(\mu_1'|\ |_{F'}^{x/2}, \mu_2'|\ |_{F'}^{-x/2})$, on peut montrer (*cf.* la partie 2) que, pour φ fixée dans $B(\mu_1,\mu_2)$, f dans $\mathcal{S}(E\times F^*)$ et g_1 *dans* $GL_2(F')$, *il existe un entier* m_0 indépendant de x dans Ω tel que l'application :

$$m\mapsto\int_{\varpi'^{-m}R'}\Phi^x_{f.\varphi}\Big(w\begin{pmatrix}1 & -\bar a\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\Big)\psi_{F'}(a)\,da$$

est constante pour les entiers m supérieurs à m_0.

On pose, pour x dans Ω :

$$\int_{F'} \Phi^x_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{F'}(a)\,da$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\left(\int_{\varpi'^{-m}R'} \Phi^x_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\psi_{F'}(a)\,da\right).$$

Soit :

$$\mathrm{M}^{g_1}_{f,\varphi}(x)=\int_{F'} \Phi^x_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{F'}(a)\,da.$$

LEMME 6. — *La fonction* $\mathrm{M}^{g_1}_{f,\varphi}$ *est analytique sur* Ω.

Démonstration. — Quitte à changer f, on peut supposer que g_1 est la matrice identité. Il existe un entier m naturel tel que :

$$\forall x\in\Omega,\quad M^{\mathrm{Id}}_{f,\varphi}(x)=\int_{\varpi'^{-m}R'} \Phi^x_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_{F'}(a)\,da.$$

Posons :

$$g(\alpha,\beta,x,a)=\gamma_q(1)\,\mu_1(\alpha)\,\mu_2(\beta)\,|\alpha.\beta^{-1}|_F^{(x+1)/2}(\alpha,\xi)$$
$$\times\left(\int_K \varphi(k)\,(r_\psi(k)f)\left(\begin{pmatrix}\alpha.a\bar{a} & \alpha.\bar{a}\\ \alpha.a & \alpha\end{pmatrix},\ 1/\alpha\beta\right)dk.\right.$$

On a l'égalité :

$$\Phi^x_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\int_{F^*\times F^*} g(\alpha,\beta,xa)\,d^*\alpha\,d^*\beta.$$

Puisque f est dans $\mathscr{S}(E\times F^*)$, il existe un compact K_1 de F, deux constantes M et c indépendantes de x dans Ω tels que, en notant Y^α l'ensemble $\{y\in F,\ |v(y\alpha)|\leq c\}$:

$$|g(\alpha,\beta,x,a)|\leq M\,\mathbf{1}_{K_1}(\alpha)\,|(\mu_1\mu_2^{-1})(\alpha)|\,|\alpha|_F^{\mathrm{Re}(x)+1}\,\mathbf{1}_{Y^\alpha}(\beta).$$

Grâce à cette inégalité, on voit qu'on peut majorer la fonction

$$(\alpha,\beta,a)\mapsto g(\alpha,\beta,x,a)$$

uniformément au voisinage de tout point x de Ω, par une fonction intégrable pour la mesure $d^*\alpha\,d^*\beta\,da$ de $F^*\times F^*\times\omega'^{-m}R'$.

Comme la fonction $x \mapsto g(\alpha, \beta, , x, a)$ est analytique sur Ω quel que soit le triplet (α, β, a) de $F^* \times F^* \times \omega'^{-m} R'$, comme $M^{\mathrm{Id}}_{f,\varphi}(x)$ est égal à l'intégrale

$$\int_{F^* \times F^* \times \omega'^{-m} R'} g(\alpha, \beta, x, a)\, \psi_{F'}(a)\, d^*\alpha\, d^*\beta\, da, \quad M^{\mathrm{Id}}_{f,\varphi}$$

est analytique sur Ω. □

Vu les deux lemmes d'analyticité (lemmes 5 et 6), on déduit que la proposition 2 reste vraie quel que soit x vérifiant : $\mathrm{Re}(x) > -s-1$ et notamment pour $s \geqq 0$, quel que soit x tel que $\mathrm{Re}(x)$ est strictement supérieure à -1. Il suffit alors de faire $x=0$ et on obtient :
si f appartient à $\mathscr{S}(E \times F^*)$, φ à $B(\mu_1, \mu_2)$, si s est positif.

$$A_{f,W}(g_1) = \int_{F'} \Phi^0_{f,\varphi}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_1\right)\psi_{F'}(a)\, da,$$

avec $\Phi^0_{f,\varphi}$ dans $B(\mu'_1, \mu'_2)$ et

$$W(g) = \int_N \varphi(w^{-1} ng)\, \psi_F(n)\, dn.$$

Soit φ fixée dans $\beta(\mu_1, \mu_2)$ telle que W associée soit non nulle. D'après le troisième point de la proposition 2, l'espace des fonctions $\{\Phi^0_{f,\varphi}, f \in \mathscr{S}(E \times F^*)\}$ est un $GL_2(F')$-module et on a :

COROLLAIRE. — *L'espace $\mathscr{B}$ est un sous-quotient de* $B(\mu'_1, \mu'_2)$.

On rappelle que

$$\mathscr{B} = \{A_{f,W}, f \in \mathscr{S}(E \times F^*),\ W \in \mathscr{W}^{+-}_{\pi}\}.$$

PROPOSITION 3. — (1) *Si* $\mu'_1 \mu'^{-1}_2 \neq |\ \ |_{F'}$, *$\mathscr{B}$ est égal à* $B(\mu'_1, \mu'_2)$ *et* π' *est la série principale* $\rho(\mu'_1, \mu'_2)$.

(2) *Si* $\mu'_1 \mu'^{-1}_2 = |\ \ |_{F'}$ *et* $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\ \ |_F$, *$\mathscr{B}$ est égal à* $B^S(\mu_2, \mu_2)$ *et* π' *est la série spéciale* $\sigma(\mu'_1, \mu'_2)$.

(3) *Si* $\mu'_1 \mu'^{-1}_2 = |\ \ |_{F'}$ *et* $\mu_1 \mu_2^{-1} \neq |\ \ |_F$, *$\mathscr{B}$ est égal à* $B(\mu'_1, \mu'_2)$ *et* π' *est réductible.*

Démonstration. — De ce qui précède, on sait que $\mathscr{B}$ (qui n'est pas l'espace nul) est soit $B(\mu'_2, \mu'_2)$, soit $B^S(\mu'_2, \mu'_2)$, soit encore le quotient de dimension 1. Puisque $\mathscr{B}$ est un modèle de Whittaker de π', cet ensemble ne peut être le quotient irréductible de dimension 1.

(1) est clair.

(2) On va supposer que π est $\sigma(\mu_1, \mu_1 |\ |_F^{-1})$. Il n'y a que deux possibilités : soit $\mathscr{B} = \mathrm{B}(\mu'_1, \mu'_2)$, soit $\mathscr{B} = B^S(\mu'_1, \mu'_2)$.

LEMME 7. — (1) *Si f appartient à $\mathscr{S}(E \times F^*)$, il existe une constante positive λ_f telle que :*

$$|K_{f,\,W}(a)| \leqq \lambda_f |\mu_1(a\bar{a})| \quad \textit{au voisinage de } 0.$$

(2) *Si $\mathscr{B}$ est $\mathrm{B}(\mu'_1, \mu'_2)$, il existe f appartenant à $\mathscr{S}(E \times F^*)$ et W à $\mathscr{W}_\pi^{\psi -}$ telles que :*

$$K_{f,\,W}(a) = |a|_{F'}^{1/2} . \mu_2(a\bar{a}) \quad \textit{au voisinage de } 0.$$

Les parties (1) et (2) de ce lemme sont contradictoires (on rappelle que $\mu_2 = \mu_1 |\ |_F^{-1}$) et donc la représentation π' est la série spéciale $\sigma(\mu'_1, \mu'_2)$.

Prouvons d'abord la deuxième assertion du lemme. Si $\mathscr{B}$ est l'ensemble $B(\mu'_1, \mu'_2)$, l'application : $g_1 \mapsto \int_{F'} \varphi(\mathrm{w}ag_1)\psi_{F'}(-\bar{a})\,da$ est dans $\mathscr{B}$ quelle que soit l'application φ de $B(\mu_1, \mu'_2)$. On l'appellera $A\varphi(g_1)$.

$$A\varphi\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |b|_{F'}^{1/2}\mu_2(b\bar{b}) \int_{F'} \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \bar{a} \end{pmatrix}\right)\psi_{F'}(a\bar{b})\,da.$$

Il reste à choisir la fonction φ telle que la fonction

$$b \mapsto \int_{F'} \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \bar{a} \end{pmatrix}\right)\psi_{F'}(a\bar{b})\,da$$

soit constante au voisinage de 0 sans valoir la constante nulle. Soit on applique [5], page 28, chapitre 1, soit on fait un calcul direct facile. □

Prouvons la première assertion du lemme. On a :

$$K_{f,\,W}(a) = \int_{N/G} W(g)\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\tilde{f}(0, 1, 1, 1)\,dg.$$

On écrit $g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}k$ selon la décomposition d'Iwasawa. Grâce à l'invariance de nos fonctions par un sous-groupe ouvert, il suffit de prouver le lemme pour la fonction $C_{f,\, W}$ définie par :

$$C_{f,\, W}(a) = |a|_F^{1/2} \int_{F^* \times F^*} W\left(\begin{pmatrix} \alpha . z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)(\alpha z, \xi) \times \bar{f}(0, z, \alpha z \bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) |\alpha|_F^{-1/2} d^*\alpha\, d^* z.$$

Le caractère central de la présentation π est $\mu_2 \mu_2 = \mu_1^2 |\ \ |_F^{-1}$.

On obtient l'égalité :

$$C_{f,\, W}(a) = |a|_F^{1/2} \int_{F^* \times F^*} \mu_1^2(z) |z|_F^{-1} W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(\alpha z, \xi) \times \bar{f}(0, z, \alpha z \bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha' z^2) |\alpha|_F^{-1/2} d^*\alpha\, d^* z.$$

(a) Il, existe quatre constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 telles que la fonction

$$(z, \alpha) \mapsto \mu_1^2(z) |z|_F^{-1} W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(\alpha . z, \xi) \bar{f}(0, z, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) |\alpha|_F^{-1/2},$$

ne s'annule pas seulement si :

(1) $$v(z) \geqq c_1,$$

(2) $$2v(\alpha) + 2v(z) - v(a\bar{a}) \geqq c_2,$$

(3) Il existe un entier h tel que :

$$c_3 \leqq h \leqq c_4 \quad \text{et} \quad v(\alpha) = v(a\bar{a}) - 2v(z) + h.$$

Ce système se réduit à : il existe un entier h tel que $c_3 \leqq h \leqq c_4$ et tel que :

(1) $$c_1 \leqq v(z) \leqq (v(a\bar{a}) + 2h - c_2)/2,$$

(2) $$v(\alpha) = v(a\bar{a}) - 2v(z) + h.$$

(b) On sait qu'il existe une fonction f_1 dans $\mathcal{S}(F)$ telle que :

$$\forall \alpha \in F^*, \quad W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |\alpha|_F^{1/2} \mu_1(\alpha) f_1(\alpha).$$

Il existe une constante positive λ telle que :

$$\forall \alpha \in F^*, \quad \left| W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \right| \leqq \lambda . |\alpha|_F^{1/2} |\mu_1(\alpha)|.$$

(*c*) Soit

$$E_a^h = \left\{ (z, \alpha) \in F^* \times F^*, \begin{cases} c_1 \leqq v(z) \leqq (v(a\bar{a}) + 2h - c_2)/2 \\ v(\alpha) = v(a\bar{a}) - 2v(z) + h. \end{cases} \right\}.$$

Soit M un majorant de $|\tilde{f}|$.

Alors, $|C_{f,\,W}(a)|$ est majorée par :

$$\lambda.\, M\,|a|_{F'}^{1/2} \sum_{h=c_3}^{c_4} \int_{E_a^h} |\mu_1^2(z)|\,|z|_F^{-1}\,|\mu_1(\alpha)|\, d^*\alpha\, d^* z.$$

Soit

$$L_a^h = \{ z \in F^*,\ c_1 \leqq v(z) \leqq (v(a\bar{a}) + 2h - c_2/2 \}.$$

Quel que soit h tel que $c_3 \leqq h \leqq c_4$, il existe une constante positive K_h telle que :

$$\int_{E_a^h} |\mu_1^2(z)|\,|z|_F^{-1}\,|\mu_1(\alpha)|\, d^*\alpha\, d^* z \leqq K_h\,|\mu_1(a\bar{a})| \left(\int_{L_a^h} |z|_F^{-1}\, dz^* \right).$$

On a :

$$\int_{L_a^h} |z|_F^{-1}\, d^* 2 = |\omega|_F^{-1} \left(\frac{1 - |a|_{F'}^{-1/2}\,|\omega|_F^{-(h - c_2/2 - c_1)}}{1 - |\omega|_F^{-1}} \right).$$

Pour tout voisinage V de 0 dans F', il existe donc une constante $K'_h(V)$ positive telle que :

$$|a|_{F'}^{1/2} \int_{L_a^h} |z|_F^{-1}\, d^* z \leqq K'_h(v).$$

Soit

$$\lambda'_V = \sum_{h=c_3}^{c_4} K_h\, K'_h(V).\, \lambda.\, M.$$

On obtient la majoration cherchée :

$$\forall a \in V, \quad |C_{f,\,W}(a)| \leqq \lambda'_V .\, |\mu_1(a\bar{a})|. \quad \square$$

Prouvons le troisième point de la proposition 3. Les hypothèses faites sur les caractères μ_1 et μ_2 signifient que π est la série principale $\rho(\mu_1, \mu_1|\ |_F^{-1} \chi_{F'/F})$.

Supposons que $(\pi', GL_2(F), \mathscr{B})$ est équivalente à la représentation $(\sigma(\mu_1', \mu_2'), GL_2(F), B^S(\mu_2', \mu_2'))$. La représentation π' est irréductible et l'espace

$$\mathscr{C} = \{ K_{f,\ W} \ f \in \mathscr{S}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}^*),\ W \in \mathscr{W}_\pi^{\psi -} \}$$

est le modèle de Kirillov de π'. D'après [5], $\mathscr{C}$ est exactement l'ensemble des fonctions

$$\{ a \mapsto |a|_{F'}^{1/2} \mu_1(a\bar{a}) f(a),\ f \in \mathscr{S}(F') \}.$$

Le lemme suivant assure la contradiction.

LEMME 8. — *Il existe une fonction f de $\mathscr{S}(E \times F^*)$, une fonction W de $W_\pi^{\psi -}$ et une constante λ différente de 0 telle que :*

$$K_{f,\ W}(a) = \lambda |a|_{F'}^{-1/2} \mu_1(a\bar{a}) \quad \textit{au voisinage de } 0.$$

Démonstration. — Pour obtenir le résultat, il suffit d'affiner la preuve de la non nullité de l'espace $\mathscr{B}$ (*cf.* la proposition 1). On a, quel que soit m appartenant à F'^* :

$$K_{f,\ W}(m) = |m|_{F'}^{1/2} \int_{N \backslash G} W(g) \tilde{r}_\psi(g) \tilde{f}(0,\ 1,\ \bar{m}^{-1},\ m\bar{m})\, dg.$$

En gardant les notations de la proposition 1, on choisit α, f_1, f_2, W et l'entier n tels que :

(1) $$f_1(x, y) = \mathbf{1}_{\varpi^n R}(x)\, \mathbf{1}_{1+\varpi^n R}(y).$$

(2) $$W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mu_1(a) |a|_F^{-1/2} (\alpha, \xi)\, \mathbf{1}_R(a) \quad (\textit{cf.}\ [\text{God}],\ \text{page } 36,\ \S\ 1).$$

(3) α est un entier naturel tel que la restriction de μ_1 à $1 + \pi^\alpha R$ est triviale.

(4) $$f_2(b, u) = \mathbf{1}_{R'}(b)\, \mathbf{1}_{1+\varpi^\alpha R}(u).$$

(5) n est assez grand pour que W et la fonction $g \mapsto \rho_\psi(g) f_2$ soient stables par translation à droite par n'importe quel élément de N_n (*cf.* page 9) et n est supérieur à α.

Comme dans la proposition 1, soit :

$$F_{f_1,\ f_2,\ W}(k) = \int_{N \backslash B} W(bk) f_1((0,1)bk) \rho_\psi(bk) f_2)(\bar{m}^{-1},\ m\bar{m})\, db$$

$$= \mathbf{1}_{K'}(k) \int_{N \backslash B} W(b) f_1((0,\ 1)b)(\rho_\psi(b) f_2)(\bar{m}^{-1},\ m\bar{m})\, db.$$

On a l'égalité :

$$F_{f_1,\, f_2,\, W}(k)=\int_{F^*\times F^*} \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\right)(a,\, \xi)$$
$$\times |a|_F^{1/2}\, \mathbf{1}_{R'}(a\bar{m}^{-1})\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(m\bar{m}/ad)\, |a|_{F'}^{-1}\, d^* a\, d^* d.$$

Or,

$$\mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\right)=\mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}$ est dans N_n dès que d est dans $1+\omega^n R$.

Donc :

$$F_{f_1,\, f_2,\, W}(k)=\mathbf{1}_{K'}(k)\int_{F^*\times F^*} \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, \mu_1(a)$$
$$\times |a|_F^{-1}\, \mathbf{1}_R(a)\, \mathbf{1}_{R'}(a\bar{m}^{-1})\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(m\bar{m}/ad)\, d^* a d^* d.$$

Puisque n est supérieur à α, on a :

$$\mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\,.\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(m\bar{m}/ad)=\mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\,.\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(m\bar{m}/a).$$

Posons $a=m\bar{m}a'$. On a l'égalité :

$$F_{f_1,\, f_2,\, W}(k)=\mathbf{1}_{K'}(k)$$
$$\times\left(\int_{F^*\times F^*} \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}\, \mu_1(a')\right.$$
$$\times |a'|_F^{-1}\, \mathbf{1}_{R'}(m\bar{m}\, a')$$
$$\left.\times\, \mathbf{1}_R(m\bar{m}a')\, d^* a\, d^* d\right) \mu_2(m\bar{m})\, |m\bar{m}|_F^{-1}.$$

De l'égalité

$$\mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(a')\, \mathbf{1}_R(m\bar{m}a')\, \mathbf{1}_{R'}(ma')=\mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(a')\, \mathbf{1}_{R'}(m),$$

on déduit que :

$$F_{f_1,\, f_2,\, W}(k)=\mathbf{1}_{K}'(k)$$
$$\times\left(\int_{F^*\times F^*} \mathbf{1}_{1+\omega^n R}(d)\, \mathbf{1}_{1+\omega^\alpha R}(a)\, d^* a d^* d\right)$$
$$\times\, \mu_1(m\bar{m})\, |m|_{F'}^{-1}\, \mathbf{1}_{R'}(m).$$

De l'égalité

$$K_{f,\,W}(m)=|m|_{F'}^{1/2}\int_K F_{f_1,\,f_2,\,W}(k)\,dk,$$

on déduit qu'il existe une constante λ strictement positive telle que :

$$K_{f,\,W}(m)=\lambda.\mu_1(m\bar{m})|m|_{F'}^{-1/2}\,\mathbf{1}_{R'}(m).$$

Le lemme 8 est ainsi démontré. □

3. Le cas des représentations cuspidales

Soit W fixé dans $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ non nul. On a l'égalité :

$$\mathscr{B}=\{A_{f,\,W},\,f\in\mathscr{S}(E\times F^*)\}.$$

Considérons γ l'application de restriction de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{C}$, qui associe à toute fonction de $\mathscr{B}$ (notée généralement $A_{f,\,W}$ dans ce qui précède) sa restriction aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (notée $K_{f,\,W}$ dans les paragraphes précédents).

Soit π une représentation de $GL_2(F)$ irréductible et cuspidale, réalisée dans son modèle de Whittaker $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$. Soit ω_π le caractère central de π.

LEMME 9. — (1) *Soient a et b dans F'^*, f dans $\mathscr{S}(E\times F^*)$ et n dans F'. On a les égalités :*

(1.1) $$K_{R\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)f,\,W}(b)=K_{f,\,W}(ab),$$

(1.2) $$K_{R\left(\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)f,\,W}(b)=\psi_{F'}(nb)\,K_{f,\,W}(b).$$

(2) *Il existe une fonction L de $F'^*\times F'^*$ à valeurs complexes telle que, pour tout f dans $\mathscr{S}(E\times F^*)$ et pour tout b dans F'^* :*

(2.1) *L'application $c\mapsto K_{f,\,W}(c)\,L(c,b)$ est intégrable pour la mesure dc de F'.*

(2.2) *On a l'égalité :*

$$K_{R(w)f,\,W}(b)=\int_{F'} K_{f,\,W}(c)\,L(c,b)\,dc.$$

Le point (1) *est clair et on prouvera le deuxième point qui nécessite quelques lemmes techniques* (cf. *page* 28, *pour l'expression de la fonction L*).

De ce lemme et de la décomposition d'Iwasawa, on déduit le corollaire suivant :

Le noyau de γ est réduit à l'espace nul.

Par conséquent, au lieu d'étudier la représentation $(\pi', GL_2(F'), \mathscr{B})$, on étudiera la représentation transportée sur $\mathscr{C}$ qu'on appellera encore π'.

Soit ω_1 un caractère de F'^*. Notons ω_1^σ son caractère conjugué $a \mapsto \omega_1(\bar{a})$.

LEMME 10. — (1) *L'espace* $\mathscr{C}$ *est soit* $\mathscr{S}(F'^*)$ *soit un espace dans lequel* $\mathscr{S}(F'^*)$ *est de codimension deux.*

(2) *Dans ce deuxième cas, il existe un caractère* ω_2 *de* F'^* *tel que :*

(2.1) $$\mathscr{C} = \{a \mapsto |a|_{F'}^{1/2}(\omega_1(a) f_1(a) + \omega_1^\sigma(a) f_2(a), f_1 \in \mathscr{S}(F') f_2 \in \mathscr{S}(F')\}.$$

(2.2) $\omega_1 \neq \omega_1^\sigma$

(2.3) *Quel que soit a dans* F'^* :

$$|\omega_1(a)| = |\omega_\pi(a)|.$$

Démonstration. — On sait déjà que $K_{f,W}(a)$ est une somme finie d'expressions de la forme (*cf.* page 23) :

$$|a|_{F'}^{1/2} \int_{F^* \times F^*} \omega_\pi(z) W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(\alpha z, \xi) \; \bar{f}(0, z, \alpha z \bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) |\alpha|_F^{-1/2} d^*\alpha \, d^* z.$$

(1) Puisque π est cuspidale, il existe deux constantes entières c_1 et c_2 telles que $W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ne s'annule pas seulement si : $c_1 \leqslant v(\alpha) \leqslant c_2$.

(2) Il existe aussi deux constantes entières c_3 et c telles que $f(0, z, \alpha z \bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)$ est non nul seulement si :

$$c_3 \leqslant v(a\bar{a}) - v(\alpha) - 2v(z) \leqslant c_4.$$

D'après (1), il existe deux constantes entières c_5 et c_6 telles que $f(0, z, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)$ est non nul seulement s'il existe un entier μ tel que :

(a) $$c_5 \leqslant \mu \leqslant c_6,$$

(b) $$(*): \quad v(z) = v(a\bar{a})/2 + \mu.$$

D'après (*), il existe un voisinage V de 0 dans F' tel que pour tout a dans V, pour tous z et α dans F^*, on a l'égalité :

$$\tilde{f}(0, z, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) = \tilde{f}(0, 0, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2).$$

Puisque l'intégration sur K n'apporte qu'un nombre fini d'intégrales du type précédent, on obtient, pour a suffisamment proche de 0 :

$$K_{f,\, W}(a) = |a|_{F'}^{1/2} \int_{F^* \times F^* \times K} \omega_\pi(z)\, W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(\alpha . z, \xi)$$
$$(\tilde{r}_\psi(k)\tilde{f})(0, 0, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)\, |\alpha|_F^{-1/2}\, d^*\alpha\, d^*z\, dk$$
$$= \int_{N \backslash G} W(g)\, \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{R}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tilde{f}(0, 0, 1, 1)\, dg.$$

Supposons maintenant qu'il existe une fonction f_1 dans $\mathcal{S}(F^2)$ et une fonction f_2 dans $\mathcal{S}(F' \times F^*)$ telles que :

$$\tilde{f}(x, y, b, u) = f_1(x, y)\, f_2(b, u).$$

Posons pour tout a dans F'^*

$$K'_{f,\, W}(a) = \int_{N \backslash G} W(g)\, \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{R}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tilde{f}(0, 0, 1, 1)\, dg.$$

et (*cf.* la formule (R_4))

$$J_{f,\, W}(a) = \int_{N \backslash G} W(g)\, (\rho_\psi(g)\, f_2)(\bar{a}^{-1}, a\bar{a})\, dg.$$

Il existe un voisinage de 0 dans F' tel que pour tout a dans ce voisinage :

(I) $$K_{f,\, K}(a) = K'_{f,\, W}(a) = f_1(0, 0)\, |a|_{F'}^{1/2}\, J_{f,\, W}(a).$$

Soit λ appartenant à F^*. Quel que soit a dans F'^*, on a :

$$J_{f,\,W}(\lambda a)=(\lambda,\,\xi)\,\omega_\pi(\lambda)\,J_{f,\,W}(a).$$

Soit D l'ensemble des caractères χ de F'^* tels que :

$$\forall\lambda\in F^*,\quad \chi(\lambda)=(\lambda,\,\xi)\,\omega_\pi^{-1}(\lambda).$$

Pour $\chi_0\in D$, on peut considérer l'intégrale

$$I^W_{f,\,\chi_0}=\int_{F'^*/F^*} J_{f,\,W}(a)\,\chi_0(a)\,da.$$

Soit A l'ensemble des caractères de F'^*/F^*.

Puisque F'^*/F^* est compact, l'ensemble A forme une base de l'espace des fonctions localement constantes sur F'^*/F^* à valeurs complexes.

L'action du groupe A sur l'ensemble

$$D:\quad \begin{array}{c} D\times A\to D,\\ (\chi,\,\chi_1)\mapsto\chi\cdot\chi_1\end{array}$$

munit D d'une structure d'espace homogène sous A.

Donc, il existe une famille presque toute nulle $(c^W_{f,\,\chi})_{\chi\in D}$ de nombres complexes telle que, quel que soit a appartenant à F'^* :

$$J_{f,\,W}(a)=\textstyle\sum_{\chi\in D} c^W_{f,\,\chi}\cdot\chi^{-1}(a).$$

Soit ν la mesure de F'^*/F^*. On a l'égalité :

$$(**)\qquad I^W_{f,\,\chi}=\nu\,.\,c^W_{f,\,\chi}.$$

Premier cas. — Supposons la condition H suivante vérifiée

$$\forall\chi\in D,\quad \forall f\in\mathscr{S}(E\times F^*),\quad \forall W\in\mathscr{W}^{\psi-}_\pi,\qquad I^W_{f,\,\chi}=0.$$

D'après l'égalité $(**)$ on a : $c^W_{f,\,\chi}=0$ quels que soient f, W, χ. Donc, la fonction $J_{f,\,W}$ est la fonction identiquement nulle et $K_{f,\,W}(a)$ est nul au voisinage de 0. Avec le lemme 2, on déduit que $\mathscr{C}$ est $\mathscr{S}(F'^*)$.

Deuxième cas. — On suppose que la condition H est fausse. Soient alors $\chi\in D$, $f\in\mathscr{S}(E\times F^*)$ et $W\in\mathscr{W}^{\psi-}_\pi$ tels que $I^W_{f,\,\chi}\neq 0$.

On a les égalités :

$$I^W_{f,\chi}=\int_{F'^*/F^*}\left(\int_{N\backslash G} W(g)(\rho_\psi(g)f_2)(\bar a^{-1}, a\bar a)\chi(a)\,dg\right)da$$

$$=\int_{F'^*/F^*}\left(\int_{ZN\backslash G}\left(\int_{F^*} W(\lambda g)(\rho_\psi(\lambda g)f_2)(\bar a^{-1}, a\bar a)\chi(a)\,d^*\lambda\right)dg\right)da.$$

Puisque χ appartient à D, on obtient l'égalité :

$$I^W_{f,\chi}=\int_{ZN\backslash G} W(g)\left(\int_{F'^*/F^*}\left(\int_{F^*}(\rho_\psi(g)f_2)(\lambda\bar a^{-1}, a\bar a/\lambda^2)\chi(a.\lambda^{-1})\,d\lambda^*\right)da\right)dg.$$

Posons :

$$W^{f_2}(g)=\int_{F'^*}(\rho_\psi(g)f_2)(\bar a^{-1}, a\bar a)\chi(a)\,da^*.$$

On obtient :

$$I^W_{f,\chi}=\int_{ZN\backslash G} W(g)\,W^{f_2}(g)\,dg.$$

Soit G^+ le sous-groupe de $GL_2(F)$ des matrices dont le déterminant est la norme d'un élément de F'^*. Soit r_χ la représentation de G^+ définie dans [8], page 11 et soit $\pi(\chi)=\mathrm{ind}_{G^+}^G(r_\chi)$. On sait que $\pi(\chi)$ est irréductible.

LEMME 11. — *L'espace des fonctions* $\{W^{f_2}, f_2\in\mathscr{S}(E\times F^*)\}$ *est le modèle de Whittaker de la représentation* $\pi(\chi)$ *relatif au caractère additif* ψ_F.

Ce lemme découle de [8], page 13.

Posons

$$\langle W, W^{f_2}\rangle=\int_{ZN\backslash G} W(g)\,W^{f_2}(g)\,dg.$$

La forme $(W, W^{f_2})\mapsto\langle W, W^{f_2}\rangle$ est donc une forme d'entrelacement (non nulle par hypothèse) entre les deux représentations π et $\pi(\chi)$ qui sont irréductibles. On déduit que π est équivalente à la représentation contragrédiente de $\pi(\chi)$, c'est-à-dire $\pi(\chi^{-1})$ (*cf.* [8], page 150). Comme π est cuspidale, le caractère χ est distinct du caractère χ^{σ}.

On sait que la représentation $\pi(\chi_1)$ est équivalente à la représentation $\pi(\chi)$ si et seulement si $\chi_1=\chi$ ou $\chi_2=\chi^{\sigma}$ (*cf.* [8], page 150). Donc, d'après l'égalité $(**)$ seuls $c^W_{f.\,\chi}$ et $c^W_{f.\,\chi^{\sigma}}$ peuvent être non nuls.

Soit f' la fonction telle que

$$\tilde{f}'(x, y, b, u)=\tilde{f}(x, y, \bar{b}, u).$$

Puisque $c^W_{f.\,\chi}$ est non nul, les égalités

$$\nu.\,c^W_{f'.\,\chi^{\sigma}}=I^W_{f'.\,\chi^{\sigma}}=I^W_{f.\,\chi}=\nu.\,c^W_{f.\,\chi}$$

assurent que $c^W_{f'.\,\chi^{\sigma}}$ est non nul.

Soit ω_1 le caractère χ^{-1}. On déduit de ce qui précède et de la relation (I) que :

$$\mathscr{C}=\{a\mapsto |a|_{F'}^{1/2}(\omega_1(a)\,f_1(a)+\omega_1^{\sigma}(a)\,f_1(a))\ f_1\in\mathscr{S}(F'),\ f_2\in\mathscr{S}(F')\}.$$

Donc $\mathscr{S}(F'^*)$ est de codimension deux dans $\mathscr{C}$.

Les propriétés de ω_1 se déduisent de celles de χ. $\square$

on va utiliser ce lemme pour établir :

PROPOSITION 4. — *La représentation* $(\pi', GL_2(F'), \mathscr{C})$ *est irréductible.*

Démonstration. — Soit T l'ensemble des $GL_2(F')$-modules inclus dans $\mathscr{C}$ et contenant $\mathscr{S}(F'^*)$.

Soit V l'intersection de tous les modules appartenant à T. La représentation $(\pi', GL_2(F'), V)$ est irréductible car tout sous-module non nul de $\mathscr{C}$ contient $\mathscr{S}(F'^*)$ (*cf.* lemme 3).

Si $\mathscr{C}$ est $\mathscr{S}(F'^*)$, alors

$$V=\mathscr{S}(F'^*)\qquad \text{et}\qquad (\pi', GL_2(F'), \mathscr{C})$$

est irréductible.

Si $\mathscr{C}$ est tel que $\mathscr{S}(F'^*)$ est de codimension deux dans $\mathscr{C}$, supposons que $\mathscr{C}$ est distinct de V.

Premier cas. — Supposons $V=\mathscr{S}(F'^*)$. Puisque V est son propre modèle de Kirillov, la représentation $(\pi', GL_2(F'), V)$ est cuspidale. Comme $(\pi', GL_2(F'), \mathscr{C})$ est admissible, on peut appliquer le résultat, page 37 de

[1] à cette représentation : le sous-module V de $\mathscr{C}$ qui est cuspidal est facteur direct.

Il existe un sous-module V' de $\mathscr{C}$ tel que : $V \oplus V' = \mathscr{C}$.

La dimension sur $\mathbb{C}$ de V' est égale à la codimension de V dans $\mathscr{C}$. Elle est donc finie et non nulle, ce qui est exclu car V' doit contenir $\mathscr{S}(F'^*)$.

Deuxième cas. — Supposons que la codimension de $\mathscr{S}(F'^*)$ dans V vaut 1.

Puisque V est toujours son propre modèle de Kirillov, $(\pi', GL_2(F'), V)$ est une représentation spéciale liée à un caractère μ de F'^*. Id est :

$$V = \{a \mapsto |a|_{F'}^{1/2} . \mu(a) f(a), f \in \mathscr{S}(F')\}.$$

Par définition de la série spéciale liée à μ, le caractère central de π' est $\mu^2 . |\ |_{F'}^{-1}$.

Par un calcul direct, on obtient qu'il est égal à $\omega_\pi \circ N_{F'/F}$.

D'autre part, d'après le lemme 10, on sait qu'il existe un caractère ω_1 de F'^* tel que :

(1) $$\forall a \in F^*, \quad |\omega_1(a)| = |\omega_\pi(a)|.$$

(2) $$\omega_1 \neq \omega_1^\sigma.$$

(3) $V \subset \{a \mapsto |a|_{F'}^{1/2} (\omega_1(a) f_1(a) + \omega_1^\sigma(a) f_2(a)), f_1 \in \mathscr{S}(F'), f_2 \in \mathscr{S}(F')\}.$

De l'indépendance algébrique des caractères de F'^*, on déduit que μ est égal soit à ω_1, soit à ω_1^σ. On a donc :

$$\forall a \in F^*, \quad |\mu(a)| = |\omega_1(a)| = |\omega_\pi(a)|.$$

ce qui contredit l'égalité $\mu^2 . |\ |_{F'}^{-1} = \omega_\pi \circ N_{F'/F}$.

Par conséquent, seul le troisième cas est possible.

Troisième cas. — $\mathscr{S}(F'^*)$ est de codimension deux dans V. V est alors égal à $\mathscr{C}$ et la proposition est démontrée. □

COROLLAIRE. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale.*

(1) *S'il existe un caractère ω de F'^* tel que π est équivalente à $\pi(\omega)$, alors ω est distinct de ω^σ et π' est la représentation de la série principale $\rho(\omega, \omega^\sigma)$.*

(2) *Sinon, π' est irréductible cuspidale.*

Donc, sauf si π est la représentation de la série principale $\rho(\mu_1, \mu_1 |\ |_F^{-1} \cdot \chi_{F'/F}) \pi'$ est irréductible. Mais π' possède un unique quotient irréductible non nul, y compris dans ce cas exceptionnel. Dans ce cas, il est de dimension 1.

Dans la quatrième partie, on appellera encore π' ce quotient irréductible et on étudiera la correspondance $\pi \mapsto \pi'$.

Démonstration du lemme 9. — Il reste à prouver la deuxième partie de ce lemme. On va utiliser le lemme suivant :

LEMME 12. — *Soient* α *et* β *deux éléments quelconques de* F^* *et soit* W *un élément de* $\mathcal{W}_\pi^\psi$.

(1) *Quel que soit* g *appartenant à* $GL_2(F)$, *l'application*

$$V^W_{\alpha,\beta}: \quad F \to \mathbb{C},$$

$$n \mapsto W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\psi_F(n)$$

est intégrable pour la mesure dn définie sur F.

(2) L'*application*

$$g \mapsto \int_F W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\psi_F(n)\,dn$$

est une fonction de Whittaker et il existe un nombre complexe $c(\alpha, \beta)$ *tel qu'elle est égale à* $c(\alpha, \beta)\,W$.

Démonstration. — On va montrer que l'application $V^W_{\alpha,\beta}$ est à support compact dans F. Comme elle est localement constante, elle est intégrable pour la mesure dn de F. Quitte à changer W, on peut supposer que g est la matrice identité.

Soit k un entier naturel tel que W est invariante par translation à droite par n'importe quel élément de $N_k = \begin{pmatrix}1+\omega^k R & \omega^k R\\ \omega^k R & 1+\omega^k R\end{pmatrix}$.

Supposons que $v(n) \leq -k$. D'après l'égalité matricielle :

$$w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\alpha & 0\\ 0 & n\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -n^{-1}\alpha^{-1}\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\beta.\alpha^{-1}n^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ n^{-1} & 1\end{pmatrix}$$

on a :

$$W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\psi_F(n^{-1}.\alpha^{-1}.\beta)$$
$$\times\,\omega_\pi(n\alpha)\,W\left(\begin{pmatrix}\beta.\alpha^{-1}n^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Puisque π est cuspidale, ce dernier terme est nul quand $v(n)$ est assez négatif. D'où l'assertion.

(2) Considérons le morphisme $\mathbb{C}$-linéaire A de $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ dans l'ensemble Y des fonctions f de $GL_2(F)$ à valeurs complexes, localement constantes et telles que :

$$\forall g \in GL(F), \quad \forall n \in F, \qquad f(ng) = \psi_F^-(n) f(g).$$

$$A: \quad W \mapsto \left(g \mapsto \int_F W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)\psi_F(n)\,dn\right).$$

A est un opérateur d'entrelacement entre la représentation irréductible π et la représentation de translation à droite que Y. A est donc soit nul soit injectif. Si A est injectif, l'image de A est aussi le modèle de Whittaker $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ de π. Le lemme de Schur assure que A est une homothétie de $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ dont le rapport est le nombre complexe $c(\alpha, \beta)$.

L'application $V_{\alpha,\beta}^W$ est égale à l'application $\omega_\pi(\beta)\, V_{\alpha.\beta^{-1},1}^W$. On en déduit

$$c(\alpha, \beta) = \omega_\pi(\beta)\, c(\alpha.\beta^{-1}, 1).$$

Pour $\alpha \in F^*$, on pose $c(\alpha) = c(\alpha, 1)$.

Achevons maintenant la démonstration du lemme 9. Soient f un élément de $\mathscr{S}(E \times F^*)$, W un élément de $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$. Soit a un élément de F^*. On a l'égalité :

$$|a|_F^{-1/2} K_{f,W}(a) = \int_{N \backslash G} W(g)\, \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{f}(0, 1, \bar{a}^{-1}, a\bar{a})\, dg,$$

c'est-à-dire que :

$$|a|_F^{-1/2}\, c(\alpha, \beta)\, K_{f,W}(a) = \int_{N \backslash G}\left(\int_N W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} ng\right)\psi_F(n)\,dn\right)$$
$$\tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{f}(0, 1, \bar{a}^{-1}, a\bar{a})\, dg.$$

(en confondant toujours la matrice $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et l'élément n de F).

Considérons la fonction $C_{f,W}$:

$$GL_2(F) \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto W(g)\, \tilde{r}_\psi\left(\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & \beta^{-1}\end{pmatrix} wg\right)\tilde{f}(0, 1, \bar{a}^{-1}, a\bar{a}).$$

La fonction $C_{f,\,W}$ est intégrable pour la mesure dg de G si la fonction :

$$(c,\,h,\,n)\mapsto \left| W\left(\begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\right)\right| \; \Big| \times \int_{F'} \tilde{r}_\psi\left(\begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\right) \tilde{\mathcal{J}}(-\beta^{-1},\, -n\beta^{-1},\, b,\, a\bar{a}\alpha\beta) \times \psi_F(nb\bar{b}a\bar{a}\alpha\beta)\,\psi_F(\beta\,\mathrm{Tr}(a\bar{b}))\,db\,\Big| \,.\, |hc^{-1}|_F$$

est intégrable pour la mesure produit $d^*c\,d^*h\,dn$ de $F^*\times F^*\times F$.

Et cette fonction est intégrable si la fonction :

$$(c,\,h,\,b,\,n)\mapsto \left| W\left(\begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\right)\right| \,.\, |\tilde{\mathcal{J}}(-\beta^{-1}.c,\, -n\beta^{-1} \times h,\, bc,\, a\bar{a}\alpha\beta/ch)|\,|hc^{-1}|_F^{1/2}$$

est intégrable pour la mesure produit $d^*c\,d^*h\,db\,dn$ de $F^*\times F^*\times F'\times F$. Mais ceci est clair puisque π est cuspidale. Ce résultat permet d'utiliser le théorème de Fubini.

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} |a|_{F'}^{-1/2} K_{f,\,W}(a)\,c(\alpha,\,\beta) &= \int_G W(g)\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{\mathcal{J}}(0,\,1,\,\bar{a}^{-1},\,a\bar{a})\,dg \\ &= \int_{N\backslash G} W(g)\Big(\int_{F'\times F} \gamma_\psi(a\bar{a}\alpha\beta q)\,|a|_{F'}\,|\alpha|_F^{1/2}.\,|\beta|_F^{3/2}(\alpha,\,\xi) \\ &\quad \times \tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{\mathcal{J}}(-\beta^{-1},\,-n\beta^{-1},\,b,\,a\bar{a}\alpha\beta) \\ &\quad \times \psi_F(nb\bar{b}a\bar{a}\alpha\beta-n+\beta.\,\mathrm{Tr}(\bar{a}b))\,db\,dn\Big)\,dg. \end{aligned}$$

Posons, pour α et β donnés dans F^*

$$\begin{aligned} D_f^a = \int_{F'\times F} & \gamma_\psi(a\bar{a}\alpha\beta q)\,|a|_{F'}\,|\alpha|_F^{1/2}.\,|\beta|_F^{3/2}(\alpha\alpha,\,\xi) \\ & \times \tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{\mathcal{J}}(-\beta^{-1},\,-n\beta^{-1},\,b,\,a\bar{a}\alpha\beta) \\ & \times \psi_F(nb\bar{b}a\bar{a}\alpha\beta-n+\beta\,\mathrm{Tr}(\bar{a}b))\,dn\,db. \end{aligned}$$

Posons $x=-\beta^{-1}$ et effectuons le changement de variable $y=nx$. On obtient :

$$D_f^a=\int_{F'\times F}\gamma_\psi(-a\bar{a}\alpha x^{-1}q)\,|a|_{F'}\,|\alpha|_F^{1/2}\,|x|_F^{-5/2}(\alpha,\xi)$$
$$\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{f}(x,y,b,-a\bar{a}\alpha x^{-1})$$
$$\times\psi_F(-yx^{-2}b\bar{b}a\bar{a}\alpha-yx^{-1}-x^{-1}\operatorname{Tr}(\bar{a}b))\,dy\,db.$$

Soit A un élément quelconque de F'^*. Afin de fixer la dernière variable de la fonction $\tilde{r}_\psi(g)\tilde{f}$, posons : $\alpha=-xA\bar{A}(a\bar{a})^{-1}$. On a l'égalité :

$$D_f^a=\gamma_\psi(A\bar{A}q)\,|a|_{F'}^{1/2}\,|A|_{F'}^{1/2}\,|x|_F^{-2}(-x,\xi)\,E_f^A,$$

avec :

$$E_f^A=\int_{F'\times F}\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{f}(x,y,b,A\bar{A})\,\psi_F(yx^{-1}(A\bar{A}b\bar{b}-1)$$
$$-x^{-1}\operatorname{Tr}(\bar{a}b))\,dy\,db.$$

Faisons le changement de variable $b=\bar{A}^{-1}+\bar{m}x$ (x est en effet non nul). On a :

$$E_f^A=\int_{F'\times F}|x|_F^2\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{f}(x,y,\bar{A}^{-1}+\bar{m}x,A\bar{A})$$
$$\times\psi_F(yx^{-1}(Amx+\bar{A}\bar{m}x+m\bar{m}x^2))$$
$$=\int_{F'\times F}|x|_F^2\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{f}(x,y,\bar{A}^{-1}+\bar{m}x,A\bar{A})$$
$$\times\psi_{F'}(y(A\bar{A})\bar{A}^{-1}.m)\,\psi_F(yxm\bar{m})$$
$$\times\psi_{F'}(-x^{-1}.aA^{-1})\,\psi_{F'}(-am)\,dm\,dy.$$

De la relation (R_2), on déduit :

$$E_f^A=\int_{F'\times F}|x|_F^2\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}\left(\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\tilde{f}(x,y,\bar{A}^{-1},A\bar{A})$$
$$\times\psi_{F'}(-x^{-1}.aA^{-1})\,\psi_{F'}(-am)\,dm\,dy.$$

On obtient finalement :

$$|a|_{F'}^{-1/2} K_{f,\,W}(a)\, c(-x A\bar{A}(a\bar{a})^{-1},\ -x^{-1})$$
$$=|a|_{F'}^{-1/2}\, \omega_\pi(-x^{-1}) K_{f,\,W}(a)\, c(x^2 A\bar{A}(a\bar{a})^{-1})$$
$$=(-x,\ \xi)\gamma_\psi(A\bar{A}q)\,|a A|_{F'}^{1/2}\, \psi_{F'}(-x^{-1}.a A^{-1})$$
$$\times \int_{F'} \psi_{F'}(-am)\left(\int_{N/G} W(g)\left(\int_F \tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}\left(\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \bar{f}(x,\ y,\ \bar{A}^{-1},\ A\bar{A})\,dy\right)dg\right)dm.$$

Soit Φ la fonction :

$$F' \times F^* \to \mathbb{C},$$

$$(m,\ x) \mapsto \Phi(m,\ x)$$
$$=\int_{N\diagdown G} W(g)\left(\int_F \tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\bar{f}(x,\ y,\ \bar{A}^{-1},\ A\bar{A})\,dy\Big)dg.$$

Alors, on obtient que :

$$(\mathrm{E}_1):\quad \int_{F'} \Phi_{(m,\ x)}\, \psi_{F'}(-am)\,dm$$
$$=|a|_{F'}^{-1}\,|A|_{F'}^{-1/2}\,\gamma_\psi(A\bar{A}q)^{-1}\,\psi_{F'}(x^{-1}.a A^{-1})\,\omega_\pi(-x^{-1})$$
$$\times c(x^2 A\bar{A}(a\bar{a})^{-1})(-x,\ \xi) K_{f,\,W}(a).$$

Soit x fixé dans F^* et considérons la fonction

$$\Phi_x:\quad F' \to \mathbb{C},$$
$$m \mapsto \Phi(m,\ x).$$

Elle est localement constante et l'égalité

$$\Phi_x(m)=\int_{F^*\times F^*\times K} W\left(\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}k\right)|dc^{-1}|_F^{1/2}(c,\ \xi)$$
$$\left(\int_F (\tilde{r}_\psi(k)\bar{f})(cx,\ dy,\ c(\bar{A}^{-1}+\bar{m}x),\ A\bar{A}/cd)\right.$$
$$\left.\times\, \psi_{F'}(A\,ym)\,\psi_F((m\bar{m}yx)A\bar{A})\,dy\right)d^*c\,d^*d\,dk.$$

assure que Φ_x est à support compact dans F' (π est cuspidale).

On peut considérer sa transformée de Fourier $b \mapsto \int_{F'} \Phi_x(m)\psi_{F'}(bm)\,dm$ et par inversion de Fourier, on a :

$$\int_{F'}\left(\int_{F'} \Phi(m, x)\psi_{F'}(-am)\,dm\right)da = \Phi_x(0)$$

$$= \int_{N\setminus G} W(g)\left(\int_F \tilde{r}_\psi(g)\tilde{f}(x, y, \bar{A}^{-1}, A\bar{A})\,dy\right)dg.$$

De l'égalité (E_1), on déduit que le membre de gauche est égal à :

$$(E_2): \quad (-x, \xi)\,|A|_{F'}^{1/2}\,\gamma_\psi(A\bar{A}q)^{-1}\,\omega_\pi(-x^{-1})$$

$$\times \int_{F'} |a|_{F'}^{-1}\,\psi_{F'}(x^{-1}.\,aA^{-1})\,c(x^2 A\bar{A}(a\bar{a})^{-1})\,K_{f,\,W}(a)\,da.$$

LEMME 13. — *La fonction*

$$(x, a) \mapsto (-x, \xi)\,\omega_\pi(-x^{-1})\,|a|_{F'}^{-1}$$

$$\times \psi_{F'}(x^{-1}aA^{-1})\,c(x^2 A\bar{A}(a\bar{a})^{-1})\,K_{f,\,W}(a)$$

est absolument intégrable pour la mesure produit $dx\,da$ de $F \times F'$.

Admettons momentanément ce lemme. L'égalité (E_2) et ce lemme assurent la convergence de l'intégrale I_A égale à :

$$\int_F |A|_{F'}\,\psi_F(-xA\bar{A})\left(\int_{F'}\left(\int_{F'} \Phi(m, x)\psi_{F'}(-am)\,dm\right)da\right)dx,$$

et qui vaut :

$$\int_{N\setminus G} W(g)\left(\int_{F^2} \tilde{r}_\psi(g)\tilde{f}(x, y, \bar{A}^{-1}, A\bar{A}) \quad \times \psi_F(-xA\bar{A})\,|A|_{F'}\,dx\,dy\right)dg.$$

D'après les relations (R_3) et (R_1), on a :

$$I_A = |A|_{F'}^{-1/2}\left(\int_{N\setminus G} W(g)\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}\left(\begin{pmatrix} -\bar{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right.$$

$$(E_3) \qquad \left. \times \tilde{R}(w)\tilde{f}(0, 1, 1, 1)\,dg\right)$$

c'est-à-dire :

$$I_A = |A|_{F'}^{-1/2}\,K_{R(w)\,f,\,W}(-\bar{A}).$$

D'autre part, l'égalité (E_2) donne que :

$$I_A=\int_F\left(\int_{F'}(-x,\ \xi)\,|A|_{F'}^{1/2}\,\gamma_\psi(A\bar{A}q)^{-1}\right.$$
$$\times\,\omega_\pi(-x^{-1})\,|a|_{F'}^{-1}\,\psi_{F'}(x^{-1}.\,a\,A^{-1})\,\psi_F(-x\,A\bar{A})$$
$$\left.c\,(x^2\,A\bar{A}\,(a\bar{a})^{-1})\,K_{f,\,W}(a)\,da\right)dx.$$

D'après le lemme 13, on peut utiliser le théorème de Fubini. I_A est donc égale à :

$$\int_{F'}K_{f,\,W}(a)\,|a|_{F'}^{-1}\,|A|_{F'}^{1/2}\,\gamma_\psi(A\bar{A}q)^{-1}$$
$$\times\left(\int_F(-x,\ \xi)\,\omega_\pi(-x^{-1})\,\psi_{F'}(x^{-1}\,a\,A^{-1})\right.$$
$$\left.\times\,\psi_F(-x\,A\bar{A})\,c\,(x^2\,A\bar{A}\,(a\bar{a})^{-1})\,dx\right)da.$$

Finalement, en confrontant cette égalité à l'égalité (E_3) :

$$K_{R(w)\,f,\,W}(A)=\int_{F'}K_{f,\,W}(a)\,L\,(a,\ A)\,da=|A|_{F'}^{1/2}\,I_{(-\bar{A})},$$

avec :

$$L\,(a,\ A)=\gamma_\psi(A\bar{A}q)^{-1}\,|A|_{F'}\,|a|_{F'}^{-1}\int_F(-x,\ \xi)\,\omega_\pi(-x^{-1})$$
$$\times\,\psi_{F'}(-x^{-1}\,a\,\bar{A}^{-1})\,\psi_F(-x\,A\bar{A})\,c\,(x^2\,A\bar{A}\,(a\bar{a})^{-1})\,d\alpha\beta$$

Démonstration du lemme 13. — Soit r le nombre réel tel que, quel que soit z appartenant à F^* :

$$|\omega_\pi(z)|=|z|_{F'}^{r}.$$

LEMME 14. — (1) *Il existe $c_1>0$ telle que, quel que soit a appartenant à F'^*, si $|a|_{F'}>c_1$, alors $K_{f,\,W}(a)$ est nul.*

(2) *Il existe $c_2>0$ telle que, quel que soit a appartenant à F'^*,*

$$|K_{f,\,W}(a)|\leqslant c_2\,|a|_{F'}^{(r+1)/2}.$$

C'est une reformulation des lemmes 3 et 10.

LEMME 15. — (1) *Il existe une constante $c_3>0$ telle que, quel que soit α appartenant à F^*, si $|\alpha|_F>c_3$, alors $c(\alpha)$ est nul.*

(2) *Il existe une constante* $c_4 > 0$ *telle que, quel que soit* α *apartenant à* F^* :

$$|c(\alpha)| \leqslant c_4 |\alpha|_F^{r/2-1/4},$$

Démonstration. — Soit W appartenant à $\mathscr{W}_\pi^{\psi-}$ telle que $W(\mathrm{Id})=1$. On a :

$$c(\alpha)=\int_F W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_F(n)\,dn.$$

Soit m un entier naturel tel que W soit invariante par translation à droite par le groupe N_m et tel que ψ_F soit trivial sur $\omega^m R$.

Posons :

$$a(\alpha)=\int_{\omega^{-m}R} W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_F(n)\,dn$$

et

$$b(\alpha)=\int_{F-\omega^{-m}R}\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_F(n)\,dn.$$

On a : $c(\alpha)=a(\alpha)+b(\alpha)$.

D'après l'égalité

$$w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}$$

et puisque $\omega^{-m}R$ est compact, il existe un entier q, q constantes λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_q$ et q fonctions de $\mathscr{W}_\pi^{\psi-}$ $W_1, W_2, \ldots, W_q$ tels que :

$$a(\alpha)=\textstyle\sum_{i=1}^q \lambda_i\,\omega_\pi(\alpha)\left(W_i\begin{pmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Comme π est cuspidale, il existe une constante C telle que, quel que soit α appartenant à F^* : si $|\alpha|_F > C$, alors $a(\alpha)$ est nul.

De l'égalité

$$w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\alpha & 0\\ 0 & n\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-n^{-1} & \alpha^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\alpha^{-1}.n^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ n^{-1} & 1\end{pmatrix}$$

vraie quel que soit l'élément n de F non nul, on déduit la relation, pour tout n appartenant à $F-\omega^m R$:

$$W\left(w^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\omega_\pi(n\alpha)$$
$$\times\psi_F(n^{-1}.\alpha^{-1})\,W\left(\begin{pmatrix}\alpha^{-1}.n^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Puisque π est cuspidale, il existe une constante λ telle que si $v(\alpha)$ est inférieure à λ, cette dernière expression est nulle et donc $b(\alpha)=0$.

La première partie du lemme est démontrée.

(2) Fixons maintenant W telle que la fonction $x\mapsto W\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est la fonction caractéristique de R^*. *La fonction* $\alpha\to b(\alpha)$ s'annule seulement si $v(\alpha)$ est inférieure à $2m$ ou si $v(\alpha)$ est impaire. Soit $v(\alpha)=2h$ avec $h>m$.

Effectuons le changement de variable $n=\omega^{-h}x$ dans l'intégrale $b(\alpha)$. On obtient que :

$$b(\alpha)=\omega_\pi(\omega^{-h}\alpha)\,|\omega|_F^{-h}\int_{R^*}\omega_\pi(x)\,\psi_F(\omega^{-h}x+\omega^h x^{-1}.\alpha^{-1})\,dx.$$

Posons

$$s(\alpha)=\int_{R^*}\omega_\pi(x)\,\psi_F(\omega^{-h}x+\omega^h x^{-1}.\alpha^{-1})\,dx.$$

Soit n_ψ le conducteur de ψ_F. Soit t un entier tel que ω_π est trivial sur $1+\omega^t R$.

Pour tout réel y, notons $E(y)$ la partie entière de y. Soit h tel que $E((n_\psi+h)/2)+1$ est supérieur à t et soit u l'entier égal à $1+E((n_\psi+h)/2)$.

Pour y dans R, faisons le chargement de variable dans $s(\alpha)=(1+\omega^u y)z$.

De l'égalité $(1+\omega^u y)(1-\omega^u y)=1-\omega^{2u}y$, on déduit que $(1+\omega^u y)^{-1}$ est congru à $1-\omega^u y$ modulo $\omega^{2u}R$.

Puisque ω_π est trivial sur $1+\omega^u R$ et que ψ_F est trivial sur $\omega^{2u}R$, on a :

$$(\mathrm{E}')\quad s(\alpha)=\int_{R^*}\omega_\pi(z)\,\psi_F(\omega^{-h}z+\omega^h.\alpha^{-1}.z^{-1}$$
$$+\omega^u y(\omega^{-h}z-\omega^h.\alpha^{-1}.z^{-1}))\,dz.$$

Soit

$$E_\alpha = \{ z \in R^*,\ u + v(\omega^{-h} z - \omega^k . \alpha^{-1} . z^{-1}) \geqq n_\psi \}.$$

On a :

$$E_\alpha = \{ z \in R^*,\ v(z^2 - \omega^{2h} . \alpha^{-1}) \geqq n_\psi + h - u \}.$$

Intégrons en y et sur R les deux membres de (E'). Par définition de n_ψ, on obtient que :

$$s(\alpha) = \int_{E_\alpha} \omega_\pi(z) \psi_F(\omega^{-h} z + \omega^h . \alpha^{-1} z^{-1})\, dz.$$

Donc :

$$|s(\alpha)| \leqq \operatorname{mes}(E_\alpha).$$

Si E_α est non vide, soit z_0 un élément de E_α. Soit q l'entier naturel égal à la valuation de 2. Soit V_h l'union des deux ensembles $1 + \omega^{n_\psi + h - u} R$ et de $-1 + \omega^{n_\psi + h - u} R$. On vérifie facilement que, quel que soit h supérieur à $2(2+q)$, on a : $E \subset z_0 V_h$.

Soit

$$D = \{ \alpha \in F^*,\ v(\alpha) = 2h,\ h \geqq 2q + 4,\ E((n_\psi + h)/2) + 1 \geqq t \}.$$

D'après l'inclusion $E_\alpha \subset z_0 V_h$, il existe une constante λ_1 positive et indépendante de h et de α telle que, quel que soit α dans D :

$$|s(\alpha)| \leqq \lambda_1 |\omega|_F^{h-u}.$$

Il existe alors une constante λ_2 telle que, pour $\alpha \in D$:

$$|b(\alpha)| \leqq \lambda_2 |\omega|_F^{h(r-1/2)} = \lambda_2 |\alpha|_F^{r/2 - 1/4}.$$

Pour résumer, on a :

(1) si $v(\alpha) \leqq 2m$, $b(\alpha) = 0$;

(2) si $v(\alpha)$ est impair, $b(\alpha) = 0$;

(3) si $v(\alpha) = 2h$ avec $h \geqq \sup(2q + 4,\ 2(t+1) - n_\psi)$,

alors α appartient à D et on a :

$$|b(\alpha)| \leqq \lambda_2 |\alpha|_F^{r/2 - 1/4}.$$

Soit

$$H_m = \{ \alpha \in F^*,\ 2m + 1 \leqq v(\alpha) \leqq 2 \sup(2q + 4,\ 2(t+1) - n_\psi) \}.$$

Si H_m est vide, soit $\lambda_3=0$. Si H_m n'est pas l'ensemble vide, soit :

$$\lambda_3=\sup(\{|b(\alpha)|/|\alpha|_F^{r/2}, \alpha\in H_m\}).$$

λ_3 est un nombre réel puisque la fonction $\alpha\mapsto b(\alpha)$ est localement constante.

Soit $\lambda_4=\sup(\lambda_3, \lambda_2)$. On obtient, pour tout α dans F :

$$|b(\alpha)|\leqq\lambda_5|\alpha|_F^{r/2-1/4}.$$

Par ailleurs, comme la fonction $\alpha\rightarrow a(\alpha)$ est à support compact dans F^*, il existe une constante λ_5 telle que, quel que soit α dans F^* :

$$|a(\alpha)|\leqq\lambda_5|\alpha|_F^{r/2-1/4}.$$

Soit $c_4=2\sup(\lambda_4, \lambda_5)$. On a, pour tout α dans F^* :

$$|c(\alpha)|\leqq c_4|\alpha|_F^{r/2-1/4}.$$

D'après ces deux lemmes, quelles que soient f appartenant à $\mathscr{S}(E\times F^*)$ et W à $\mathscr{W}_\pi^{\psi-}$, il existe un compact K_1 de F et un compact K_2 de F', il existe une constante λ positive telle que, quels que soient x appartenant à F^* et a à F'^* :

$$|(-x, \xi)\,\omega_\pi(-x^{-1})|a|_{F'}^{-1}\psi_{F'}(x^{-1}aA^{-1})c(x^2A\bar{A}(a\bar{a})^{-1}K_{f,W}(a)|$$
$$\leqq|a|_{F'}^{-1/4}|x|_F^{-1/2}\mathbf{1}_{K_1}(x)\mathbf{1}_{K_2}(a).$$

Cette majoration démontre le lemme 13.

4. Correspondance de Langlands entre $GL_2(F)$ et $GL_2(F')$

On a mis en évidence une correspondance entre les représentations irréductibles de dimension infinie de $GL_2(F)$ et des représentations irréductibles de $GL_2(F')$. Si π est une telle représentation de $GL_2(F)$ on note $\mathscr{C}(\pi)$ son image par cette correspondance. On note d'autre part $\mathscr{L}(\pi)$ son image par le changement de base de Langlands.

PROPOSITION 4. — *Soit π une représentation irréductible de dimension infinie de $GL_2(F)$. On a l'égalité : $\mathscr{C}(\pi)=\mathscr{L}(\pi)$.*

Démonstration. — Soient μ_1 et μ_2 deux caractères du groupe multiplicatif d'un corps local. On notera $\rho(\mu_1, \mu_2)$ la série principale associée quand celle-ci est irréductible, $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ la représentation spéciale et $\pi(\mu_1, \mu_2)$ le seul quotient irréductible non nul – de dimension finie ou infinie – de $B(\mu_1, \mu_2)$ (*cf.* notations de [4], page 122).

On rappelle que si μ est un caractère de F^*, μ' est le caractère $\mu \circ N_{F'/F}$ de F'^*.

La correspondance $\mathscr{C}$ vérifie :

(1) $$\mathscr{C}(\rho(\mu_1, \mu_2)) = \pi(\mu'_1, \mu'_2).$$

(2) $$\mathscr{C}(\sigma(\mu_1, \mu_2)) = \sigma(\mu'_1, \mu'_2).$$

(3) Si π est cuspidale et s'il existe un caractère ω de F'^* tel que π est équivalente à $\pi(\omega)$, alors :

$$\mathscr{C}(\pi) = \rho(\omega, \omega^\sigma).$$

(4) Si π est cuspidale sans être du type $\pi(\omega)$, alors $\pi' = \mathscr{C}(\pi)$ est aussi cuspidale.

On sait que le changement de base de Langlands vérifie aussi les trois premières égalités (*cf.* [4], page 117).

Pour prouver la proposition, introduisons les fonctions L et les facteurs ε d'un produit de deux représentations (*cf.* [6] et [7], page 480).

Soient π (resp. π') une représentation irréductible de dimension infinie de $GL_2(F)$ (resp. de $GL_2(F')$). Supposons π cuspidale et supposons qu'il n'existe aucun caractère ω de F'^* tel que π est équivalente à $\pi(\omega)$. Soit $\tilde{\pi}$ la contragrédiente de π et $\tilde{\pi}'$ celle de π'. On a les propriétés suivantes :

(1) Quel que soit le caractère χ de F'^*, on a l'égalité :

$$\forall s \in \mathscr{C}, \quad L(s, \pi \times \pi(\chi)) = L(s, \tilde{\pi} \times \pi(\chi^{-1})) = 1.$$

(2) La représentation π' est égale à $\mathscr{L}(\pi)$ si, quel que soit le caractère χ de F'^* :

(*a*) le caractère central de π' est $\omega_\pi \circ N_{F'/F}$.

(*b*) $L(s, \pi' \otimes \chi) = L(s, \tilde{\pi}' \otimes \chi) = 1$.

(*c*) $\varepsilon(s, \pi \times \pi(\chi), \psi_F) = (\gamma_{q_1}(1))^2 \varepsilon(s, \pi' \otimes \chi, \psi_{F'})$.

(*cf.* [7], pages 480, 481 et 484).

On a d'ailleurs : $(\gamma_{q_1}(1))^2 = (-1, \xi)$ (*cf.* [14], page 177 ou [3], page 42).

Soit π comme en 4) (id est π est cuspidale et il n'existe aucun caractère ω de F'^* tel que π est équivalente à $\pi(\omega)$) et soit $\pi' = \mathscr{C}(\pi)$ qui est alors cuspidale.

On sait déjà que le caractère central de π' est $\omega_\pi \circ N_{F'/F}$. Comme π' est cuspidale, l'égalité (*b*) sur les fonctions *L* est vraie. Pour obtenir que π' est $\mathscr{L}(\pi)$, il reste à établir l'égalité (*c*) sur les facteurs ε.

A cet effet, soit W' un élément quelconque du modèle de Whittaker de π' associé au caractère additif $\psi_{F'}$. Soient χ un caractère quelconque de F' et s un nombre complexe. Formons l'intégrale

$$I_{W'}(s)=\int_{F'^*} W'\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\chi(a)\,|a|_{F'}^{s-1/2}\,d^*a.$$

Il existe W dans le modèle de Whittaker de π et f dans $\mathscr{S}(E\times F^*)$ telle que, quel que soit g_1 *dans* $GL_2(F')$,

$$W'(g_1)=\int_{N/G} W(g)\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0,\,1,\,1,\,1)\,dg.$$

Supposons que f est de la forme : $\tilde{f}(x,\,y,\,b,\,u)=f_1(x,\,y).f_2(b,\,u)$ avec f_1 dans $\mathscr{S}(F^2)$ et f_2 dans $\mathscr{S}(E\times F^*)$.

Soient x et y les deux réels tels que :

(1) $$\forall a\in F'^* \quad |\chi(a)|=|a|_{F'}^{y}.$$

(2) $$\forall \lambda\in F^*, \quad |\omega_\pi(\lambda)|=|\lambda|_F^{x}.$$

Introduisons les fonctions :

$$W_{f_2}^s:\quad GL_2(F)\to\mathbb{C},$$

$$g\mapsto|\det g|_F^{-s}\int_{F'^*}(\rho_\psi(g)\,f_2)(-\bar{a}^{-1},\,-a\bar{a})\,\chi(a)\,|a|_{F'}^{s}\,d^*a$$

et

$$f^s:\quad GL_2(F)\to\mathbb{C},$$

$$g\mapsto|\det g|_F^{s}\int_{F^*}|\lambda|_F^{2s}\,\omega_\pi(\lambda)\,\chi(\lambda)(\lambda)(\lambda,\,\xi)\,f_1((0,\,\lambda)g)\,d^*\lambda.$$

$W_{f_2}^s$ est définie quelle que soit la fonction f_2 de $\mathscr{S}(F'\times F^*)$ et quel que soit le nombre complexe s. La fonction f^s l'est quelle que soit la fonction f_1 de $\mathscr{S}(F^2)$ et quel que soit le nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s)>-x/2-y$.

Soit enfin η la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

LEMME 16. — *Pour* $\mathrm{Re}(s) > -x/2 - y$, *on a l'égalité :*

$$I_{W'}(s) = (-1, \xi) \int_{NZ\backslash G} W(g)\, W^s_{f_2}(\eta g)\, f^s(g)\, dg.$$

Démonstration. — On a les égalités,

$$I_{W'}(s) = \int_{N\backslash G} W(g)\left(\int_{F'^*} \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{f}(0, 1, \bar{a}^{-1}, a\bar{a})\, \chi(a)\, |a|^s_{F'}\, d^* a\right) dg$$

$$= \int_{N\backslash G} W(g)\, f_1((0,1)g)\left(\int_{F'^*} (\rho_\psi(g) f_2)(\bar{a}^{-1})\, \chi(a)\, |a|^s_{F'}\, d^* a\right) dg$$

$$= \int_{NZ\backslash G} W(g) \int_{F^*} \omega_\pi(\lambda)\, f_1((0, \lambda) g)$$

$$\times \left(\int_{F'^*} (\lambda, \xi)(\rho_\psi(g) f_2)\left(\lambda \bar{a}^{-1}, \frac{a\bar{a}}{\lambda^2}\right)\right.$$

$$\left. \times \chi(a)\, |a|^s_{F'}\, d^* a\right) d^* \lambda\, dg$$

$$= \int_{NZ\backslash G} W(g)\left(\int_{F'^*} (\rho_\psi(g) f_2)(\bar{a}^{-1}, a\bar{a})\, \chi(a)\, |a|^s_{F'}\, d^* a\right)$$

$$\times \left(\int_{F^*} |\lambda|^2_{F^s}\, \omega_\pi(\lambda)\, \chi(\lambda)\, (\lambda, \xi)\, f_1((0, \lambda) g)\, d^* \lambda\right) dg$$

$$= (-1, \xi) \int_{NZ\backslash G} W(g)\, W^s_{f_2}(\eta g)\, f^s(g)\, dg. \quad \square$$

LEMME 17. — *Quel que soit le nombre complexe s, l'espace des fonctions* $\{ W^s_{f_2}, f_2 \in \mathcal{S}(F' \times F^*) \}$ *est le modèle de Whittaker de la représentation* $\pi(\chi)$ *associé au caractère additif* ψ^-_F.

Démonstration. — Comme lors de l'étude de $\mathscr{C}(\pi)$ quand π est cuspidale (*cf.* [8], page 13), l'espace des fonctions

$$\left\{ g \mapsto \int_{F'^*} (\rho_\psi(g) f_2)(-\bar{a}^{-1}, -a\bar{a})\, \chi(a)\, |a|^s_{F'}\, d^* a,\ f_2 \in \mathcal{S}(F' \times F^*) \right)$$

est le modèle de Whittaker de la représentation $\pi(\chi|\ |^s_{F'})$ relatif au caractère ψ^-_F. L'espace $\{ W^s_{f_2}, f_2 \in \mathcal{S}(F' \times F^*) \}$ est le modèle de Whittaker de la représentation $\pi(\chi|\ |^s_{F'}) \otimes |\ |^{-s}_F$ qui est équivalente à la représentation $\pi(\chi)$. $\square$

Pour introduire le facteur ε du produit des deux représentations π et $\pi(\chi)$, considérons la transformée de Fourier $\hat{f}_1$ de f_1

$$\hat{f}_2(x, y)=\int_{F^2} f_1(z, t)\,\psi_F(tx-zy)\,dz\,dt$$

et considérons la fonction (*cf.* page 12 et théorème 14.7, page 13 de [16]) définie pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$

$$h^s:\quad GL_2(F)\to\mathbb{C},$$

$$g\mapsto|\det g|_F^{1-s}\,\omega_\pi(\det g)^{-1}\,\chi(\det g)^{-1}(\det g, \xi)$$

$$\times\int_{F^*}|\lambda|_F^{2(1-s)}\,\omega_\pi(\lambda)^{-1}.\chi(\lambda)^{-1}.(\lambda, \xi).\,\hat{f}_1((0, \lambda)g)\,d^*\lambda.$$

Soit W_1 une fonction du modèle de Whittaker de π relatif au caractère ψ_F^- et W_2 une fonction du modèle de Whittaker de $\pi(\chi)$ relatif au caractère ψ_F^-.

La fonction $g\mapsto W_1(g)\,W_2(\eta g)\,f^s(g)$ est définie pour les nombres complexes s tels que $\mathrm{Re}(s)>-x/2-y$ et la fonction $g\mapsto W_1(g)\,W_2(\eta g)\,h^s(g)$ l'est pour les nombres complexes tels que $\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$. On supposera donc dorénavant que s est tel que : $-x/2-y<\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$. D'autre part, ces deux fonctions sont invariantes par translation à gauche par n'importe quel élément de ZN.

Puisque π est cuspidale, elles sont intégrables pour la mesure dg de $ZN\backslash G$ (*cf.* [6], pages 12 et 14).

LEMME 18. — *Soit s tel que : $-x/2-y<\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$. On a l'égalité :*

$$\int_{NZ\backslash G} W_1(g)\,W_2(\eta g)\,f^s(g)\,dg=\frac{(-1, \xi)\,\chi(-1)}{\varepsilon(s, \pi\times\pi(\chi), \psi_F^-)}\times\int_{NZ\backslash G} W_1(g)\,W_2(\eta g)\,h^s(g)\,dg.$$

Démonstration. — C'est le théorème 14.8, page 20 de [6] au changement près de ψ_F en ψ_F^-. (Rappelons que les fonctions $L(s, \pi\times\pi(\chi))$ et $L(s, \tilde{\pi}\times\pi(\chi^{-1}))$ sont identiquement égales à 1.) □

Appliquons ce lemme au cas particulier suivant : $W_1 = W$ et $W_2 = W^{\tau}_{f_2}$ (toujours pour des valeurs de s dans la bande $-x/2-y<\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$). On obtient grâce aux lemmes 16 et 18 :

$$I_{W'}(s)=\frac{\chi(-1)}{\varepsilon(s,\pi\times\pi(\chi),\psi_F^-)}\int_{ZN\backslash G} W(g)\,W^{\tau}_{f_2}(\eta g)\,h^s(g)\,dg.$$

LEMME 19. — *Soit s tel que* $\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$. *On a l'égalité :*

$$\int_{ZN\backslash G} W(g)\,W^{\tau}_{f_2}(\eta g)\,h^s(g)\,dg=(-1,\xi)\,\chi(-1)\,\epsilon(s,\pi'\otimes\chi,\psi_{F'})\,I_{W'}(s).$$

Déduisons tout de suite la proposition de ce lemme. On obtient en effet :

$$I_{W'}(s)=\frac{(-1,\xi)\,\epsilon(s,\pi'\otimes\chi,\psi'_F)}{\varepsilon(s,\pi\times\pi(\chi),\psi_F^-)}\,I_{W'}(s).$$

(expression valide pour s tel que $-x/2-y<\mathrm{Re}(s)<1-x/2-y$.

On sait que

$$\varepsilon(s,\pi\times\pi(\chi),\psi_F^-)=\varepsilon(s,\pi\times\pi(\chi),\psi_F)\quad (cf.\ [6],\ \text{page } 21).$$

Comme on peut choisir W' tel que $I_{W'}(s)$ est non nul, on obtient l'égalité :

$$\varepsilon(s,\pi\times\pi(\chi),\psi_F)=(-1,\xi)\,\epsilon(s,\pi'\otimes\chi,\psi_{F'})=(\gamma_{q_1}(1))^2\,\epsilon(s,\pi'\otimes\chi,\psi_{F'}).$$

Démonstration du lemme 19.

Soit

$$J_s=\int_{NZ\backslash G} W(g)\,W^{\tau}_{f}(\eta g)\,h^s(g)\,dg.$$

(1) Dans l'expression de $h^s(g)$, faisons le changement de variable $\sigma=\lambda\det g$.

On obtient l'égalité :

$$h^s(g)=|\det g|_F^{-(1-s)}\Big(\int_{F^*}|\sigma|_F^{2(1-s)}\,\omega_\pi(\sigma)^{-1}\,\chi(\sigma)^{-1}\times(\sigma,\xi)\,\hat{f}_1((0,\sigma)\,g/\det g)\,d^*\sigma\Big).$$

On calcule facilement :

$$\hat{f}_1((0, \sigma)g/\det g) = |\det g|_F \int_{F^2} f_1((z, t)g)\psi_F(-\sigma z)\,dz\,dt.$$

Soit

$$M(\sigma, s) = |\sigma|_F^{2(1-s)}\omega_\pi(\sigma)^{-1}\chi(\sigma)^{-1}(\sigma, \xi).$$

On a l'égalité :

$$h^s(g) = |\det g|_F^s \int_{F^* \times F^2} M(\sigma, s) f_1((z, t)g)\psi_F(-\sigma z)\,d^*\sigma\,dz\,dt.$$

(2) On a :

$$W^s_{f_2}(\eta g)h^s(g) = (-1, \xi)\int_{F^{*\prime} \times F^* \times F} \chi(a)|a|_{F'}^s M(\sigma, s) \times f_1((z, t)g)(\rho_\psi(g)f_2)(\bar{a}^{-1}, a\bar{a}) \times \psi_F(-\sigma z)\,d^*a\,d^*\sigma\,dz\,dt.$$

D'après la relation (R_ψ), on a l'égalité :

$$f_1((z, t)g)(\rho_\psi(g)f_2)(\bar{a}^{-1}, a\bar{a}) = \tilde{r}_\psi(g)\tilde{f}(z, t, \bar{a}^{-1}, a\bar{a}).$$

Soit :

$$L(g, \sigma, a) = \int_{F^2} \tilde{r}_\psi(g) f(z, t, \bar{a}^{-1}, a\bar{a})\psi_F(-\sigma z)\,dz\,dt$$

et

$$N(g, s, a) = \int_{F^*} M(\sigma, s)L(g, \sigma, a)\,d^*\sigma.$$

On a :

$$W^s_{f_2}(\eta g)h^s(g) = (-1, \xi)\int_{F'^*} \chi(a)|a|_{F'}^s N(g, s, a)\,d^*a.$$

D'après la relation (R_3), on a l'égalité valable quel que soit λ dans F^* :

$$L(g, \lambda a\bar{a}, a) = |a|_{F'}^{-1}\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{f}(0, \lambda, -a^{-1}, a\bar{a}).$$

Or,

$$N(g, s, a) = \int_{F^*} M(\lambda a\bar{a}, s)\,L(g, \lambda a\bar{a}, a)\,d^*\lambda.$$

Donc,

$$N(g, s, a)=|a|_{F'}^{-1} M(a\bar{a}, s) \times \int_{F^*} M(\lambda, s)\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{f}(0, \lambda, -a^{-1}, a\bar{a})\, d^*\lambda.$$

Soit

$$m(a, s)=M(a\bar{a}, s)|a|_{F'}^{-1+s}\chi(a)=\omega_\pi(a\bar{a})^{-1}\chi(\bar{a})^{-1}|a|_{F'}^{1-s}.$$

Il vient que :

$$W_{f_2}^s(\eta g)h^s(g)=(-1, \xi)\int_{F'^*\times F^*} m(a, s)M(\lambda, s) \times \tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{f}(0, \lambda, -a^{-1}, a\bar{a})\, d^*a\, d^*\lambda.$$

Soit

$$I(g, s, \lambda)=\int_{F'^*} m(a, s)\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{f}(0, \lambda, -a^{-1}, a\bar{a})\, d^*a$$

et posons dans cette intégrale $a=-\bar{b}\lambda^{-1}$. Puisque la fonction $a\mapsto m(a, s)$ est un homomorphisme de F'^* dans $\mathbb{C}^*$ et que $m(-1, s)$ est égal à $\chi(-1)$, on obtient :

$$I(g, s, \lambda)=\chi(-1)m(\lambda^{-1}, s) \times \int_{F'^*} m(\bar{b}, s)\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{f}\left(0, \lambda, \lambda\bar{b}^{-1}, \frac{b\bar{b}}{\lambda^2}\right) db^*.$$

D'après la relation (R_1), on a :

$$I(g, s, \lambda)=\chi(-1)m(\lambda^{-1}, s) \times \int_{F'^*} |b|_{F'}^{-1/2} m(\bar{b}, s)\tilde{r}_\psi(g)\tilde{R}(w)\tilde{R}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \tilde{f}\left(0, \lambda, \lambda, \frac{1}{\lambda^2}\right) d^*b.$$

De cette égalité et des égalités :

$$(1) \qquad M(\lambda, s)m(\lambda^{-1}, s)=\omega_\pi(\lambda)(\lambda, \xi),$$

$$(2) \qquad (\lambda, \xi)\, \tilde{r}_{\psi}(g)\, \tilde{f}\left(0, \lambda, \lambda, \frac{1}{\lambda^2}\right) = \tilde{r}_{\psi}(\lambda g)\, \tilde{f}(0, 1, 1, 1),$$

on déduit que :

$$M(\lambda, I(g, s, \lambda) = \omega_{\pi}(\lambda g, s, 1).$$

D'après l'égalité

$$W_{f}^{s}(g)\, h^{s}(g) = (-1, \xi) \int_{F^{*}} M(\lambda, s)\, I(g, s, \lambda)\, d^{*}\lambda,$$

on obtient :

$$W_{f_2}^{s}(g)\, h^{s}(g) = (-1, \xi) \int_{F^{*}} \omega_{\pi}(\lambda)\, I(\lambda g, s, 1)\, d^{*}\lambda.$$

(3) Donc :

$$\begin{aligned} J_s &= (-1, \xi) \int_{N \backslash G} W(g)\, I(g, s, 1)\, dg \\ &= (-1, \xi)\, \chi(-1) \int_{N \backslash G} W(g) \left(\int_{F'^{*}} |b|_{F'}^{-1/2} . m(\bar{b}, s)\, \tilde{r}_{\psi}(g) \right. \\ &\qquad \left. \times \tilde{R}\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tilde{R}(w)\, \tilde{f}(0, 1, 1, 1, 1)\, d^{*} b \right) dg \\ &= (-1, \xi)\, \chi(-1) \int_{F'^{*}} W'\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{w}\right) |b|_{F'}^{1/2 - s}\, \omega_{\pi}(b\bar{b})^{-1}\, \chi(b)^{-1}\, d^{*} b. \end{aligned}$$

D'après [8], page 75, on déduit l'égalité cherchée :

$$J_s = (-1, \xi)\, \chi(-1)\, \epsilon(s, \pi' \otimes \chi, \psi_{F'})\, I_{W'}(s). \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN and ZELEVINSKY, Representation of the group $GL_n(F)$ where F is a local non archimedian field, *Russian Math. Survey*, vol. 31, n 3, 1976.

[2] FRIEDBERG, *Theta functions, liftingsand generalized Hilbert modular forms* (dissertation, June 1982).

[3] GÉRARDIN, *Facteurs locaux des algèbres de rang* 4.

[4] GÉRARDIN-LABESSE, *The solution of a base change problem for $GL_2(F)$ AMS proceedings of symposia in pure mathematics*, vol. 33, part 2, p. 115-133.

[5] GODEMENT, *Notes on Jacquet Langlands' theory*, preprint I.A.S., 1972.

[6] JACQUET, *automorphic forms on GL_2*, part 2, SLN 278, 1972.

[7] JACQUET and GELBART, A relation between automorphic representations of GL_2 and GL_3, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 11, 1978, p. 471-542.

[8] JACQUET-LANGLANDS, *Automorphic forms on GL_2*, SLN 114, 1970.

[9] LANGLANDS, *Base change for $GL(2)$*, Princeton university press and Tokyo press, 1980.

[10] PIATETSKI-SHAPIRO, *Automorphic forms on the symplectic group of order four*, publication de l'I.H.E.S., juillet 1983.

[11] PIATETSKI-SHAPIRO, On the Saito-Kurokawa lifting, 1983, *Inventiones mathematicae*, vol. 71, p. 309-338.

[12] WALDSPURGER, Correspondance de Shimura, *J. Math. pures et appl.*, n° 60, p. 1-132.

[13] WALDSPURGER, *Correspondance de Shimura et quaternions* (preprint).

[14] WEIL, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, n° 111, 1964.