BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL BRION

Invariants de plusieurs formes binaires

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 429-445
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__429_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 429-445.

INVARIANTS DE PLUSIEURS FORMES BINAIRES

PAR

MICHEL BRION (*)

RÉSUMÉ. — Soient V un $SL_2(\mathbb{C})$-module rationnel de dimension finie, et A l'algèbre des fonctions polynômiales sur V, invariantes par $SL_2(\mathbb{C})$. Pour d entier, notons V_d l'espace des formes binaires de degré d; alors V est de la forme $V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$, d'où une $\mathbb{N}^r$-graduation canonique sur A. On donne une formule explicite pour la série de Poincaré de cette algèbre graduée, avec des exemples numériques pour $r = 2$. On déduit de cette formule la liste des $SL_2(\mathbb{C})$-modules $V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ (avec $r \geqslant 2$) tels que A admette un système de paramètres formé d'éléments $\mathbb{N}^r$-homogènes, et on décrit l'algèbre A dans ces cas, qui se trouvent être les cas les plus simples.

ABSTRACT. — Let V be a rational, finite-dimensional $SL_2(\mathbb{C})$-module and let A be the algebra of polynomial functions on V which are $SL_2(\mathbb{C})$-invariant. If d is an integer, let V_d be the space of binary forms of degree d : then V is a $V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$, whence a canonical $\mathbb{N}^r$-graduation on A. An explicit formula for the Poincaré series of this graded algebra is given, with numerical examples for $r = 2$. From this formula, the list of the $SL_2(\mathbb{C})$-modules $V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ such that A has a $\mathbb{N}^r$-homogeneous system of parameters is deduced, and A is described in all of these cases (which turn out to be the simplest).

1. Introduction

Soient $G = SL_2(\mathbb{C})$ et V un G-module rationnel de dimension finie. Un problème de la théorie des invariants est de décrire par générateurs et relations l'algèbre $A = \mathbb{C}[V]^G$ des polynômes G-invariants sur V. On sait depuis le 19^e^ siècle que même si la dimension de V est petite, l'algèbre A peut être fort compliquée (sa structure n'est pas connue pour V irréductible et $\dim V \geqslant 10$ par exemple).

(*) Texte reçu le 19 janvier 1982, révisé le 24 mai 1982.

M. BRION, École Normale Supérieure, Centre de Mathématiques, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.

Si d est un entier positif, notons V_d l'espace vectoriel des formes binaires de degré d, i.e. des polynômes homogènes de degré d, à deux variables; il existe alors $(d_1, \ldots, d_r)$ tel que $V \simeq V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ comme G-module (*cf.* par exemple [1]), et A s'identifie à l'algèbre des « invariants simultanés de r formes de degrés $d_1, \ldots, d_r$ » dans la terminologie classique. L'algèbre A est $\mathbb{N}^r$-graduée par les degrés partiels par rapport aux V_{d_i}. On peut donc définir la « série de Poincaré » (ou de Hilbert; introduite par Cayley) F de A par :

$$F(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} (\dim A_n) z^n$$

où $z^{(n_1, \ldots, n_r)} = z_1^{n_1} \ldots z_r^{n_r}$ et A_n est l'ensemble des éléments homogènes de A de multidegré n. Il est bien connu (*cf.* par exemple [9]) que la série formelle F est une fraction rationnelle en $z_1, \ldots, z_r$, qui apporte beaucoup d'information sur la structure de A. Dans la deuxième partie de cet article, on établit une formule explicite pour la série de Poincaré de A, en généralisant une formule de Springer (*cf.* [2]) pour les invariants d'une forme binaire. Ces résultats ont été annoncés dans [3].

S'il est difficile de décrire l'algèbre A, on peut en chercher un système de paramètres (i.e. des éléments algébriquement indépendants $P_1, \ldots, P_m$ de A tels que A soit entière sur $\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$). Dans la troisième partie. on énumère les G-modules $V = V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ (avec $r \geqslant 2$ et $V^G = \{0\}$) tels que A admette un système de paramètres formé d'éléments r-homogènes. Il est remarquable que de tels G-modules soient en nombre fini, et que la structure de leur algèbre d'invariants soit particulièrement simple : c'est un module libre de rang au plus 4 sur une sous-algèbre de polynômes. La classification de ces G-modules repose sur l'étude du dénominateur de la série de Poincaré, à l'aide de la formule de la seconde partie.

2. Série de Poincaré des invariants de plusieurs formes binaires

2.1. Soient G et $V = V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ comme précédemment. Soient $z_1, \ldots, z_r$ des indéterminées; si $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers positifs, posons

$$\text{dét}\,(z_i^{a_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = |z^{a_1}, \ldots, z^{a_r}|$$

et

$$S_r(z_1, \ldots, z_r) = \frac{|1 + z^{2r-4}, z + z^{2r-5}, \ldots, z^{r-4} + z^r, z^{r-3}, z^{r-2}, z^{r-1}|}{||1, z, z^2, \ldots, z^{r-1}|}$$

Alors S_r est une somme alternée de fonctions de Schur, c'est donc un polynôme symétrique en r variables.

Si $p \in \mathbb{N}$, notons θ_p une racine primitive p-ième de l'unité. Si $n = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, il existe une unique application linéaire Φ_n : $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_r) \to \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_r)$ telle que

$$\Phi_n(f)(z_1^{n_1}, \ldots, z_r^{n_r}) = \frac{1}{n_1 \ldots n_r} \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n_1, \ldots, 1 \leqslant j_r \leqslant n_r} f(\theta_{n_1}^{j_1} z_1, \ldots, \theta_{n_r}^{j_r} z_r)$$

(théorie de Galois). Pour d entier > 0, posons $I(d) = \{ d - 2j \mid j \in \mathbb{N}, d - 2j > 0 \}$ et pour $d = (d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^r$, posons $I(d) = \Pi_{1 \leqslant j \leqslant r} I(d_j)$. Enfin posons (comme dans [2], formule (4)), pour $d \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant e \leqslant d$:

$$\gamma_{d,e}(z) = (-1)^e z^{e(e+1)} \,.\, \Pi_{1 \leqslant i \leqslant e}(1 - z^{2i})^{-1} \,.\, \Pi_{1 \leqslant j \leqslant d-e}(1 - z^{2j})^{-1}.$$

On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 1. — *La série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{N}^r$-graduée $\mathbb{C}[V]^G$ est*

$$F = \Sigma_{h \in I(d)} \Phi_h(P_h)$$

où

$$P_h(z_1, \ldots, z_r) = \frac{S_r(z_1, \ldots, z_r)}{\Pi_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j)} \,.\, \Pi_{1 \leqslant i \leqslant r}(1 - z_i^2) \gamma_{d_i, (d_i - h_i)/2}(z_i)$$

avec $h = (h_1, \ldots, h_r)$ et $d = (d_1, \ldots, d_r)$.

2.2. *Démonstration.* — Montrons d'abord le

LEMME 1. — *Si* $\max_{1 \leqslant j \leqslant r} |z_j| < 1$, *alors*

$$F(z_1, \ldots, z_r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - e^{2i\theta}) \,.\, \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} f_{d_j}(z_j, e^{i\theta}) \, d\theta$$

où pour $e \in \mathbb{N}$, on pose $f_e(z, u) = \prod_{0 \leqslant j \leqslant e}(1 - z u^{e-2j})^{-1}$.

Démonstration du lemme 1 :

Remarquons que $f_e(z, e^{i\theta}) = \dfrac{1}{\text{dét}_{V_e}(1 - zg)}$ où $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, et que

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{1}{\text{dét}_{V_{d_j}}(1 - z_j g)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}[V]_n}(g^{-1}),$$

cette série convergeant, uniformément par rapport à θ, pour $\max_{1 \leqslant j \leqslant r} |z_j| < 1$. Il suffit donc de montrer que

$$\dim \mathbb{C}[V]_n^G = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - e^{2i\theta}) \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}[V]_n}(g^{-1})\, d\theta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^r$. Or $\mathbb{C}[V]_n$ est somme directe de sous-G-modules de la forme V_e, et on voit facilement que

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - e^{2i\theta}) \operatorname{Tr}_{V_e}(g^{-1})\, d\theta \quad \text{vaut 0 si } e \neq 0, \text{ et 1 si } e = 0.$$

Suite de la démonstration du théorème.

Si N est un entier > 0 divisible par tous les $h \in I(d_1) \cup \ldots \cup I(d_r)$, on a ([2], proposition 1) :

$$f_e(z, u) = \textstyle\sum_{h \in I(e)} h^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant h} ((1 - z^{N/h}\theta_h^j u)^{-1} - (1 - z^{-N/h}\theta_h^{-j} u)^{-1}) \gamma_{e,(e-h)/2}(z^{N/h}\theta_h^j)$$

pour tout $e \in \{d_1, \ldots, d_r\}$; donc $F(z_1, \ldots, z_r)$ est la somme de termes $A_{j,h}$ avec $j = (j_1, \ldots, j_r)$, $h = (h_1, \ldots, h_r)$, $1 \leqslant j_n \leqslant h_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant r$, et $h \in I(d)$:

$$A_{j,h} = (2i\pi h_1 \ldots h_r)^{-1} \int_{|u|=1} \textstyle\prod_{1 \leqslant l \leqslant r} ((1 - z_l^{N/h_l} \cdot \theta_{h_l}^{j_l} u)^{-1} - (1 - z_{h_l}^{-N/h_l}\theta_{h_h}^{-j_l} u)^{-1}) \cdot (1 - u^2) \cdot \gamma_{d_l,(d_l - h_l)/2}(z_l^{N/h_l}\theta_{h_l}^{j_l}).$$

A l'intérieur du cercle $|u| = 1$, les pôles de la fraction rationnelle à intégrer dans $A_{j,h}$ sont : $z_1^{N/h}\theta_{h_1}^{j_1}$ avec $1 \leqslant l \leqslant r$. Si l'on suppose que $|z_i^{N/h_i}| \neq |z_j^{N/h_j}|$ pour $i \neq j$, $h_i \in I(d_i)$, $h_j \in I(d_j)$, alors ces pôles sont simples, distincts. Soit $B_{j,h,l}$ le résidu en $z_1^{N/h_1}\theta_{h_1}^{j_1}$. On a

$$F(z_1, \ldots, z_r) = \textstyle\sum_{h \in I(d)} \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant h_1, \ldots, 1 \leqslant j_r \leqslant h_r, 1 \leqslant l \leqslant r} \dfrac{B_{j,h,l}}{h_1 \ldots h_r},$$

et

$$B_{j,h,l} = \textstyle\prod_{l' \neq l} ((1 - z_{l'}^{N/h_{l'}} \cdot \theta_{h_{l'}}^{j_{l'}} \cdot z_l^{N/h_l} \cdot \theta_{h_l}^{j_l})^{-1} - (1 - z_{l'}^{-N/h_{l'}} \cdot \theta_{h_{l'}}^{-j_{l'}} \cdot z_l^{N/h_l} \cdot \theta_{h_l}^{j_l})^{-1}).$$

$$\textstyle\prod_{1 \leqslant l' \leqslant r} \gamma_{d_{l'},(d_l - h_l)/2}(z_{l'}^{N/h_{l'}} \cdot \theta_{h_{l'}}^{j_{l'}}) \cdot (1 - z^{2N/h_l} \cdot \theta_{h_l}^{2j_l}).$$

Posons alors, pour $h \in I(d)$:

$$P_{l,h}(z_1, \ldots, z_r) = \textstyle\prod_{l' \neq l} ((1 - z_{l'} z_1)^{-1} - (1 - z_{l'}^{-1} z_1)^{-1}) \cdot \prod_{1 \leqslant l' \leqslant r} \gamma_{d_{l'},(d_{l'} - h_{l'})/2}(z_{l'}) \cdot (1 - z_l^2)$$

On a alors : $F(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{h \in I(d)} \Phi_h(\sum_{1 \leqslant l \leqslant r} P_{l,h})(z_1, \ldots, z_r)$.

Or $(1 - z_{l'}z_l)^{-1} - (1 - z_{l'}^{-1}z_l)^{-1} = z_l(1 - z_{l'}^2)(1 - z_{l'}z_l)^{-1}(z_l - z_{l'})^{-1}$, donc

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant r} P_{l,h}(z_1, \ldots, z_r)$$
$$= \prod_{1 \leqslant l \leqslant r}(1 - z_l^2) \cdot \gamma_{d_l,(d_l - h_l)/2}(z_l) \sum_{1 \leqslant l \leqslant r} \frac{z_l}{\prod_{l' \neq l}(1 - z_{l'}z_l)(z_l - z_{l'})}$$
$$= \prod_{1 \leqslant l \leqslant r}(1 - z_l^2)\gamma_{d_l,(d_l - h_l)/2}(z_l) \cdot s_r(z_1, \ldots, z_r) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j)^{-1}$$

où

$$s_r(z_1, \ldots, z_r) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j) \cdot \sum_{1 \leqslant l \leqslant r} \frac{z_l^{r-1}}{\prod_{l' \neq l}(1 - z_l z_{l'})(z_l - z_{l'})}$$

Pour calculer s_r, prenons $d_1 = \ldots d_r = 1$. Alors $I(d) = \{(1, \ldots, 1)\}$, $\gamma_{1,0}(z) = (1 - z^2)^{-1}$, $\Phi_d = \mathrm{id}$ et si F_r est la série de Poincaré de $\mathbb{C}[(V_1)^r]^G$, on a :

$$F_r(z_1, \ldots, z_r) = s_r(z_1, \ldots, z_r) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j)^{-1}.$$

Appliquons alors la formule (10) de [4] : on obtient

$$s_r(z_1, \ldots, z_r) = \frac{|1 + z^{2r-4}, z + z^{2r-5}, \ldots, z^{r-4} + z^r, z^{r-3}, z^{r-2}, z^{r-1}|}{|1, z, z^2, \ldots, z^{r-1}|}$$

donc $s_r = S_r$, d'où le théorème 1.

2.3. *Exemples.* — Si a_n est la fonction symétrique élémentaire à r variables et de degré n, on a :

$$S_1 = S_2 = S_3 = 1; \quad S_4 = 1 - a_4; \quad S_5 = 1 - a_4 + a_1 a_5 - a_5^2.$$

Si $r = 1$, le théorème 1 n'est autre que la formule (13) de [2].

Si $r = 2$, on obtient pour la série de Poincaré F de $\mathbb{C}[V_d \times V_{d'}]^G$:

$$F(z, z') = \sum_{h \in I(d), h' \in I(d')} \Phi_{h,h'}\left(\frac{(1 - z^2)(1 - z'^2)}{1 - zz'} \gamma_{d,(d-h)/2}(z)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z')\right).$$

A l'aide de cette dernière expression, M. Michel Quercia a calculé sur un ordinateur les valeurs de F pour $d \leqslant 5$ et $d' \leqslant 5$ (ces valeurs n'étaient connues que pour $d \leqslant 4$ et $d' \leqslant 4$, ou pour $d = 1$ et $d' = 5$; *cf.* [5]). On trouvera ci-dessous les valeurs de la série de Poincaré $\varphi(z) = f(z, z)$ de l'algèbre $\mathbb{C}[V_d \times V_{d'}]^G = \underset{\cdot}{A}$ graduée par le degré par rapport à V, pour $d' = 5$ et $2 \leqslant d \leqslant 5$. Ces séries de Poincaré sont données sous forme « représentative » : le numérateur de φ est un polynôme en z, à coefficients entiers positifs, et le dénominateur est un produit de m termes de la forme $1 - z^n$ où $m = d + d' - 1$ est la dimension de Krull de A. Une telle forme existe toujours car A est une algèbre $\mathbb{N}$-graduée de Cohen-Macaulay (*cf*. [6], [7]).

$(d, d') = (2, 5)$. Numérateur de φ :

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + 2z^7 + 3z^8 + 5z^9 + 5z^{10} + 8z^{11} + 7z^{12} + 8z^{13} + 5z^{14} + 5z^{15} + 3z^{16} + 2z^{17} + z^{18} + z^{20} + z^{22} + z^{24}.$$

Dénominateur :

$$(1 - z^3)(1 - z^4)(1 - z^5)(1 - z^6)(1 - z^7)(1 - z^8).$$

(3, 5). Numérateur :

$$1 + 3z^4 + 5z^6 + 19z^8 + 29z^{10} + 10z^{12} + 12z^{14} + 12z^{16} + 10z^{18} + 29z^{20} + 19z^{22} + 5z^{24} + 3z^{26} + z^{30}.$$

Dénominateur :

$$(1 - z^4)^3(1 - z^6)^2(1 - z^8)^2.$$

(4, 5). Numérateur :

$$1 + 2z^5 + 4z^6 + 6z^7 + 9z^8 + 15z^9 + 18z^{10} + 23z^{11} + 29z^{12} + 31z^{13} + 33z^{14} + 37z^{15} + 37z^{16} + 37z^{17} + 37z^{18} + 33z^{19} + 31z^{20} + 29z^{21} + 23z^{22} + 18z^{23} + 15z^{24} + 9z^{25} + 6z^{26} + 4z^{27} + 2z^{28} + z^{33}.$$

Dénominateur :

$$(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4)(1 - z^5)(1 - z^6)(1 - z^7)(1 - z^8)(1 - z^9).$$

(5, 5). Numérateur :

$$1 + 4z^4 + 4z^6 + 44z^8 + 70z^{10} + 184z^{12} + 215z^{14} + 382z^{16} + 491z^{18} + 508z^{20} + 491z^{22} + 382z^{24} + 215z^{26} + 184z^{28} + 70z^{30} + 44z^{32} + 4z^{34} + 4z^{36} + z^{40}.$$

Dénominateur :

$$(1 - z^2)(1 - z^4)^2(1 - z^6)^2(1 - z^8)^3.$$

2.4. Le théorème suivant généralise le corollaire 2 de [2] (*cf.* aussi [8], Example 4.2 et Theorem 4.3).

THÉORÈME 2. — *Avec les notations du théorème* 1, *on a pour* $r \geqslant 3$; *ou pour* $r = 2$, *et* $(d_1, d_2) \neq (1, 1)$; *ou pour* $r = 1$, $d \geqslant 3$:

$$F(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}) = (-1)^m z_1^{d_1+1} \ldots z_r^{d_r+1} F(z_1, \ldots, z_r)$$

où $m = d_1 + \ldots + d_r + r - 3$ *est la dimension de Krull de* $\mathbb{C}[V]^G$.

Démonstration. — D'après le théorème 1, on a :

$$F(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}) = \sum_{h \in I(d)} \Phi_h(S_r(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i^{-1} z_j^{-1})^{-1} \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(1 - z_i^{-2}) \gamma_{d_i,(d_i - h_i)/2}(z_i^{-1}))$$

Or on sait que

$$\gamma_{d,(d-h)/2}(z^{-1}) = (-1)^d z^{h(d+1)} \gamma_{d,(d-h)/2}(z)$$

(*cf.* [2], formule (5)). De plus, si $r \geqslant 3$, on vérifie facilement que

$$S_r(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}) = (-1)^{(r(r-1)/2)-1}(z_1 \ldots z_r)^{-1} S_r(z_1, \ldots, z_r).$$

On a donc :

$$(-1)^m F(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}) =$$

$$\sum_{h \in I(d)} \Phi_h\left(\frac{S_r(z_1, \ldots, z_r)}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} z_i^{h_i(d_i+1)}(1 - z_i^2) \gamma_{d_i,(d_i - h_i)/2}(z_i)\right).$$

Or on a pour $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ et $a \in \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_r)$:

$$\Phi_h(z_1^{n_1 h_1} \ldots z_r^{n_r h_r} a(z_1, \ldots, z_r)) = z_1^{n_1} \ldots z_r^{n_r} \Phi_h(a)(z_1, \ldots, z_r).$$

On en déduit le théorème pour $r \geqslant 3$.

Si $r = 2$, on obtient :

$$F(z^{-1}, z'^{-1}) =$$

$$\sum_{h \in I(d), h' \in I(d')} \Phi_{h,h'}\left(\frac{(1 - z^{-2})(1 - z'^{-2})}{1 - z^{-1} z'^{-1}} \gamma_{d,(d-h)/2}(z^{-1}) \gamma_{d',(d'-h')/2}(z')\right)$$

$$= (-1)^{d+d'+1} z^{d+1} z'^{d'+1}$$

$$\sum_{h \in I(d), h' \in I(d')} \Phi_{h,h'}\left(z^{-1} z'^{-1} \frac{(1 - z^2)(1 - z'^2)}{1 - z z'} \gamma_{d,(d-h)/2}(z) \gamma_{d',(d'-k)/2}(z')\right)$$

d'où

$$- F(z, z') + (-1)^{d+d'+1} z^{-d-1} z'^{-d'-1} F(z^{-1}, z'^{-1}) = \sum_{h \in I(d), h' \in I(d')} \Phi_{h,h'}(z^{-1}(1-z^2)\gamma_{d,(d-h)/2}(z) \, . \, z'^{-1}(1-z'^2)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z'))$$

Il est clair que si $a, b \in \mathbb{C}(z)$, alors $\Phi_{h,h'}(a(z)b(z')) = \Phi_h(a)(z)\Phi_{h'}(b)(z')$, d'où

$$- F(z, z') + (-1)^{d+d'+1} z^{-d-1} z'^{-d'-1} F(z^{-1}, z'^{-1}) = \sum_{h \in I(d)} \Phi_h((z^{-1} - z)\gamma_{d,(d-h)/2}(z)). \sum_{h' \in I(d')} \Phi_{h'}((z'^{-1} - z')\gamma_{d',(d'-h')/2}(z')).$$

Or d'après [2], démonstration du corollaire 1, on a pour $d \geqslant 2$:

$$\sum_{h \in I(d)} \Phi_h(z\gamma_{d,(d-h)/2}(z)) = \sum_{h \in I(d)} \Phi_h((z^{-1}\gamma_{d,(d-h)/2}(z)),$$

d'où le théorème dans le cas où $r = 2$. Pour $r = 1$, *cf.* [2], corollaire 2.

2.5. Le théorème 1 permet d'expliciter la série de Poincaré $f(z_1, \ldots, z_r, t)$ de l'algèbre des « covariants de r formes binaires de degrés $d_1, \ldots, d_r$ »; en effet cette algèbre n'est autre que $\mathbb{C}[V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r} \times V_1]^G$, munie de sa $\mathbb{N}^r$-graduation canonique. On obtient ainsi :

$$f(z_1, \ldots, z_r, t) = \sum_{h \in I(d)} \Phi_h\left(\frac{S_{r+1}(z_1, \ldots, z_r, t)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(1 - z_i t) . \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}(1 - z_i z_j)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(1 - z_i^2)\gamma_{d_i,(d_i - h_i)/2}(z_i)\right)$$

avec $h = h_1, \ldots, h_r)$ et $d = (d_1, \ldots, d_r)$. En effet $I(1) = \{1\}$, et

$$\gamma_{1,0}(z) = (1 - z^2)^{-1}.$$

De plus, d'après le théorème 2, on a pour $\{d_1, \ldots, d_r\} \neq \{1\}$:

$$f(z_1^{-1}, \ldots, z_r^{-1}, t^{-1}) = (-1)^m z_1^{d_1+1} \ldots z_r^{d_r+1} t^2 f(z_1, \ldots, z_r, t),$$

avec $m = d_1 + \ldots + d_r + r - 1$.

REMARQUE. — Dans le cas d'une seule forme binaire, les résultats qui précèdent étaient déjà connus de SYLVESTER et FRANKLIN; *cf.* par exemple [9].

3. Systèmes de paramètres plurihomogènes

3.1. Soit $V = V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ un G-module tel que $r \geqslant 2$ et $V^G = \{0\}$. Comme $\mathbb{C}[V]^G = A$ est une algèbre de Cohen-Macaulay (*cf.* [6]), il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_s$ homogènes par rapport à V, tels que $P_1, \ldots, P_m$ soit un système de paramètres de A, et que

$$A = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant s} Q_i \mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m].$$

La dimension de Krull de A est $m = d_1 + \ldots + d_r + r - 3$.

THÉORÈME 3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *On peut choisir* $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_s$ *homogènes par rapport à chaque* V_{d_i}, $1 \leqslant i \leqslant r$.

(ii) A *admet un système de paramètres homogènes par rapport à chaque* V_{d_i}.

(iii) *La série de Poincaré (à* r *variables) de* A *admet pour dénominateur un produit de* m *termes de la forme* $1 - z^e$, $e \in \mathbb{N}^r$.

(iv) $(d_1, \ldots, d_r)$ *fait partie de la liste suivante :*

$(r = 2)$ (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (4, 4).

$(r = 3)$ (1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 2); (2, 2, 2).

Démonstration. — Il est clair que (i) ⇒ (ii). De plus, si (ii) est vraie, alors A est un module $\mathbb{N}^r$-gradué sur $\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$; comme A est libre sur $\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$, il est bien connu que le $\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$-module A admet une base $(Q_1, \ldots, Q_s)$ formée d'éléments r-homogènes, et l'on a alors :

$$F(z_1, \ldots, z_r) = \frac{\sum_{1 \leqslant i \leqslant s} z^{\deg Qi}}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant m}(1 - z^{\deg P_j})}$$

donc (i) ⇔ (ii) ⇒ (iii). On va d'abord montrer que (iv) ⇒ (ii), puis que (iii) ⇒ (iv).

3.2. *Démonstration de* (iv) ⇒ (ii)

D'après la théorie de Hilbert (*cf.* [10], paragraphe 4, p. 326), il suffit de trouver $P_1, \ldots, P_m$ éléments r-homogènes de A, dont l'annulation simultanée entraîne l'annulation de tous les éléments sans terme constant de A; autrement dit, si u_i est la forme binaire de degré d_i :

$$P_1(u_1, \ldots, u_r) = \ldots = P_m(u_1, \ldots, u_r) = 0$$

implique que $u_1, \ldots, u_r$ ont un facteur linéaire commun, de multiplicité $> d_i/2$ dans chaque u_i (*cf.* [10], paragraphe 5, p. 238). Montrons sur des exemples comment construire un système de paramètres r-homogènes dans chaque cas de la liste.

Exemple 1. — Les cas (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 1, 1) ne posent aucun problème car A est alors engendrée par des éléments algébriquement indépendants (*cf.* par exemple [11], p. 323 à 331).

Exemple 2. — Cas de $(d_1, d_2) = (2, 4)$. On a alors $m = 5$. On considère les invariants d'une forme quadratique u et d'une forme quartique v. Posons

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

et

$$v = a'x^4 + 4b'x^3y + 6c'x^2y^2 + 4d'xy^3 + e'y^4.$$

L'algèbre des invariants de v est engendrée par I de degré 2, et J de degré 3 (*cf.* [11], p. 173). Le coefficient de $\lambda\mu$ dans $I(\lambda\mu^2 + \mu v)$ est un invariant bihomogène C, et $C(ax^2, v) = a^2e'$. Le coefficient de $\lambda\mu^2$ dans $J(\lambda u^2 + \mu v)$ est un invariant bihomogène D, et $D(ax^2, v) = a^2(c'e' - d'^2)$. Soit Δ le discriminant de u. Si $\Delta(u) = I(v) = J(v) = C(u, v) = D(u, v) = 0$ alors quitte à transformer u et v par un $g \in G$, on peut supposer que $u = ax^2$; $b = c = 0$.

• Si $a = 0$, comme $u = 0$ et $I(v) = J(v) = 0$, tous les invariants sans terme constant de u et v sont nuls.

• Si $a \neq 0$, comme $C(u, v) = D(u, v) = 0$, on a : $e' = d' = 0$. De plus, $I(v) = a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = 0$ donc $c' = 0$. On a alors $u = ax^2$, et $v = (a'x + 4b'y)x^3$ donc u, v ont un facteur commun de multiplicité convenable. On en déduit que (Δ, I, J, C, D) est un système de paramètres 2-homogènes de A.

Exemple 3. — Cas de $(d_1, d_2) = (3, 3)$. On a alors $m = 5$; on considère les invariants de deux cubiques u, v. Soit Δ le discriminant de la forme cubique; écrivons

$$\Delta(\lambda u + \mu v) = \textstyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant 4} \lambda^i \mu^{4-i} \Delta_i(u, v).$$

D'après [10], p. 331, $\Delta_0, \ldots, \Delta_4$ sont des invariants bihomogènes, dont l'annulation simultanée implique que u et v ont un facteur carré commun. Donc $(\Delta_0, \ldots, \Delta_4)$ est un système de paramètres de A formé d'éléments bihomogènes.

Exemple 4. — $(d_1, d_2, d_3) = (1, 1, 2)$. On a alors $m = 4$; on considère les invariants des formes $u = \alpha x + \beta y$; $u' = \alpha' x + \beta' y$; $v = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Formons les invariants trihomogènes $C = \alpha\beta' - \alpha'\beta$; $D = ac - b^2$; $E = a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2$; $E' = a\beta'^2 - 2b\alpha'\beta' + c\alpha'^2$.

Si $C(u, u') = D(v) = E(u, v) = E'(u', v) = 0$, alors comme $ac - b^2 = 0$, on peut supposer que $u = ax^2$ et $b = c = 0$. On a alors

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = a\beta^2 = a\beta'^2 = 0.$$

• Si $a = 0$, alors $v = 0 = \alpha\beta' - \alpha'\beta$; tous les invariants sans terme constant de u, u', v sont donc nuls.

• Si $a \neq 0$, alors $\beta = \beta' = 0$, donc $u = \alpha x$, $u' = \alpha' x$, $v = ax^2$: on voit que u, u', v ont un facteur linéaire commun de multiplicité convenable, donc (C, D, E, E') est un système de paramètres trihomogènes de A.

Les autres valeurs de $(d_1, \ldots, d_r)$ se traitent de façon analogue. Pour les cas (4, 4) et (2, 2, 2), on procède comme dans l'exemple 3, et pour le cas (1, 2, 2) comme dans l'exemple 4. Pour les cas restants, on peut utiliser la description de A donnée dans [11] (paragraphes 141, 145 et 260).

Démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (iv)

3.3. *Cas de deux formes binaires*

Soit $V = V_d \times V_{d'}$ tel que la série de Poincaré F de $\mathbb{C}[V]^G$ s'écrive :

$$F(z, z') = P(z, z') \,.\, \prod_{(e,e')\in X}(1 - z^e z'^{e'})^{-1}$$

où P est un polynôme, et où card $X = m = d + d' - 1$.

Si h, h' sont des entiers, on note $h \wedge h'$ leur pgcd et $h \vee h'$ leur ppcm; on note enfin $E_{d,d'}$ l'ensemble des termes qui ne figurent qu'une fois dans la suite des $(h/h \wedge h', h'/h \wedge h')$, $h \in I(d)$, $h' \in I(d')$.

LEMME 2. — $F(z, z') = \sum_{h\in I(d), h'\in I(d')}(1 - z^{h'/h \wedge h'} z'^{h/h \wedge h'})^{-1} A_{h,h'}(z, z')$ *où* $A_{h,h'}$ *est une fraction rationnelle non nulle, dont le dénominateur est de la forme* $f(z)g(z')$, *avec* $f, g \in \mathbb{C}[Z]$.

Démonstration. — Pour $h \in I(d)$, $h' \in I(d')$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Phi_{h,h'}((1 - z^2)(1 - z'^2)(1 - zz')^{-1}\gamma_{d,(d-h)/2}(z)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z')) \\
&\quad = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{h,h'}((1 - z^2)(1 - z'^2)(zz')^n \gamma_{d,(d-h)/2}(z)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z')) \\
&\quad = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_h(z^n(1 - z^2)\gamma_{d,(d-h)/2}(z)) \,.\, \Phi_{h'}(z'^n(1 - z'^2)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z')) \\
&\quad = (1 - z^{h'/h \wedge h'} z'^{h/h \wedge h'})^{-1} \\
&\qquad\qquad \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_h(z^n(1 - z^2)\gamma_{d,(d-h)/2}(z))\Phi_{h'}(z'^n(1 - z'^2)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z'))
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$f_{n,h}(z) = \Phi_h(z^n(1 - z^2)\gamma_{d,(d-h)/2}(z))$$

$$g_{n,h'}(z') = \Phi_{h'}(z'^n(1 - z'^2)\gamma_{d',(d'-h')/2}(z'))$$

et

$$A_{h,h'}(z, z') = \textstyle\sum_{n=0}^{-1+h \vee h'} f_{n,h}(z) g_{n,h'}(z').$$

L'expression de F obtenue en 2.3 donne alors :

$$F(z, z') = \sum_{h\in I(d), h'\in I(d')}(1 - z^{h'/h \wedge h'} z'^{h/h \wedge h'})^{-1} A_{h,h'}(z, z')$$

et le dénominateur de $A_{h,h'}$ est de la forme $f(z)g(z')$, avec $f, g \in \mathbb{C}[Z]$. Il reste à montrer que $A_{h,h'} \neq 0$.

Fixons h, h' et posons $e = (d-h)/2$. La série de Taylor en 0 de $z^n(1-z^2)\gamma_{d,e}(z)$ a tous ses coefficients entiers, du signe de $(-1)^e$ ou nuls (d'après la forme de $\gamma_{d,e}$) donc il en est de même de la série de Taylor de $f_{n,h}(z) = \Phi_h(z^n(1-z^2)\gamma_{d,e}(z))$ en 0. En effet Φ_h se prolonge en un endomorphisme de l'espace des fonctions analytiques au voisinage de 0, tel que $\Phi_h(z^n) = z^{n/h}$ si h divise n; sinon $\Phi_h(z^n) = 0$. Les $g_{n,h'}$ vérifiant une propriété analogue, il suffit de montrer que $\Phi_h((1-z^2)\gamma_{d,e}(z)) \neq 0$, ou encore que la série de Taylor en 0 de $(-1)^e(1-z^2)\gamma_{d,e}(z)$ contient un terme en z^{nh}.

Or si $d \geqslant 2$, alors $1 - z^2$ divise le dénominateur de $(-1)^e(1-z^2)\gamma_{d,e}(z)$ donc on a au voisinage de 0 :

$$(-1)^e(1-z^2)\gamma_{d,e}(z) = z^{e(e+1)}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

avec $a_{2n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$; on peut alors choisir n pour que

$$2n + e(e+1) \equiv 0 \bmod h,$$

d'où le résultat dans ce cas.

Si $d = 1$, alors $h = 1$ et $e = 0$ donc $(-1)^e(1-z^2)\gamma_{d,e}(z) = 1$ et on a encore $\Phi_h((1-z^2)\gamma_{d,e}(z)) \neq 0$. D'où le lemme 2.

Comme le polynôme $1 - z^a z'^{a'}$ est irréductible si $a \wedge a' = 1$, on déduit du lemme 2 que $\prod_{(h,h')\in E_{d,d'}}(1 - z^{h'/h \wedge h'} z'^{h/h \wedge h'})$ divise le dénominateur de $F(z, z')$ (sous forme irréductible), donc divise $\prod_{(e,e')\in X}(1 - z^e z'^{e'})$. Or pour $e \neq 0$ et $e' \neq 0$, $1 - z^e z'^{e'}$ a au plus un diviseur de la forme $1 - z^a z'^{a'}$ avec $(a, a') \in E_{d,d'}$. Donc $a_{d,d'} = \text{card } E_{d,d'} \leqslant$ nombre d'éléments (e, e') de X tels que $e \neq 0$ et $e' \neq 0$.

Soit m_d la dimension de Krull de $\mathbb{C}[V_d]^G$, et soit f_d la série de Poincaré de $\mathbb{C}[V_d]^G$: on sait que m_d est caractérisée par : $\lim_{z\to 1}(1-z)^{m_d} f_d(z)$ est finie non nulle. Or

$$f_d(z) = P(z, 0) \, . \prod_{(e,0)\in X}(1 - z^e)^{-1}$$

et $P(z, 0)$ est un polynôme, donc

$$m_d \leqslant \text{card } \{(e, 0) \mid (e, 0) \in X\}.$$

Comme card $X = m$, on en déduit que

$$\ldots(*) \qquad a_{d,d'} \leqslant m - m_d - m_{d'} = d + d' - m_d - m_{d'} - 1$$

On vérifie facilement le

LEMME 3. — (i) *Si $d \geqslant 3$ et $d' \geqslant 3$, alors $a_{d,d'} \geqslant 4$ sauf pour $a_{3,3} = a_{4,4} = 2$.*

(ii) *Si $d' \geqslant 3$, alors $a_{1,d'} = a_{2,d'} \geqslant 3$ sauf pour $a_{1,3} = a_{1,4} = a_{2,3} = a_{2,4} = 2$.* (Rappelons que $a_{d,d'}$ est le nombre de termes distincts dans la suite des $(h/h \wedge h', h'/h \wedge h')$, $h \in I(d)$, $h' \in I(d')$.)

Si $d \geqslant 3$ et $d' \geqslant 3$, alors $m_d = d - 2$ et $m_{d'} = d' - 2$ donc $(*)$ donne : $a_{d,d'} \leqslant 3$. D'après le lemme 3, les seules valeurs possibles pour (d, d') sont $(3, 3)$ et $(4, 4)$.

Si $d = 2$ et $d' \geqslant 3$, alors $m_d = 1$ et $m_{d'} = d' - 2$ donc $a_{d,d'} \leqslant 2$. Les seules valeurs possibles pour (d, d') sont $(2, 3)$ et $(2, 4)$.

Si $d = 1$ et $d' \geqslant 3$, alors $m_d = 0$ donc $a_{d,d'} \leqslant 2$, ce qui donne pour valeurs possibles $(1, 3)$ et $(1, 4)$.

Il reste comme possibilités : $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$. On obtient donc la liste du théorème 3 (iv) pour $r = 2$.

3.4.. *Cas d'au moins trois formes binaires*

Soit d'abord $V = V_{d_1} \times V_{d_2} \times V_{d_3}$ tel que la série de Poincaré F de $\mathbb{C}[V]^G$ s'écrive :

$$F(z) = P(z) \,.\, \textstyle\prod_{e \in X}(1 - z^e)^{-1}$$

où $z = (z_1, z_2, z_3)$, P est un polynôme, et X est un ensemble à m éléments de $\mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$; $m = d_1 + d_2 + d_3$ est la dimension de Krull de $\mathbb{C}[V]^G$. Si $d, d' \geqslant 1$, soit $b_{d,d'}$ le nombre de facteurs de la forme $1 - z^e z'^{e'}$, avec $e \wedge e' = 1$, dans le dénominateur de la série de Poincaré (sous forme irréductible) de $\mathbb{C}[V_d \times V_{d'}]^G$. Alors $\prod_{e \in X}(1 - z^e)$ est divisible par les dénominateurs de $F(z_1, z_2, 0)$, $F(z_1, 0, z_3)$, $F(0, z_2, z_3)$. Comme $F(z_1, z_2, 0)$ est la série de Poincaré de $\mathbb{C}[V_{d_1} \times V_{d_2}]^G$, on voit que $\prod_{e \in X}(1 - z^e)$ est divisible par m_{d_1} éléments de la forme $1 - z_1^a$, b_{d_1,d_2} éléments de la forme $1 - z_1^{a_1} z_2^{a_2}$, etc. On a donc :

$$\ldots(**) \quad m_{d_1} + m_{d_2} + m_{d_3} + b_{d_1,d_2} + b_{d_1,d_3} + b_{d_2,d_3} \leqslant m$$
$$= d_1 + d_2 + d_3$$

De plus $b_{d,d'} \geqslant a_{d,d'}$ d'après le lemme 2.

Si $d_1 \geqslant 3$; $d_2 \geqslant 3$; $d_3 \geqslant 3$, alors $b_{d_1,d_2} + b_{d_1,d_3} + b_{d_2,d_3} \leqslant 6$ donc $a_{d_1,d_2} + a_{d_1,d_3} + a_{d_2,d_3} \leqslant 6$. D'après le lemme 3, les seules possibilités pour (d_1, d_2, d_3) sont (3, 3, 3) et (4, 4, 4). Or d'après [5], le dénominateur de la série de Poincaré (sous forme irréductible) de $\mathbb{C}[V_3 \times V_3]^G$ est

$$(1 - zz')(1 - z^3z')(1 - zz'^3)(1 - z^4)(1 - z'^4)$$

donc $b_{3,3} = 3$, ce qui élimine le cas (3, 3, 3). De même, le dénominateur de la série de Poincaré (sous forme irréductible) de $\mathbb{C}[V_4 \times V_4]^G$ est

$$(1 - zz')(1 - z^2z')(1 - zz'^2)(1 - z^2)(1 - z'^2)(1 - z^3)(1 - z'^3)$$

(*cf.* [5]) donc $b_{4,4} = 3$, ce qui élimine le cas (4, 4, 4). On peut donc supposer que $d_3 = 2$.

Si $d_3 = 2$ et $d_2 \geqslant 3$, alors $m_{d_3} = 1$ et (**) donne :

$$m_{d_1} + m_{d_2} + b_{2,d_1} + b_{2,d_2} + b_{d_1,d_2} \leqslant 1 + d_1 + d_2$$

d'où, comme $m_{d_2} = d_2 - 2$:

$$a_{2,d_1} + a_{2,d_2} + a_{d_1,d_2} \leqslant d_1 - m_{d_1} + 3.$$

Donc $d_1 \leqslant 2$ (sinon on aurait $a_{2,d_1} + a_{2,d_2} + a_{d_1,d_2} \leqslant 5$ ce qui contredit le lemme 3).

Si $d_1 = 2$, on a : $2a_{2,d_2} \leqslant 3$ ce qui est faux (lemme 3 (ii)) et si $d_1 = 1$, on a : $2a_{1,d_2} \leqslant 3$ ce qui est faux également. On conclut que $d_2 \leqslant 2$, et de même $d_1 \leqslant 2$.

Si $d_3 = 1$ et $d_2 \geqslant 3$, on obtient de même :

$$a_{1,d_1} + a_{1,d_2} + a_{d_1,d_2} \leqslant 3 + d_1 - m_{d_1}.$$

Une discussion analogue permet de conclure que $d_2 \leqslant 2$ et $d_1 \leqslant 2$. On obtient ainsi la liste du théorème 3.(iv) pour $r = 3$.

Supposons maintenant que $V = V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_r}$ vérifie la condition du théorème 3. (iii) avec $r \geqslant 4$. De même que précédemment, on a alors :

$$\textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} m_{d_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} b_{d_i,d_j} \leqslant m = d_1 + \ldots + d_r + r - 3.$$

On en déduit que

$$\textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} m_{d_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} b_{d_i,d_j} \leqslant m - \sum_{4 \leqslant i \leqslant r} m_{d_i} - \sum_{i \leqslant 4 \text{ ou } j \leqslant 4} b_{d_i,d_j}.$$

Or $m_d \geqslant d - 2$ pour tout $d \geqslant 1$, donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} m_{d_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} b_{d_i, d_j} \leqslant m - \sum_{4 \leqslant i \leqslant r} (d_i - 2) - \left(\frac{r(r-1)}{2} - 3\right)$$
$$\leqslant d_1 + d_2 + d_3 + 2(r-3) - \frac{r(r-1)}{2} + r$$

d'où

$$\ldots (***) \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} m_{d_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} b_{d_i, d_j}$$
$$\leqslant d_1 + d_2 + d_3 - \frac{(r-3)(r-4)}{2} \leqslant d_1 + d_2 + d_3$$

La démonstration précédente montre alors que (d_1, d_2, d_3) figure dans la liste du théorème 3. (iv). On en déduit que $d_i \leqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. On peut donc supposer que $d_1 = \ldots = d_s = 2$, et $d_{s+1} = \ldots = d_r = 1$. Alors m_{d_i} vaut 1 pour $1 \leqslant i \leqslant s$, et vaut 0 pour $s+1 \leqslant i \leqslant r$; de plus, $a_{d_i, d_j} = 1$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant r$. On tire donc de (***) :

$$s + \frac{r(r-1)}{2} \leqslant 2s + (r-s) + r - 3, \quad \text{d'où} \quad r^2 - 5r + 6 \leqslant 0,$$

ce qui est faux pour $r \geqslant 4$. La démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

3.5. Les algèbres $\mathbb{C}[V]^G$, pour V figurant dans la liste du théorème 3.(iv), ont été étudiées au siècle dernier. En utilisant par exemple [11] et ([12, 17e leçon), on peut expliciter la structure de ces algèbres. Quatre cas se présentent :

(i) $\mathbb{C}[V]^G$ est une algèbre de polynômes; on donne ci-dessous $(d_1, \ldots, d_r)$, la dimension de Krull m de $\mathbb{C}[V]^G$ et les multidegrés d'un système de m générateurs r-homogènes de $\mathbb{C}[V]^G$.

$(d_1, \ldots, d_r)$	m	Multidegrés
(1, 1)	1	(1; 1)
(1, 2)	2	(2, 1); (0, 2)
(1, 1, 1)	3	(1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)

(ii) Il existe un système de paramètres r-homogènes S de $\mathbb{C}[V]^G$, et un élément r-homogène a de $\mathbb{C}[V]^G$, tels que a et S engendrent l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$, et que $a^2 \in \mathbb{C}[S]$.

On donne ci-dessous $(d_1, \ldots, d_r)$, la dimension de Krull m de $\mathbb{C}[V]^G$, les multidegrés des éléments de S, et le multidegré de a.

$(d_1, \ldots, d_r)$	m	Multidegrés des éléments de S	Multidegré de a
(1, 3)	3	(3, 1); (2, 2); (0; 4)	(3, 3)
(1, 4)	4	(4, 1); (4, 2); (0, 2); (0, 3)	(6, 3)
(2, 3)	4	(2, 0); (1, 2); (3, 2); (0, 4)	(3, 4)
(2, 4)	5	(2, 0); (2, 1); (2, 2); (0, 2); (0, 3)	(3, 3)
(1, 1, 2)	4	(1, 1, 0); (2, 0, 1); (0, 2, 1); (0, 0, 2)	(1, 1, 1)
(1, 2, 2)	5	(2, 1, 0); (2, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 2)	(2, 1, 1)
(2, 2, 2)	6	(2, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 2, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 2)	(1, 1, 1)

(iii) $V = V_3 \times V_3$; $\mathbb{C}[V]^G$ est l'algèbre des invariants de deux formes cubiques. Il existe alors un système de paramètres bihomogènes S de $\mathbb{C}[V]^G$ dont les bidegrés sont : (4, 0); (3, 1); (1, 3); (0, 4); il existe de plus des invariants bihomogènes non nuls a, b de bidegrés respectifs (2, 2), (3, 3) tels que $\{1, a, b, ab\}$ soit une base du $\mathbb{C}[S]$-module $\mathbb{C}[V]^G$.

Remarque. — S n'est pas le système de paramètres construit à l'exemple 3.

(iv) $V = V_4 \times V_4$; $\mathbb{C}[V]^G$ est l'algèbre des invariants de deux formes quartiques. Il existe alors un système de paramètres bihomogènes S de $\mathbb{C}[V]^G$ dont les bidegrés sont : (2, 0); (3, 0); (1, 1); (2, 1); (1, 2); (0, 2); (0, 3). De plus il existe un élément non nul a de $\mathbb{C}[V]^G$, bihomogène de bidegré (2, 2), tel que $\{1, a, a^2\}$ soit une base du $\mathbb{C}[S]$-module $\mathbb{C}[V]^G$.

RÉFÉRENCES

[1] SPRINGER (T. A.). — Invariant theory (*Lecture Notes* n° 585, Springer-Verlag).

[2] SPRINGER (T. A.). — On the invariant theory of SU_2. *Proc. of the Koninkl. Akad. van Wetenschappen*, vol. 83(3), 1980, p. 339-345.

[3] BRION M. — La série de Poincaré des U-invariants, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 293 (21 septembre 1981) série I, p. 107-110.

[4] WEYL H. — Zur Darstellungstheorie und Invariantenabzählung der projektiven, der Komplex- und der Drehungsgruppe. *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, pl-25 (Springer-Verlag).

[5] SYLVESTER J. J. — Tables of the generating functions and groundforms for simultaneous binary forms of the first orders, taken two and two together. *Amer. J. of Maths.*, t. 2 (1879), p. 293-306.

[6] HOCHSTER M., ROBERTS J. L. — Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Adv. in Math.*, t. 13 (1974), p. 115-175.

[7] STANLEY R. P. — Hilbert functions of graded algebras. *Adv. in Math.*, t. 28 (1978), p. 57-83.

[8] STANLEY R. P. — Combinatorics and invariant theory dans : Proceedings of symposia in pure mathematics : *Relations between combinatorics and other parts of mathematics*, vol. 34 (1979), p. 345-355.

[9] FRANKLIN F. — On the calculation of generating functions and tables of groundforms for binary quantics. *Amer. J. of Maths.*, t. 3 (1880), p. 128-153.

[10] HILBERT D. — Über die vollen Invariantensysteme. *Math. Annalen*, t. 42 (1893), p. 313-373.

[11] ELLIOTT E. B. — *An introduction to the algebra of quantics* (Chelsea, 1964).

[12] SALMON G. — *Leçons d'algèbre supérieure* (Gauthier-Villars, 1890).