

BULLETIN DE LA S. M. F.

SERGE OCHANINE

Modules de SU -bordisme. \mathcal{S} -résolutions de complexes finis

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 99-121

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__99_0

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MODULES DE SU -BORDISME.
 \mathcal{S} -RÉSOLUTIONS DE COMPLEXES FINIS

PAR

SERGE OCHANINE (*)

RÉSUMÉ. — Suite de l'article [5]. On apprend à construire des résolutions projectives dans la catégorie des couples exacts cohérents et à les réaliser à l'aide de complexes cellulaires et d'applications. On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une résolution de longueur finie.

ABSTRACT. — The study of the category of coherent exact couples started in [5] is continued. Projective resolutions of exact couples are constructed and realized by means of finite complexes and maps. Criteria for the existence of such resolutions of finite length are given.

Cet article est la suite de l'article [5] dont on utilisera sans restrictions les définitions et les résultats.

L'étude que P. Conner et L. Smith [2] ont faite des modules de bordisme complexe repose sur la possibilité, pour un complexe cellulaire fini X , de construire des U -résolutions, « U -bordism resolutions », de X , i. e. des résolutions projectives finies de $\Omega_*^U(X)$ dont les termes sont des modules de bordisme de complexes finis et les morphismes induits par des applications entre les complexes.

Le présent article est consacré à la construction de résolutions analogues pour l'étude des modules de SU -bordisme. Comme ce fut le cas pour les questions de finitude, la catégorie des Ω^{SU} -modules est ici inadéquate, et c'est dans la catégorie des couples exacts cohérents qu'on se place.

Dans le § 1, on étudie les résolutions projectives dans ∇ . On donne des

(*) Texte reçu le 16 février 1984, revise le 12 septembre 1984.

S. OCHANINE, I. P. 13 du C. N. R. S., Université de Paris-Sud, Mathématique, bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une résolution finie. Par exemple, si X est un complexe cellulaire fini tel que $H_{2k+1}(X; \mathbb{Z})=0$ ($k \geq 0$), le couple $\mathcal{S}(X)$ a une résolution projective finie, ce qui entraîne l'existence d'une suite exacte : $0 \rightarrow D_n \rightarrow \dots \rightarrow D_0 \rightarrow \Omega_*^{SU}(X) \rightarrow 0$, où chaque D_i est une somme directe de Ω^{SU} -modules isomorphes à Ω^{SU} ou W (cf. [5]). Ce résultat est à comparer au fait que, par exemple, pour $X = P_2(\mathbb{C})$, le Ω^{SU} -module $\Omega_*^{SU}(X)$ est de dimension homologique infinie (cf. 1.11).

Dans le § 2, on construit d'abord un nombre suffisant de complexes cellulaires finis X pour lesquels $\mathcal{S}(X)$ est un couple projectif, puis on construit des « \mathcal{S} -résolutions » de complexes finis, en tout point analogues aux U -résolutions de Conner et Smith.

Dans une prochaine publication, on donnera quelques applications de ces résultats concernant, d'une part, les suites régulières dans les modules de SU -bordisme, et, d'autre part, les relations avec la K -théorie.

1. Résolutions projectives dans ∇

(1.1) Soit $\dots \rightarrow \mathcal{D}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathcal{D}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{D}_{i-1} \rightarrow \dots$ une suite de morphismes de ∇ . On dira que c'est une suite exacte si pour tout i , on a $\text{im } \varphi_{i+1} = \ker \varphi_i$ (cf. 1.2.1) (*). Par *résolution projective* d'un couple exact cohérent \mathcal{L} , on entendra une suite exacte

$$\rightarrow \mathcal{L}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

où chaque \mathcal{D}_n ($n \geq 0$) est un couple exact projectif (cf. 1.2.2). Il découle de 1.2.1 que dans ce cas, $\overline{\mathcal{D}}_n = \ker \varphi_n$ est un objet de ∇ et que la résolution est équivalente à une suite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \overline{\mathcal{L}}_0 & \rightarrow & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{L} \rightarrow 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \rightarrow & \overline{\mathcal{D}}_n & \rightarrow & \mathcal{D}_n & \rightarrow & \overline{\mathcal{D}}_{n-1} \rightarrow 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

de suites exactes de ∇ .

Notons que tout \mathcal{D} a une résolution projective (cf. 1.2.7).

(1.2) Nous allons voir que le couple \mathcal{D} détermine les couples $\overline{\mathcal{D}}_n$ ($n \geq 0$) à facteur projectif près.

(*) « Cf. l.m.n. » renvoie au numéro m.n. de [5].

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux objets de ∇ . On dira que \mathcal{A} est équivalent à \mathcal{B} (notation $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$) s'il existe des objets projectifs \mathcal{P} et \mathcal{Q} de ∇ et un isomorphisme $\mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \cong \mathcal{B} \oplus \mathcal{Q}$.

PROPOSITION. — Soient

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0 \xrightarrow{\beta} \mathcal{B} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

des suites exactes de ∇ , avec \mathcal{A}_0 et \mathcal{B}_0 projectifs. Alors, si $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, on a : $\overline{\mathcal{A}}_0 \sim \overline{\mathcal{B}}_0$.

Démonstration. — En ajoutant aux deux suites exactes des suites de la forme $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{id} \mathcal{C} \rightarrow 0$, avec \mathcal{C} projectif, on se ramène aisément au cas où $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Supposons d'abord qu'il existe un morphisme surjectif $\psi : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{A} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{B}_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \end{array}$$

Comme \mathcal{B}_0 est projectif, il existe un isomorphisme $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{P}$, où $\mathcal{P} = \ker \psi$, qui identifie le diagramme ci-dessus au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{P} & \xrightarrow{\beta \circ \pi_1} & \mathcal{A} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{B}_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \end{array}$$

$\pi_1 : \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}_0$ étant la projection sur le premier facteur. Il est clair que \mathcal{P} est projectif, et on a $\ker \alpha \cong \ker (\beta \circ \pi_1) \cong \ker \beta \oplus \mathcal{P}$, ce qui prouve la proposition dans ce cas particulier.

Dans le cas général, considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B}_0 \xrightarrow{\xi} \mathcal{A} \rightarrow 0,$$

où $\xi = \alpha \circ \pi_1 - \beta \circ \pi_2$. Comme α est surjectif, ξ l'est également. Donc \mathcal{H} est un objet de ∇ et on peut trouver un objet projectif \mathcal{C}_0 et une surjection $\gamma : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ (cf. I.2.7). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{B}_0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{B} \end{array}$$

où $\delta = \beta \circ \pi_2 \circ \gamma = \alpha \circ \pi_1 \circ \gamma$. On vérifie aisément que $\pi_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}_0$ et $\pi_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{B}_0$ sont surjectifs, donc $\pi_1 \circ \gamma$, $\pi_2 \circ \gamma$ et δ le sont également. Si $\overline{\mathcal{C}}_0 = \ker \delta$, $\overline{\mathcal{C}}_0$ est un objet de ∇ , et d'après le cas particulier examiné précédemment, $\overline{\mathcal{A}}_0 \sim \overline{\mathcal{C}}_0 \sim \overline{\mathcal{B}}_0$. \square

COROLLAIRE. — Si dans les suites exactes de ∇ :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_n \rightarrow \mathcal{A}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{B}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

les objets \mathcal{A}_i et \mathcal{B}_i sont projectifs pour $n \geq i \geq 0$, et $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, alors $\overline{\mathcal{A}}_n \sim \overline{\mathcal{B}}_n$. \square

(1.3) Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent. On appelle *dimension homologique* $dh\mathcal{D}$ de \mathcal{D} la borne inférieure des n tels qu'il existe une résolution projective

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0.$$

Prenons un objet \mathcal{L} de ∇ tel que $dh\mathcal{L} = m < \infty$, et soit

$$\rightarrow \mathcal{L}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{L} \rightarrow 0$$

une résolution projective arbitraire de \mathcal{L} . Alors, le corollaire 1.2 montre que pour $n \geq m - 1$, $\mathcal{L}_n = \ker \varphi_n$ est un objet projectif. Ainsi la suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_{m-1} \rightarrow \mathcal{L}_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

est une résolution projective de longueur m de \mathcal{L} .

(1.4) Le lemme suivant se démontre par des vérifications standard.

LEMME. — Si $0 \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte de ∇ , $\mathcal{L}_\alpha = (D_\alpha, E_\alpha, j_\alpha, \hat{c}_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, 3$), alors la suite de Λ -modules

$$0 \rightarrow tD_1 \rightarrow tD_2 \rightarrow tD_3 \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Soient (f_1, g_1) et (f_2, g_2) les deux morphismes de la suite exacte initiale.

Il est clair que la suite : $0 \rightarrow tD_1 \xrightarrow{f_1} tD_2 \xrightarrow{f_2} tD_3 \rightarrow 0$ est exacte en tD_1 et tD_3 , et que $f_2 f_1 = 0$.

Si $a \in tD_2$ et $f_2(a) = 0$, il existe un $b \in D_1$ tel que $f_1(b) = a$. On a alors

$$g_1 j_1(b) = j_2 f_1(b) = 0,$$

car $f_1(b) \in tD_2$. Comme g_1 est injectif, on a $j_1(b) = 0$, donc $b \in tD_1$. \square

PROPOSITION. — Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent. Alors :

$$dh\mathcal{D} = \sup(dh_\Lambda tD, dh_W E).$$

Démonstration. — Prenons une résolution projective arbitraire de \mathcal{D} :

$$\dots \rightarrow \mathcal{D}_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{D}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{D} \rightarrow 0, \quad \varphi_n = (f_n, g_n).$$

Par définition, la suite $\rightarrow E_n \xrightarrow{g_n} \dots \xrightarrow{g_1} E_0 \xrightarrow{g_0} E \rightarrow 0$ est une suite exacte de W -modules. Le théorème I.2.9 dit que chaque $E_n (n \geq 0)$ est un W -module libre, et nous avons ainsi une résolution libre de E .

De même, le lemme ci-dessus, appliqué aux suites exactes courtes de 1.1, donne des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & t\bar{D}_0 & \rightarrow & tD_0 & \rightarrow & tD \rightarrow 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \rightarrow & t\bar{D}_n & \rightarrow & tD_n & \rightarrow & t\bar{D}_{n-1} \rightarrow 0 \end{array}$$

de Λ -modules qui conduisent à une suite exacte longue :

$$\rightarrow tD_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_1} tD_0 \xrightarrow{f_0} tD \rightarrow 0.$$

Le théorème I.2.9 montre que c'est une résolution libre du Λ -module tD . Il en résulte que

$$dh\mathcal{D} \geq \sup(dh_\Lambda tD, dh_W E).$$

En particulier, cela achève la démonstration si $\sup(dh_\Lambda tD, dh_W E) = \infty$.

Supposons alors que $\sup(dh_\Lambda tD, dh_W E) = m < \infty$. Dans les suites exactes ($n \geq m$) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \bar{E}_{n-1} & \rightarrow & E_{n-1} & \rightarrow & \dots \rightarrow E_0 \rightarrow E \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & t\bar{D}_{n-1} & \rightarrow & tD_{n-1} & \rightarrow & \dots \rightarrow tD_0 \rightarrow tD \rightarrow 0, \end{array}$$

\bar{E}_{n-1} est un W -module projectif, donc libre (cf. I.2.8), alors que $t\bar{D}_{n-1}$ est un Λ -module libre. Le théorème I.2.9 dit alors que $\bar{\mathcal{D}}_{n-1}$ est un couple projectif pour $n \geq m$. \square

(1.5) Soit k un anneau principal.

LEMME. — Tout module cohérent sur l'anneau $k[z_1, \dots, z_p, \dots]$ est de dimension homologique finie.

Démonstration. — Cf. [2]. \square

Par exemple, si \mathcal{D} est un couple exact cohérent, on a $dh_W E < \infty$. Il en résulte à l'aide de 1.4 que $dh\mathcal{D} < \infty$ si et seulement si $dh_\Lambda tD < \infty$.

(1.6) Soit M un Λ -module gradué (cf. les conventions I.1.4). Alors, M est canoniquement un groupe différentiel relativement à l'homomorphisme $t_0 : M \rightarrow M$ de multiplication par l'élément $t_0 \in \Lambda_1$ (cf. I.1.13). On désignera $\kappa_*(M)$ le groupe gradué d'homologie de M .

Par exemple, si $M = \Lambda$, la proposition I.1.13 montre que $\kappa_*(M) = 0$. Donc $\kappa_*(M) = 0$ pour tout Λ -module libre M .

LEMME. — Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de Λ -modules gradués. Alors, si $\kappa_*(M') = 0$, la suite $0 \rightarrow t_0 M' \xrightarrow{\alpha} t_0 M \xrightarrow{\beta} t_0 M'' \rightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. — Il est clair que le morphisme $\alpha : t_0 M' \rightarrow t_0 M$ est injectif, que $\beta : t_0 M \rightarrow t_0 M''$ est surjectif et que $\beta\alpha = 0$. Prenons un $m \in t_0 M$ tel que $\beta(m) = 0$. Il existe un $m' \in M'$ tel que $\alpha(m') = m$. On a $\alpha(t_0 m') = t_0 m = 0$. Donc, comme α est injectif, $t_0 m' = 0$. Comme $\kappa_*(M') = 0$, on a $m' \in t_0 M'$. \square

PROPOSITION. — Soit M un Λ -module gradué cohérent. Alors :

- a) $dh_\Lambda M < \infty$ si et seulement si $\kappa_*(M) = 0$;
- b) Si $\kappa_*(M) = 0$, on a : $dh_\Lambda M = dh_{\bar{\Lambda}} t_0 M$, où $\bar{\Lambda} = \sum_{k \geq 0} \Lambda_{8k} \cong \bar{H}_*(M)$ (cf. I.1.13).

Démonstration. — Supposons que M ait une résolution projective finie

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0.$$

Les Λ -modules gradués projectifs sont libres (cf. I.2.8). Donc on a $\kappa_*(M_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$. Si $\bar{M}_i = \ker f_i$, on a une suite de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M_n & \rightarrow & M_{n-1} & \rightarrow & \bar{M}_{n-2} \rightarrow 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \rightarrow & \bar{M}_0 & \rightarrow & M_0 & \rightarrow & M \rightarrow 0. \end{array}$$

d'où, par récurrence, $\kappa_*(\bar{M}_i) = 0$ ($i \geq 0$) et $\kappa_*(M) = 0$.

A l'inverse, soit $\kappa_*(M) = 0$ et $\dots \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ une résolution libre de M sur Λ . Alors, toujours par récurrence, on a $\kappa_*(\bar{M}_i) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Le lemme donne alors une suite de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & t_0 \bar{M}_0 & \rightarrow & t_0 M_0 & \rightarrow & t_0 M \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & t_0 \bar{M}_1 & \rightarrow & t_0 M_1 & \rightarrow & t_0 \bar{M}_0 \rightarrow 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

qui s'assemblent en une suite longue :

$$\rightarrow t_0M_n \rightarrow t_0M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow t_0M_0 \rightarrow t_0M \rightarrow 0.$$

Chaque t_0M_i étant un $\bar{\Lambda}$ -module libre, c'est une résolution libre du $\bar{\Lambda}$ -module t_0M . En particulier, $dh_{\bar{\Lambda}}t_0M \leq dh_{\Lambda}M$.

Comme M est un Λ -module cohérent, il est de présentation finie sur Λ . D'autre part, Λ est un $\bar{\Lambda}$ -module libre de rang 2. Donc le $\bar{\Lambda}$ -module M est de présentation finie. L'anneau $\bar{\Lambda}$ est cohérent (cf. I. 1. 13), donc M est un $\bar{\Lambda}$ -module cohérent. Comme le $\bar{\Lambda}$ -sous-module t_0M de M est de type fini, il est cohérent, d'où $m = dh_{\bar{\Lambda}}t_0M < \infty$ (cf. 1. 5). Il résulte que pour $n \geq m$, le $\bar{\Lambda}$ -module $t_0\bar{M}_{n-1}$ est projectif, donc libre. Comme $\kappa_*(\bar{M}_{n-1})=0$, la suite

$$0 \rightarrow t_0\bar{M}_{n-1} \rightarrow \bar{M}_{n-1} \xrightarrow{t_0} t_0\bar{M}_{n-1} \rightarrow 0$$

est exacte, et elle est scindée sur $\bar{\Lambda}$, puisque $t_0\bar{M}_{n-1}$ est libre. La structure de Λ (cf. I. 1. 13) montre alors que \bar{M}_{n-1} est un Λ -module libre pour $n \geq m$, d'où $dh_{\Lambda}M \leq m = dh_{\bar{\Lambda}}t_0M$. \square

(1. 7) Soit maintenant \mathcal{D} un couple exact cohérent. On pose $\eta_*\mathcal{D} = \kappa_*(tD)$. D'après le théorème I. 1. 16, tD est un Λ -module cohérent. La proposition 1. 6 s'applique à tD et on obtient : $dh\mathcal{D} < \infty$ si et seulement si $\eta_*\mathcal{D} = 0$.

PROPOSITION. — $\eta_*\mathcal{D} = 0$ si et seulement si la différentielle d' du couple dérivé \mathcal{D}' de \mathcal{D} est nulle.

Démonstration. — Considérons le couple dérivé \mathcal{D}' :

$$\begin{array}{ccc} tD & \xrightarrow{t} & tD \\ \downarrow d' & & \downarrow d' \\ & & H_*(E) \end{array}$$

On a $d' = j'\partial'$. Donc $d' = 0$ si et seulement si $\text{im } \partial' \subset \ker j' = \text{im } t = t^2D$. Or $\text{im } \partial' = \ker t$. Donc $d' = 0$ si et seulement si $\ker t \subset t^2D$. \square

Exemples. 1. — Soit X un complexe cellulaire fini tel que $H_{2k+1}(X; \mathbb{Z}) = 0$ ($k \geq 0$). Alors, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch montre que $W_{2k+1}(X) = 0$ ($k \geq 0$), donc aussi $H_{2k+1}(W_*(X)) = 0$ ($k \geq 0$). Comme d' est de degré -3 , $d' = 0$, d'où $dh\mathcal{S}(X) < \infty$.

2. — Voici maintenant l'exemple d'un complexe X tel que $dh\mathcal{S}(X) = \infty$. Soit $f : S^4 \rightarrow S^2$ l'application composée de l'application de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$

et de sa suspension $S^4 \rightarrow S^3$, et soit X le cône de f . C'est un complexe fini de dimension 5. Soit $i : S^2 \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique et soit $\alpha \in \tilde{\Omega}_2^{SU}(X)$ la classe qu'elle représente. Alors $i \circ f$ représente $t^2\alpha$, et comme cette application est homotope à zéro, $t^2\alpha=0$. D'autre part, la suite exacte de la cofibration $S^4 \rightarrow S^2 \rightarrow X$ montre que $\tilde{\Omega}_i^{SU}(S^2) \cong \tilde{\Omega}_i^{SU}(X)$ pour $i \leq 3$. Donc $\alpha \neq 0$ et $t\alpha \neq 0$. Enfin $t\alpha$ n'est pas divisible par t^2 pour des raisons de dimension. Donc $t\alpha$ représente un élément non-nul de $\eta_{3k}(\tilde{\mathcal{S}}(X))$, d'où $dh_{\tilde{\mathcal{S}}}(X) = dh_{\mathcal{S}}(X) = \infty$.

(1.8) Pour les couples exacts cohérents \mathcal{D} de dimension homologique finie, $dh_{\mathcal{D}}$ peut être exprimé entièrement en termes du W -module différentiel E :

PROPOSITION. — Si $\eta_{\star}\mathcal{D} = 0$, on a :

$$dh_{\mathcal{D}} = \sup(dh_W E, dh_{H_{\star}(W)} H_{\star}(E)).$$

Démonstration. — En vertu des propositions 1.4 et 1.6, il suffit de prouver que $dh_{\bar{\Lambda}} t^2 D = dh_{H_{\star}(W)} H_{\star}(E)$. Selon 1.7, la différentielle du couple \mathcal{D}' est nulle. Donc \mathcal{D}'' se réduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow t^2 D \xrightarrow{j''} H_{\star}(E) \xrightarrow{i''} t^2 D \rightarrow 0,$$

qu'on peut considérer comme suite de $\bar{\Lambda}$ -modules. Nous allons voir que cette suite est scindée.

Considérons d'abord le couple \mathcal{S} :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{SU} & \xrightarrow{i} & \Omega^{SU} \\ & \searrow i & \nearrow j \\ & & W \end{array}$$

On a $t^3=0$. Donc $t^2 \in \Omega_2^{SU} = \mathbb{F}_2$ est dans l'image de $\partial : W_4 \rightarrow \Omega_2^{SU}$. Or, W_4 est engendré par x_1^2 (cf. I.1.3). Donc on a nécessairement $\partial(x_1^2) = t^2$. Considérons alors le morphisme composé $\varphi : Z(E) \xrightarrow{x_1^2} Z(E) \xrightarrow{d} t^2 D$, où $Z(E) = \ker d$. Si $e \in d(E) \subset Z(E)$, par exemple $e = de'$, on a :

$$\varphi(e) = \partial(x_1^2 e) = \partial(x_1^2 j \partial e') = t^2 \partial e' = 0 \quad (\text{cf. I.1.10}).$$

Donc φ induit un morphisme $s : H_{\star}(E) \rightarrow t^2 D$, qui est un morphisme de $\bar{\Lambda}$ -modules. Si $m \in D$, on a : $s j''(t^2 m) = \partial(x_1^2 j(m)) = t^2 m$, donc s est bien un scindage de la suite exacte \mathcal{D}'' . Soit $A = j''(t^2 D)$. Alors on a un isomorphisme de $\bar{\Lambda}$ -modules $H_{\star}(E) \cong A \oplus c_2 A$, où c_2 est la classe du cycle x_1^2

dans $H_*(W)$. Comme $H_*(W) = \overline{H}_*(W) \oplus c_2 \overline{H}_*(W)$ (cf. I.1.12, I.1.13), on obtient un isomorphisme de $H_*(W)$ -modules : $H_*(E) \cong H_*(W) \otimes_{\Lambda} t^2 D$, d'où $dh_{H_*(W)} H_*(E) = dh_{\Lambda} t^2 D$. \square

COROLLAIRE. – Soit \mathcal{D} un objet de ∇ . Il est projectif si et seulement si

- a) $\eta_* \mathcal{L} = 0$;
- b) E est un W -module libre ;
- c) $H_*(E)$ est un $H_*(W)$ -module libre.

Démonstration. – En effet, \mathcal{D} est projectif si et seulement si $dh \mathcal{D} = 0$. \square

(1.9) Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent de dimension homologique infinie. Nous allons voir que par une résolution projective partielle, on peut transformer \mathcal{D} en un couple d'une forme particulière.

Soit M un Λ -module gradué non-nul. On définit $v(M) \in \mathbb{Z}$ comme étant la borne inférieure des i tels que $M_i \neq 0$. Si $dh_{\Lambda} M = \infty$, on a $\kappa_*(M) \neq 0$ et $v(\kappa_*(M)) \geq v(M)$. Posons $\text{def}(M) = v(\kappa_*(M)) - v(M)$. C'est un entier non-négatif qui n'est défini que pour les Λ -modules de dimension infinie. Si \mathcal{D} est un couple exact cohérent, tel que $dh \mathcal{D} = \infty$, on pose $\text{def}(\mathcal{D}) = \text{def}(tD)$. Par exemple, dans l'exemple 2 de 1.7, on a $\text{def}(t\mathcal{V}(X)) = 0$.

PROPOSITION. – Soit M un Λ -module gradué tel que $dh_{\Lambda} M = \infty$, et soit $0 \rightarrow R \rightarrow L \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ une suite exacte de Λ -modules, où

- (i) L est un Λ -module libre ;
- (ii) f est minimal, i.e. le morphisme induit $1 \otimes f : Q^{\Lambda}(L) \rightarrow Q^{\Lambda}(M)$ est bijectif (cf. I.2.8).

- Alors a) $\text{def}(R) \leq \text{def}(M)$;
 b) si $\text{def}(M) > 0$, alors $\text{def}(R) < \text{def}(M)$.

Démonstration. – Soient $\pi_L : L \rightarrow Q^{\Lambda}(L)$ et $\pi_M : M \rightarrow Q^{\Lambda}(M)$ les projections canoniques. Comme $Q^{\Lambda}(L)$ et $Q^{\Lambda}(M)$ sont des espaces vectoriels sur F_2 , et que $1 \otimes f : Q^{\Lambda}(L) \rightarrow Q^{\Lambda}(M)$ est un isomorphisme, on peut trouver des morphismes d'espaces vectoriels $s_L : Q^{\Lambda}(L) \rightarrow L$ et $s_M : Q^{\Lambda}(M) \rightarrow M$ tels que $\pi_L s_L = id$, $\pi_M s_M = id$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{f} & M \\
 \uparrow \pi_L & & \uparrow \pi_M \\
 Q^{\Lambda}(L) & \xrightarrow{1 \otimes f} & Q^{\Lambda}(M)
 \end{array}$$

soit commutatif. On identifiera $Q^\wedge(L)$ et $Q^\wedge(M)$ avec leurs images respectives par s_L et s_M . Si alors $v = v(M)$, on a :

$$L_r = Q^\wedge(L)_v, \quad M_r = Q^\wedge(M)_r,$$

et $f : L_r \rightarrow M_r$ est bijectif. Donc $v(R) > v(M)$. De même :

$$L_{r+1} = Q^\wedge(L)_{r+1} \oplus t_0 Q^\wedge(L)_r, \quad M_{r+1} = Q^\wedge(M)_{r+1} \oplus t_0 Q^\wedge(M)_r,$$

et $f : L_{r+1} \rightarrow M_{r+1}$ est bijectif si et seulement si $t_0 : M_r \rightarrow M_{r+1}$ est injectif, i. e. si et seulement si $\text{def}(M) > 0$.

a) La suite exacte $\kappa_i(L) \rightarrow \kappa_i(M) \rightarrow \kappa_{i+1}(R) \rightarrow \kappa_{i+1}(L)$ montre que

$v(\kappa_*(M)) = v(\kappa_*(R)) - 1$, et, comme $v(M) \leq v(R) - 1$, on a bien $\text{def}(R) \leq \text{def}(M)$.

b) Si $\text{def}(M) > 0$, on a en plus $v(M) \leq v(R) - 2$, d'où $\text{def}(R) < \text{def}(M)$. \square

(1.10) Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe :

THÉORÈME. — Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent. Alors :

(1) Si $\eta_* \mathcal{D} = 0$, on a : $dh \mathcal{D} < \infty$;

(2) Si $\eta_* \mathcal{D} \neq 0$, on a : $dh \mathcal{D} = \infty$, et il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \bar{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \rightarrow \mathcal{D}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{D} \rightarrow 0,$$

où (i) chaque $\mathcal{L}_i (0 \leq i \leq n-1)$ est projectif :

(ii) dans le couple $\bar{\mathcal{L}} = (D, E, \bar{j}, \bar{\iota})$ on a : (a) \bar{E} est un W -module libre.

(b) tD est un Λ -module libre :

(iii) $\text{def}(\bar{\mathcal{D}}) = 0$.

Démonstration. — L'équivalence de $\eta_* \mathcal{D} = 0$ et de $dh \mathcal{D} < \infty$ a déjà été établie (cf. 1.7).

Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent tel que $dh \mathcal{D} = \infty$. Choisissons un morphisme surjectif minimal $f : L \rightarrow M = tD$, où L est un Λ -module libre de rang fini, et soit $\varphi_0 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ un morphisme surjectif d'un couple projectif \mathcal{D}_0 qui induit f , i. e. $tD_0 = L$ et le morphisme $tD_0 \rightarrow tD$ coïncide avec f (cf. remarque 1.2.7). Soit $\bar{\mathcal{D}}_0 = \ker \varphi_0$. Alors, on a une suite exacte $0 \rightarrow t\bar{D}_0 \rightarrow tD_0 \rightarrow tD \rightarrow 0$, et on peut recommencer la construction pour $M = t\bar{D}_0$. On obtient ainsi par récurrence une suite exacte

$$0 \rightarrow \bar{\mathcal{L}}_{n-1} \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

où chaque $\mathcal{L}_i (0 \leq i \leq n-1)$ est projectif. Il nous reste à prouver que pour n grand, $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_{n-1}$ satisfait aux conditions (ii) et (iii).

Pour cela, notons que l'on a deux suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow t\bar{D}_{n-1} \rightarrow tD_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow tD_0 \rightarrow tD \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \bar{E}_{n-1} \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow E_0 \rightarrow E \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dont la première peut être considérée comme résolution libre de $\bar{\Lambda}$ -module tD , alors que la seconde est une résolution libre du W -module E . Remarquons que tD est un Λ -module de présentation finie, donc aussi un $\bar{\Lambda}$ -module de présentation finie, et comme $\bar{\Lambda}$ est cohérent, tD est un $\bar{\Lambda}$ -module cohérent. Donc $dh_{\bar{\Lambda}}tD < \infty$ (cf. lemme 1.5).

Soit $n \geq \sup(dh_{\bar{\Lambda}}tD, dh_W E, \text{def}(tD))$. Alors $t\bar{D}_{n-1}$ est un $\bar{\Lambda}$ -module libre, et la proposition 1.9 montre que $\text{def}(t\bar{D}_{n-1}) = \text{def}(\bar{D}_{n-1}) = 0$. \square

(1.11) Pour terminer ce paragraphe, nous allons démontrer le résultat cité dans l'introduction. L'idée de cette démonstration appartient à R. E. Stong.

PROPOSITION. — $dh_{\Omega^{SU}} W' = \infty$.

Démonstration. — Soit \mathcal{H} la classe des Ω^{SU} -modules gradués M satisfaisant aux conditions suivantes : (a) si $n = r(M)$, alors $M_n \cong \mathbb{Z}$; (b) chaque $M_i (i \in \mathbb{Z})$ est un groupe abélien de type fini; (c) $tM_n = 0$. Il est clair que $W \in \mathcal{H}$ et que \mathcal{H} ne contient aucun Ω^{SU} -module libre non-nul.

Soit $M \in \mathcal{H}$. $n = r(M)$ et soit $0 \rightarrow B \xrightarrow{0} A \xrightarrow{\psi} M_{n+1} \rightarrow 0$ une suite exacte où B et A sont des groupes abéliens libres de rang fini. Il est alors facile de construire une suite exacte de Ω^{SU} -modules : $0 \rightarrow K \rightarrow U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$, telle que :

- (1) U et V sont des Ω^{SU} -modules libres ayant un nombre fini de générateurs en chaque dimension :
- (2) $r(V) = n$, $V_n = M_n$ et $f = id : V_n \rightarrow M_n$;
- (3) $V_{n+1} = tV_n \oplus A = \mathbb{F}_2 \oplus A$ et $f : V_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$ est donné par $f(x, a) = \psi(a)$;
 $r(U) = n + 1$, $U_{n+1} = \mathbb{Z} \oplus B$ et $g : U_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$ est donné par $g(y, b) = (y \bmod 2, \theta(b))$.

On vérifie aisément que l'on a alors $K \in \mathcal{H}$.

Supposons que $dh_{\Omega^{SU}} W' = \alpha < \infty$. Construisons par récurrence une résolution libre partielle

$$0 \rightarrow K \rightarrow F^{2k+1} \rightarrow F^{2k} \rightarrow \dots \rightarrow F^1 \rightarrow F^0 \rightarrow W' \rightarrow 0$$

telle que $K \in \mathcal{H}$ et $\alpha \leq 2k + 2$. Alors K doit être un Ω^{SU} -module projectif, donc libre, ce qui est impossible. \square

2. \mathcal{S} -Résolutions de complexes finis

(2.1) Le corollaire 1.8 donne un critère de projectivité de $\mathcal{S}(X)$ en termes du W -module différentiel $W_*(X)$, mais ce critère fait intervenir le $H_*(W)$ -module $H_*(W_*(X))$ difficile à calculer. Nous allons donner une condition plus simple pour le W -module différentiel $W_*(X)$ qui entraîne la projectivité de $\mathcal{S}(X)$.

Soit X un complexe cellulaire fini tel que $H_*(X; \mathbb{Z})$ n'ait pas de torsion. On définit une opération homologique

$$Sq_2 : H_*(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_*(X; \mathbb{F}_2)$$

de degré -2 comme étant le dual de Spanier-Whitehead du carré de Steenrod Sq^2 . Plus précisément, soit Y le m -dual de X (cf. [3], chap. 15; [6], chap. III). Alors Sq_2 est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{D} & H^{m-n-1}(Y; \mathbb{F}_2) \\ Sq_2 \downarrow & & \downarrow Sq^2 \\ H_{n-2}(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{D} & H^{m-n+1}(Y; \mathbb{F}_2). \end{array}$$

où D est l'isomorphisme de dualité.

Comme $H_*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion, il en va de même pour $H^*(Y; \mathbb{Z})$, donc $Sq^1 = 0$ dans $H^*(Y; \mathbb{F}_2)$. La relation d'Adem $Sq^2 Sq^2 + Sq^3 Sq^1 = 0$ montre alors que $Sq^2 Sq^2 = 0$ dans $H^*(Y; \mathbb{F}_2)$, d'où $Sq_2 Sq_2 = 0$ dans $H_*(X; \mathbb{F}_2)$. On notera $H_* H_*(X; \mathbb{F}_2)$ le groupe d'homologie de $H_*(X; \mathbb{F}_2)$ relativement à Sq_2 .

Considérons par ailleurs l'homomorphisme de Thom

$$\mu : W_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z})$$

défini de la manière suivante : si $f : M^n \rightarrow X$ représente la classe $e \in W_n(X)$, on pose $\mu(e) = f_*([M^n])$, où $[M^n] \in H_n(M^n; \mathbb{Z})$ est la classe fondamentale de M^n .

Soit $W'_*(X) = W_*(X) \otimes \mathbb{F}_2$ et soit $\mu' : W'_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{F}_2)$ la réduction modulo 2 de μ . Notons que la différentielle d de $W_*(X)$ induit une différentielle dans $W'_*(X)$ qu'on notera encore d .

PROPOSITION. — μ' est un morphisme de groupes différentiels.

Démonstration. — Il faut vérifier que pour tout $e \in W'_*(X)$, on a :

$$\mu'd(e) = Sq_2\mu'(e).$$

Il est clair qu'on peut se réduire au cas où $X = M^n$ et où e est la classe représentée par l'application identique $M^n \rightarrow M^n$.

Supposons que M^n est plongée dans S^{n+k} et que v est le fibré normal de M^n dans S^{n+k} . Alors (cf. [3], chap. 15 : [6], chap. III) l'espace de Thom $Y = Tv$ est le $(n+k+1)$ -dual de M^n_+ (réunion disjointe de M^n et d'un point). Le dual de la classe fondamentale $[M^n]_2 \in \tilde{H}_n(M^n_+; \mathbb{F}_2)$ est la classe de Thom $u \in \tilde{H}^k(Y; \mathbb{F}_2)$. Donc, le dual de $Sq_2\mu'(e)$ est $Sq^2u \in \tilde{H}^{k+2}(Y; \mathbb{F}_2)$. Si $\Phi_H : H^*(M^n; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(Y; \mathbb{F}_2)$ est l'isomorphisme de Thom, on a donc $D(Sq_2\mu'(e)) = \Phi_H(w_2(v))$, autrement dit, $Sq_2\mu'(e)$ est le dual de Poincaré de la classe $w_2(v) = w_2(M^n)$.

La proposition découle maintenant de ce que par définition de d , $d(e)$ est représentée par une sous-variété de M^n duale, au sens de Poincaré, à $w_2(M^n)$ (cf. [6], chap. VIII). \square

COROLLAIRE. — μ' induit un morphisme

$$(\mu')_* : H_*(W'_*(X)) \rightarrow H_*H_*(X; \mathbb{F}_2). \quad \square$$

(2.2) Par section de $\mu' : W'_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{F}_2)$ on entend un morphisme de groupes différentiels $s : H_*(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow W'_*(X)$, tel que $\mu's = id$.

PROPOSITION. — Soit X un complexe cellulaire fini tel que $H_*(X; \mathbb{Z})$ soit sans torsion. Supposons que μ' admette une section s . Alors $H_*(W'_*(X))$ est un $H_*(W)$ -module libre.

Démonstration. — Comme $H_*(X; \mathbb{Z})$ est libre, on peut trouver un morphisme de groupes $s' : H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow W'_*(X)$ tel que $\mu's' = id$ et tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W'_*(X) & \xrightarrow{s'} & H_*(X; \mathbb{Z}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ W'_*(X) & \xrightarrow{s} & H_*(X; \mathbb{F}_2), \end{array}$$

où π et ρ_2 sont les projections canoniques, soit commutatif.

Comme $H_*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de $W'_*(X)$ est triviale. Il en résulte de la manière habituelle que s' induit un isomorphisme de W -modules gradués : $W' \otimes H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow W'_*(X)$ (cf. par exemple [1], p. 11). Par suite, si $W'' = W' \otimes \mathbb{F}_2$, s induit un isomor-

phisme de W' -modules différentiels : $W' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow W'_*(X)$, l'action de d dans $W' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2)$ étant donnée par :

$$d(w \otimes h) = dw \otimes h + \bar{w} \otimes Sq_2 h, \quad w \in W', \quad h \in H_*(X; \mathbb{F}_2).$$

Posons ensuite $W''_*(X) = W'_*(X)/x_1 W'_*(X)$, $W'' = W'/x_1 W'$. Comme $dx_1 = 2$ dans W , x_1 est un cycle de W' . Donc W'' est canoniquement une algèbre différentielle et $W''_*(X)$ est un W'' -module différentiel. La suite exacte :

$$0 \rightarrow W' \xrightarrow{x_1} W' \rightarrow W'' \rightarrow 0$$

donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow W' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{x_1} W' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow W'' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

d'où résulte un isomorphisme de W'' -modules différentiels

$$W'' \otimes H_*(X; \mathbb{F}_2) \cong W''_*(X),$$

induit par l'homomorphisme composé φ :

$$H_*(X; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} W'_*(X) \xrightarrow{\beta} W''_*(X).$$

α étant la projection canonique. La formule de Künneth donne un isomorphisme de $H_*(W'')$ -modules :

$$\varphi_0 : H_*(W'') \otimes H_* H_*(X; \mathbb{F}_2) \cong H_*(W''_*(X))$$

induit par φ . En particulier, $H_*(W''_*(X))$ est un $H_*(W'')$ -module libre.

Comme $W'' = \mathbb{F}_2[x_3, x_4, \dots]$ et $dx_{2i} = x_{2i-1}$ ($i \geq 2$) (cf. I.1.3) et comme la formule de Leibnitz dans W'' se réduit à la formule habituelle :

$$d(a \cdot b) = da \cdot b + a \cdot db,$$

on a : $H_*(W'') \cong \mathbb{F}_2[h_2, h_3, \dots]$, où h_i est la classe du cycle x_{2i}^2 . L'homomorphisme $\alpha_* \pi_* : H_*(W) \rightarrow H_*(W'')$ envoie $c_{4i} \in H_{8i}(W)$ sur h_i (cf. I.1.7). Donc α_* est surjectif. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(W') \otimes H_* H_*(X; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_*(W'_*(X)) \\ \alpha_* \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ H_*(W'') \otimes H_* H_*(X; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\varphi_0} & H_*(W''_*(X)) \end{array}$$

montre alors que $\alpha_* : H_*(W'_*(X)) \rightarrow H_*(W''_*(X))$ est surjectif. On a donc deux suites exactes :

$$(S) \quad 0 \rightarrow H_*(W') \xrightarrow{x_1} H_*(W') \xrightarrow{\alpha} H_*(W'') \rightarrow 0$$

$$(S_X) \quad 0 \rightarrow H_*(W'_*(X)) \xrightarrow{x_1} H_*(W'_*(X)) \xrightarrow{\alpha} H_*(W''_*(X)) \rightarrow 0.$$

Comme $H_*(W''')$ est un anneau de polynômes sur \mathbb{F}_2 , il existe un scindage multiplicatif $\sigma : H_*(W''') \rightarrow H_*(W')$ de la suite S , d'où un isomorphisme d'anneaux :

$$H_*(W') \cong \mathbb{F}_2[x_1] \otimes H_*(W''')$$

Notons que σ transforme $H_*(W'_*(X))$ en un $H_*(W''')$ -module ; il est clair que la suite S_X est alors une suite de $H_*(W''')$ -modules. Comme le $H_*(W''')$ -module $H_*(W''_*(X))$ est libre, il existe un scindage

$$\sum : H_*(W''_*(X)) \rightarrow H_*(W'_*(X))$$

de la suite S_X , d'où un isomorphisme

$$H_*(W'_*(X)) \cong \mathbb{F}_2[x_1] \otimes H_*(W''_*(X))$$

de $H_*(W''')$ -modules. En comparant les deux isomorphismes, on obtient un isomorphisme de $H_*(W')$ -modules :

$$H_*(W'_*(X)) \cong H_*(W') \otimes_{H_*(W''')} H_*(W''_*(X)).$$

En particulier, $H_*(W'_*(X))$ est un $H_*(W')$ -module libre.

Considérons maintenant la suite exacte :

$$0 \rightarrow W_*(X) \xrightarrow{\alpha} W_*(X) \xrightarrow{\beta} W'_*(X) \rightarrow 0.$$

Comme tout élément de $H_*(W_*(X))$ est d'ordre 2 (cf. I. 1. 4), la suite exacte d'homologie se réduit à :

$$0 \rightarrow H_*(W_*(X)) \xrightarrow{\alpha_*} H_*(W'_*(X)) \xrightarrow{\beta_*} H_*(X) \rightarrow 0.$$

L'homomorphisme $\pi_* : H_*(W) \rightarrow H_*(W')$ permet de considérer cette suite comme suite de $H_*(W)$ -modules.

Soit $\varepsilon : H_*(W'_*(X)) \rightarrow H_*(W_*(X))$ le morphisme de groupes défini par $\varepsilon(h) = \beta(x_1 \cdot h)$, $h \in H_*(W'_*(X))$. Si h est représenté par un cycle z de $W_*(X)$, $\varepsilon(h)$ est représenté par $1/2d(x_1 \cdot z) = z$. Donc, $\varepsilon\pi_* = id$ et ε est le scindage de la suite ci-dessus. Par un calcul analogue, on vérifie que ε est un morphisme de $H_*(W)$ -modules. On obtient donc un isomorphisme :

$$H_*(W'_*(X)) \cong H_*(W_*(X)) \oplus x_1 \cdot H_*(W_*(X))$$

de $H_*(W)$ -modules. De même, on a un isomorphisme

$$H_*(W') \cong H_*(W) \oplus x_1 H_*(W)$$

de $H_*(W)$ -modules. Donc $H_*(W')$ est un $H_*(W)$ -module libre, et, comme

$H_*(W'_*(X))$ est un $H_*(W')$ -module libre, il est aussi libre comme $H_*(W)$ -module. Enfin, $H_*(W'_*(X))$ est un facteur direct de $H_*(W'_*(X))$. Il est donc projectif et par suite libre (cf. I. 2. 8). \square

COROLLAIRE. — Soit X un complexe cellulaire fini tel que $H_{2k+1}(X; \mathbb{Z}) = 0$ ($k \geq 0$) et $H_*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion. Alors, si $\mu' : W'_*(X) \rightarrow H_*(X; \mathbb{F}_2)$ admet une section, $\mathcal{S}(X)$ est un couple exact projectif.

Démonstration. — Conséquence immédiate de la proposition, du corollaire 1.8 et de l'exemple 1 de 1.7. \square

(2.3) Nous nous placerons maintenant dans la situation duale de celle de 2.2, plus commode pour les calculs explicites.

Il existe une théorie cohomologique multiplicative $W^*()$ qu'on pourrait définir par la formule $W^i(X) = W_{n-i-1}(Y)$, où X est un complexe cellulaire fini et Y un n -dual de X au sens de Spanier-Whitehead. Si $\delta : W^*(X) \rightarrow W^*(X)$ désigne le dual de $d : W_*(Y) \rightarrow W_*(Y)$, on a $\delta^2 = 0$ et pour tous $a, b \in W^*(X) : \delta(a \cdot b) = \delta a \cdot b + \bar{a} \cdot \delta b$, où $\bar{a} = a - x_1 \delta a$ (cf. I. 1. 2). On peut donc définir l'anneau dérivé $H^*(W^*(X))$ relatif à δ . De plus, si $W^* = W^*(pt)$, $H^*(W^*(X))$ est une $H^*(W^*)$ -algèbre graduée et on a un isomorphisme $H^*(W^*(X)) \cong H_*(W_*(Y))$ compatible avec les structures de $H^*(W^*)$ - et $H_*(W)$ -modules.

Il existe un homomorphisme de Thom $\mu : W^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$ dual à $\mu : W_*(Y) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Z})$, et un homomorphisme réduit $\mu' : W_1^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{F}_2)$, où $W_1^*(X) = W^*(X) \otimes \mathbb{F}_2$.

Dans le cas où $H^*(X; \mathbb{Z})$ est sans torsion, $H^*(X; \mathbb{F}_2)$ est un groupe différentiel relativement à Sq^2 , et μ' est un morphisme de groupes différentiels. Il est clair que $\mu' : W_1^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{F}_2)$ admet une section si et seulement si $\mu' : W_1^*(Y) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{F}_2)$ admet une section.

(2.4) Voici un cas simple où l'on peut facilement prouver l'existence d'une section de μ' .

Considérons un complexe cellulaire X_0 localement fini, i.e. ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension, et tel que $H^*(X_0; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion. Si $h \in H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$, on a $Sq^2(h^2) = 0$, donc tout carré de $H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$ est un cycle.

PROPOSITION. — Supposons que toute classe de $H^*H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$ contienne un carré. Alors si X est le m -squelette de X_0 , on a :

- (i) $H^*(X; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion ;
- (ii) $\mu' : W_1^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{F}_2)$ admet une section.

Démonstration. — (i) La suite exacte

$$H^i(X_0, X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^{i-1}(X_0, X; \mathbb{Z})$$

montre que $H^i(X; \mathbb{Z}) \cong H^i(X_0; \mathbb{Z})$ pour $i < m$, et que pour $i = m$, on a : $H^m(X; \mathbb{Z}) \cong H^m(X_0; \mathbb{Z}) \oplus \text{im } E$. Comme X est de dimension m , on voit bien que $H^*(X; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion.

(ii) On voit de même que $H^i(X_0; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^i(X; \mathbb{F}_2)$ est bijectif pour $i < m$ et injectif pour $i = m$. Donc, comme Sq^2 est de degré $+2$, on a :

$$H^i H^*(X_0; \mathbb{F}_2) \cong H^i H^*(X; \mathbb{F}_2) \quad \text{si } i \leq m - 2.$$

et par conséquent toute classe de $H^i H^*(X; \mathbb{F}_2)$ ($i \leq m - 2$) contient un carré.

Si $h \in H^*(X; \mathbb{F}_2)$, il existe un $m \in W_1^*(X)$ tel que $\mu'(m) = h$. En effet, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de X est triviale, donc μ , et par suite μ' , sont surjectifs. L'élément $m\bar{m} \in W_1^*(X)$ est un cycle, car :

$$\delta(m\bar{m}) = \delta m \cdot \bar{m} + \bar{m} \delta \bar{m} = 0.$$

D'autre part, $\mu'(m\bar{m}) = h^2$. Il en découle que :

$$(\mu')^* : H^i(W_1^*(X)) \rightarrow H^i H^*(X; \mathbb{F}_2)$$

est surjectif pour $i \leq m - 2$.

Par ailleurs, il est facile de voir que $W_1^i(X) = 0$ pour $i > m$. Donc, pour $i = m - 1$ et $i = m$, le groupe des cycles de $W_1^i(X)$ est $W_1^i(X)$ tout entier. Finalement, on voit que :

$$(\mu')_* : H^*(W_1^*(X)) \rightarrow H^* H^*(X; \mathbb{F}_2)$$

est surjectif en toute dimension.

Il est facile maintenant de trouver une base de $H^*(X; \mathbb{F}_2)$ sur \mathbb{F}_2 : $e_1, \dots, e_l, e'_1, \dots, e'_l, e''_1, \dots, e''_r$ telle que :

$$\begin{aligned} Sq^2 e_i &= e'_i & (i = 1, \dots, l) \\ Sq^2 e''_i &= 0 & (i = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Les classes d'homologie de e''_1, \dots, e''_r forment alors une base de $H^* H^*(X; \mathbb{F}_2)$. Comme $\mu' : W_1^*(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{F}_2)$ et $(\mu')^* : H^*(W_1^*(X)) \rightarrow H^* H^*(X; \mathbb{F}_2)$

sont surjectifs, on peut trouver des classes $a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_r \in W_1^*(X)$ telles que

$$\begin{aligned} \mu'(a_i) &= e_i & (i=1, \dots, l) \\ \mu'(b_i) &= e'' & (i=1, \dots, r) \\ \delta(b_i) &= 0. \end{aligned}$$

Les formules :

$$\begin{aligned} s(e_i) &= a_i \\ s(e'_i) &= \delta a_i \\ s(e''_i) &= b_i \end{aligned}$$

définissent alors une section de μ' . □

Exemple. — Soit $BSU_n = X_0$ l'espace classifiant du groupe SU_n . On sait que $H^*(BSU_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_2, c_3, \dots]$, où $c_i (i \geq 2)$ est la $i^{\text{ème}}$ classe de Chern du fibré classifiant $\tilde{\gamma}_n$ sur BSU_n . En particulier, $H^*(X_0; \mathbb{Z})$ est sans torsion.

Comme la réduction modulo 2 de c_i est w_{2i} , on a :

$$H^*(X_0; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w_4, w_6, \dots].$$

L'action de Sq^2 dans $H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$ est donnée par : $Sq^2 w_{4i} = w_{4i+2}$ (cf., par exemple, [4], §8, problème 8A). Donc :

$$H^*H^*(X_0; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[h_1, h_2, \dots],$$

où $h_i \in H^{8i}H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$ est la classe du cycle w_{4i}^2 . Donc toute classe de $H^*H^*(X_0; \mathbb{F}_2)$ contient un carré, et la proposition s'applique à tout squelette fini de X_0 , en particulier, au $2n$ -squelette qu'on va désigner par $X_n (n \geq 1)$. Il existe donc une section de s_n de $\mu' : W_1^*(X_n) \rightarrow H^*(X_n; \mathbb{F}_2)$.

(2.5) Soit MSU_n l'espace de Thom du fibré $\tilde{\gamma}_n$. On sait que les MSU_n forment un spectre multiplicatif qui détermine les théories $\Omega_*^{SU}(\)$ et $\Omega_{SU}^*(\)$ (cf. [1], [6]). Soit ξ_n la restriction de $\tilde{\gamma}_n$ à X_n , et soit M_n l'espace de Thom de ξ_n . C'est un sous-complexe fini de MSU_n . L'injection $M_n \hookrightarrow MSU_n$ représente un élément $u \in \tilde{\Omega}_{SU}^{2n}(M_n)$ qui est une classe de Thom, en ce sens que sa restriction à $S^{2n} \subset M_n$ est un générateur du Ω_{SU}^* -module libre $\tilde{\Omega}_{SU}^*(S^{2n})$.

Soit $\omega \in \tilde{W}^{2n}(M_n)$ l'image de u par la transformation naturelle $\Omega_{SU}^*(\) \rightarrow W^*(\)$ duale de la transformation $j : \Omega_*^{SU}(\) \rightarrow W_*(\)$ de 1.1.1. On notera $\omega_1 \in \tilde{W}^{2n}(M_n)$ la réduction de ω modulo 2. La classe

$$\mu'(\omega_1) \in \tilde{H}^{2n}(M_n; \mathbb{F}_2)$$

est telle que sa restriction à $S^{2n} \subset M_n$ est le générateur de $\tilde{H}^{2n}(S^{2n}; \mathbb{F}_2)$. C'est donc la classe de Thom cohomologique de M_n .

La multiplication par ω définit un morphisme de W^* -modules $\Phi : W^*(X_n) \rightarrow \tilde{W}^*(M_n)$ et un morphisme réduit $\Phi_1 : W_1^*(X_n) \rightarrow \tilde{W}_1^*(M_n)$. Comme ω est dans l'image de $\Omega_{SU}^*() \rightarrow W^*()$, on a $\delta\omega=0$. La formule de Leibnitz montre alors que Φ , et donc aussi Φ_1 sont des morphismes de modules différentiels.

Soit s_n la section de l'exemple 2.4. Comme la multiplication par $\mu'(\omega_1)$ définit l'isomorphisme de Thom $\Phi_H : H^*(M_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(M_n; \mathbb{F}_2)$, il existe un unique homomorphisme :

$$\sigma_n : \tilde{H}^*(M_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{W}_1^*(M_n)$$

qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^*(M_n; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\sigma_n} & W_1^*(M_n) \\ \Phi_H \uparrow & & \Phi_1 \uparrow \\ H^*(X_n; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{s_n} & W_1^*(X_n). \end{array}$$

Il est clair que σ_n est une section de $\mu' : \tilde{W}_1^*(M_n) \rightarrow \tilde{H}^*(M_n; \mathbb{F}_2)$.

PROPOSITION. — Soit N_n un dual de Spanier-Whitehead de M_n . Alors, le couple exact $\mathcal{S}(N_n)$ est projectif.

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que N_m est un $(2\alpha + 1)$ -dual de M_n . On a alors :

$$\tilde{H}_{2k+1}(N_n; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{2\alpha-2k-1}(M_n; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{2\alpha-2k-1-2n}(X_n; \mathbb{Z}) = 0;$$

donc, en vertu de l'exemple 1 de 1.7, $dh.\mathcal{S}(N_n) < \infty$. De plus, $H_*(N_n; \mathbb{Z})$ est sans torsion. Le résultat découle maintenant de l'existence de σ_n , de 2.3 et du corollaire 2.2. \square

(2.6) Soit X un complexe cellulaire fini pointé.

PROPOSITION. — Pour tout $m \in \tilde{\Omega}_*^{SU}(X)$, il existe un entier positif k , un complexe cellulaire fini pointé Q et une application $f : Q \rightarrow S^k X$ tels que :

- (1) $\tilde{\mathcal{S}}(Q)$ est un couple exact projectif;
- (2) m est dans l'image de $f_* : \tilde{\Omega}_*^{SU}(Q) \rightarrow \tilde{\Omega}_*^{SU}(S^k X) \cong \tilde{\Omega}_*^{SU}(X)$.

Démonstration. — Soit Y un dual de Spanier-Whitehead de X et $p \in \tilde{\Omega}_{SU}^*(Y)$ le dual de m . On peut représenter p par une application $a : S^{2n-r} Y \rightarrow MSU_n$. Comme l'injection canonique $X_n \hookrightarrow BSU_n$ est $(2n-1)$ -connexe, l'injection

$M_n \hookrightarrow MSU_n$ est $(4n-1)$ -connexe. Donc, pour n grand, a se factorise comme suit :

$$S^{2n-r}Y \xrightarrow{a} M_n \hookrightarrow MSU_n.$$

Il en résulte que p est dans l'image de :

$$a^* : \tilde{\Omega}_{St}^{2n}(M_n) \rightarrow \tilde{\Omega}_{SU}^{2n}(S^{2n-r}Y) \cong \tilde{\Omega}_{St}^0(Y).$$

En dualisant, on obtient une application $f : Q = N_n \rightarrow S^k X$ telle que $\mathcal{S}(N_n)$, et donc $\tilde{\mathcal{S}}(N_n)$, sont projectifs (proposition 2.5) et que m est dans l'image de f_* . \square

(2.7) Voici un résultat analogue dans la théorie $W_*()$.

PROPOSITION. — Soit X un complexe cellulaire fini pointé. Pour tout $e \in \tilde{W}_*(X)$, il existe un entier positif l , un complexe cellulaire fini pointé P et une application $g : P \rightarrow S^l X$ tels que :

- (1) $\tilde{\mathcal{S}}(P)$ est un couple exact projectif :
- (2) e est dans l'image de

$$g_* : \tilde{W}_*(P) \rightarrow \tilde{W}_*(S^l X) \cong \tilde{W}_*(X).$$

Démonstration. — On procède exactement comme dans 2.6, avec les deux modifications suivantes :

a) Au lieu du spectre MSU , on considère le spectre MW tel que $MW_n = P_2(\mathbb{C}) \wedge MSU_{n-1}$, qui définit les théories $W_*()$ et $W^*()$ (cf. [6], ch. VIII).

b) Au lieu de M_n , on prend le $2n$ -squelette R_n de MW_n . Le seul point qui mérite une vérification spéciale est l'existence d'une section

$$\chi_n : \tilde{H}^*(R_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{W}_1^*(R_n) \text{ de } \mu' : \tilde{W}_1^*(R_n) \rightarrow \tilde{H}^*(R_n; \mathbb{F}_2).$$

Or, $\tilde{H}^*(MW_n; \mathbb{F}_2) \cong \tilde{H}^*(P_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \otimes \tilde{H}^*(MSU_{n-1}; \mathbb{F}_2)$ comme groupes différentiels. Si $x \in \tilde{H}^2(P_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ est le générateur canonique, on a $Sq^2 x = x^2$, d'où $H^* \tilde{H}^*(P_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) = 0$ et, en vertu de la formule de Künneth, $H^* \tilde{H}^*(MW_n; \mathbb{F}_2) = 0$. L'existence de χ_n découle maintenant de la proposition 2.4 appliquée à $X_0 = MW_n$. \square

(2.8) La proposition suivante est une version topologique de I.2.7.

PROPOSITION. — Soit X un complexe cellulaire fini pointé. Il existe un

entier positif k , un complexe cellulaire fini pointé X_0 et une application $f : X_0 \rightarrow S^k X$ tels que :

- (1) $\tilde{\mathcal{F}}(X_0)$ est un couple exact projectif;
- (2) Le morphisme $f_* : \tilde{\mathcal{F}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(S^k X)$ est surjectif.

Démonstration. — Le couple $\tilde{\mathcal{F}}(X)$ étant cohérent, il découle de I. 1. 16 que le Ω^{SU} -module $t\tilde{\Omega}_*^{SU}(X)$ est de type fini. De même, le W -module $\tilde{W}_*(X)$ est de type fini. Soient $b_1, \dots, b_s \in \tilde{\Omega}_*^{SU}(X)$ des éléments tels que tb_1, \dots, tb_s engendrent $t\tilde{\Omega}_*^{SU}(X)$, et soient $e_1, \dots, e_r \in \tilde{W}_*(X)$ des éléments qui engendrent $\tilde{W}_*(X)$.

Pour tout $i=1, \dots, s$, prenons une application $f_i : Q_i \rightarrow S^{k_i} X$ donnée par la proposition 2.6 pour la classe $m=b_i$. Puis, pour tout $j=1, \dots, r$, prenons une application $g_j : P_j \rightarrow S^{l_j} X$ donnée par la proposition 2.7 pour la classe $e=e_j$. Posons :

$$k = \sup(k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_r),$$

$$X_0 = S^{k-k_1} Q_1 \vee \dots \vee S^{k-k_s} Q_s \vee S^{k-l_1} P_1 \vee \dots \vee S^{k-l_r} P_r,$$

et soit $f : X_0 \rightarrow S^k X$ l'application qui coïncide avec $S^{k-k_i} f_i$ sur $S^{k-k_i} Q_i$ et avec $S^{k-l_j} g_j$ sur $S^{k-l_j} P_j$.

Il est clair que le couple $\tilde{\mathcal{F}}(X_0)$ est projectif. D'autre part.

$$f_* : t\tilde{\Omega}_*^{SU}(X_0) \rightarrow t\tilde{\Omega}_*^{SU}(S^k X) \quad \text{et} \quad f_* : \tilde{W}_*(X_0) \rightarrow \tilde{W}_*(S^k X)$$

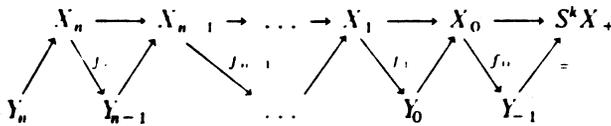
sont surjectifs. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{W}_*(X_0) & \xrightarrow{f} & \tilde{\Omega}_*^{SU}(X_0) & \xrightarrow{t} & t\tilde{\Omega}_*^{SU}(X_0) & \rightarrow & 0 \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \\ \tilde{W}_*(S^k X) & \xrightarrow{f} & \tilde{\Omega}_*^{SU}(S^k X) & \xrightarrow{t} & t\tilde{\Omega}_*^{SU}(S^k X) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes, montre que $f_* : \tilde{\Omega}_*^{SU}(X_0) \rightarrow \tilde{\Omega}_*^{SU}(S^k X)$ est surjectif, donc que $f_* : \tilde{\mathcal{F}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(S^k X)$ est surjectif. \square

(2.9) Soit X un complexe cellulaire fini. On note X_+ la réunion disjointe de X avec un point-base.

Par \mathcal{S} -résolution partielle de X , de longueur n (et de degré k), on entendra un diagramme commutatif (à homotopie près) :



dans la catégorie des complexes cellulaires finis pointés, tel que pour tout i , $0 \leq i \leq n$:

- (1) Le couple exact $\tilde{\mathcal{S}}(X_i)$ est projectif;
- (2) Le morphisme $(f_i)_* : \tilde{\mathcal{S}}(X_i) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(Y_{i-1})$ est surjectif;
- (3) La suite $Y_i \rightarrow X_i \rightarrow Y_{i-1}$ est une cofibration.

On dira d'une \mathcal{S} -résolution partielle que c'est une \mathcal{S} -résolution, si $X_n = Y_{n-1}$ et $Y_n = pt$.

Il est facile de voir que toute \mathcal{S} -résolution partielle de X définit une résolution projective partielle

$$\tilde{\mathcal{S}}(X_n) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(X_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(S^k X_+) \cong \mathcal{S}(X)$$

du couple $\mathcal{S}(X)$, et que toute \mathcal{S} -résolution de longueur n conduit à une résolution projective finie de longueur n de $\mathcal{S}(X)$.

THÉORÈME. — Soit X un complexe cellulaire fini. Alors :

- (i) pour tout $n \geq 0$, il existe une \mathcal{S} -résolution partielle de longueur n de X ;
- (ii) pour qu'il existe une \mathcal{S} -résolution de longueur n de X , il faut et il suffit que l'on ait $dh\mathcal{S}(X) \leq n$.

Démonstration. — (i) Procédons par récurrence sur n . Soit $n=0$. D'après 2.8, il existe une application $f'_0 : X'_0 \rightarrow S^{k-1}X_+$ telle que $\tilde{\mathcal{S}}(X'_0)$ soit un couple projectif et que $(f'_0)_* : \tilde{\mathcal{S}}(X'_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(S^{k-1}X_+)$ soit surjectif. Alors, si Y_0 est la cofibre de f'_0 , on a une cofibration $Y_0 \rightarrow SX'_0 \xrightarrow{Sf'_0} S^k X_+$. On voit bien que l'affirmation est vérifiée pour $n=0$, avec $X_0 = SX'_0$ et $f_0 = Sf'_0$.

Si l'on a déjà construit une \mathcal{S} -résolution partielle :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & X'_{n-1} & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & S^k X_+ \\
 & \nearrow & & & \nearrow & & & & \nearrow & & \nearrow & & \\
 Y'_{n-1} & & & & Y'_{n-2} & & & & \dots & & Y'_0 & & Y'_{-1}
 \end{array}$$

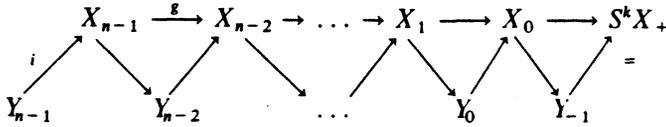
de longueur $n-1$ de X , on trouve, grâce à 2.8, une application $f'_n : X'_n \rightarrow S^{k''}Y'_{n-1}$ telle que $\tilde{\mathcal{S}}(X'_n)$ soit un couple exact projectif et que $(f'_n)_* : \tilde{\mathcal{S}}(X'_n) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(S^{k''}Y'_{n-1})$ soit un morphisme surjectif. Si Y_n est la cofibre de f'_n , on a une cofibration

$$Y_n \rightarrow SX'_n \rightarrow S^{k''+1}Y'_{n-1}$$

et notre affirmation est vérifiée au rang n avec :

$$\begin{aligned}
 X_n &= SX'_n; & X_i &= S^{k''+1}X'_i & (0 \leq i \leq n-1); \\
 Y_i &= S^{k''+1}Y'_i & (0 \leq i \leq n-1); & & Y_{-1} = S^k X_+, & k &= k' + k'' + 1.
 \end{aligned}$$

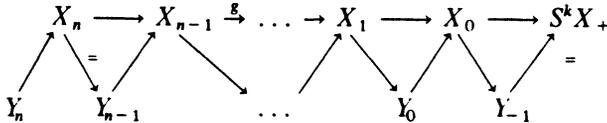
(ii) La nécessité de la condition $dh\mathcal{S}(X) \leq n$ est évidente. Supposons donc que $dh\mathcal{S}(X) \leq n$ et prenons une \mathcal{S} -résolution partielle de longueur $n-1$ de X (on peut supposer $n \geq 1$, car pour $n=0$ il n'y a rien à démontrer) :



Alors, on a une résolution projective partielle de $\mathcal{S}(X)$:

$$\tilde{\mathcal{S}}(X_{n-1}) \xrightarrow{g_*} \tilde{\mathcal{S}}(X_{n-2}) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(X_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(S^k X_+) \cong \mathcal{S}(X).$$

Le noyau de g_* est exactement $\tilde{\mathcal{S}}(Y_{n-1})$. Comme $dh\mathcal{S}(X) \leq n$, $\tilde{\mathcal{S}}(Y_{n-1})$ est projectif (cf. 1.3). Donc, si l'on pose $X_n = Y_{n-1}$, $Y_n = pt$, le diagramme :



est une \mathcal{S} -résolution de longueur n de X . □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CONNER (P. E.), FLOYD (E. E.). – Torsion in SU-bordism, *Mem. A.M.S.*, vol. 60, 1966.
- [2] CONNER (P. E.), SMITH (L.). – On the complex bordism of finite complexes, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 37, 1969, p. 117-212.
- [3] HUSEMOLLER (D.). – *Fibre bundles*, McGraw-Hill Book Co., 1966.
- [4] MILNOR (J. W.), STASHEFF (J. D.). – *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [5] OCHANINE (S.). – Modules de SU-bordisme. Couples exacts cohérents, dans ce numéro, p. 77-96.
- [6] STONG (R. F.). – *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press, 1968.