BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MAZET

Une démonstration géométrique du Nullstellensatz analytique complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 287-301

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__287_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 287-301.

UNE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU NULLSTELLENSATZ ANALYTIQUE COMPLEXE

PAR

P. MAZET (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons une démonstration du Nullstellensatz de la géométrie analytique complexe qui utilise la décomposition locale des sous-ensembles analytiques en revêtements ramifiés. Cette preuve, plus constructive que la démonstration usuelle, fournit un contrôle plus précis de l'exposant et est valable en dimension quelconque (même infinie).

ABSTRACT. — We give a proof of the Nullstellensatz in complex analytic geometry which uses the local decomposition of analytic subsets into ramified covers. This proof, more constructive than the usual one, gives a more precise control of the exponent and is valid for any dimension (even infinite).

Les différents Nullstellensatz de la géométrie complexe sont des théorèmes qui assurent que la nullité de φ sur un ensemble d'équation $f_1=f_2=\ldots=f_n=0$ entraîne l'existence d'un entier N tel que φ^N appartienne à l'idéal I engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ce qui revient à dire que l'idéal des φ nuls sur cet ensemble est la racine de I.

Les démonstrations classiques de ces théorèmes sont de nature algébrique et utilisent essentiellement le fait que la racine de I est l'intersection des idéaux premiers contenant I (rappelons qu'en l'absence de propriétés noethériennes ce point utilise l'axiome du choix). Ces méthodes ont le défaut d'être non constructives et donc de ne donner aucune précision sur l'entier N. En particulier, en dimension infinie, l'anneau utilisé n'étant plus noethérien on ne peut plus assurer, avec la démonstration « algébrique », l'existence d'un N valable pour tout φ car on ne sait pas si la racine de I est de type fini.

La démonstration que nous proposons ici est de nature géométrique et fournit un entier N, valable pour tout φ, qui est rattaché à des invariants géométriques, à savoir des degrés de revêtements ramifiés ou, ce qui revient au

(*) Texte reçu le 20 octobre 1981.

P. MAZET, U.E.R. 47, Mathematiques, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/287/$ 5.00

même, des multiplicités. La démonstration « algébrique » est classique en dimension finie, elle est donnée, par exemple, dans [6]; en dimension infinie on pourra la trouver dans [5] pour les espaces de Banach ou dans [4] pour les espaces localement convexes.

Pour plus de détails sur l'utilisation des revêtements ramifiés et des fonctions symétriques qu'ils définissent on pourra consulter [1], [2] et [3].

La notion d'espace analytique convenable avec ses principales propriétés est exposée dans [4].

I. Rappels

1. Revêtements ramifiés

Soient F et G des espaces localement convexes séparés (en abrégé e.l.c.s.), Ω un ouvert connexe non vide de G, A une partie fermée de Ω et X une partie de $\Omega \times F$; notons ω le complémentaire de A dans Ω et π la projection de X sur Ω. On dit que X est un *revêtement ramifié* de Ω avec A pour *ensemble de ramification* si et seulement si :

1. A est négligeable dans Ω (c'est-à-dire que, pour tout U ouvert de Ω, les fonctions analytiques bornées sur $U \cap \omega$ ont un prolongement analytique et un seul à U).
2. π est une application propre.
3. $\pi^{-1}(\omega)$ est un sous-ensemble analytique de $\omega \times F$.
4. Sur $\pi^{-1}(\omega)$, π est localement un isomorphisme analytique.
5. X est l'adhérence de $\pi^{-1}(\omega)$ dans $\Omega \times F$.

Considérons un tel revêtement ramifié; on peut toujours modifier A pour supposer que l'ensemble de ramification est une hypersurface analytique (d'intérieur vide) de Ω. L'ouvert ω est connexe et le cardinal de $\pi^{-1}(a)$ pour a dans ω est une constante, c'est le *degré* du revêtement ramifié.

L'ensemble X est un sous-ensemble analytique de $\Omega \times F$ qui admet une équation $T(x, z) = 0$ dite équation canonique de X; la fonction T est à valeurs dans l'algèbre symétrique (complétée) de F, c'est un polynôme unitaire en z dont le degré k est le degré du revêtement. Pour tout x de Ω, $T(x, z) = 0$ a exactement k racines (comptées avec leur multiplicité) qui sont simples lorsque $x \notin A$; la multiplicité de la racine z est, par définition, la *multiplicité* du point (x, z) de X.

L'ensemble X se décompose en une réunion finie de parties X_i qui sont encore des revêtements ramifiés de Ω lesquels n'admettent pas de décomposition propre comme réunion de revêtements ramifiés. La famille des X_i est essentiellement unique, ce sont les composantes irréductibles de X.

Si f est une fonction analytique de X dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire qu'elle est localement la restriction d'une fonction analytique sur un ouvert de $\Omega \times F$) on définit la norme de f, notée $N(f)$, en posant, pour $x \in \Omega$, $N(f)(x) = \prod f(x, z_i)$ où les z_i sont les racines (répétées avec leur multiplicité) de $T(x, z) = 0$. Cette norme est alors une fonction analytiques sur Ω dont le lieu des zéros est évidemment la projection du lieu des zéros de f.

2. Espaces analytiques convenables

Soient Ω un ouvert d'un e.l.c.s. E et X un sous-ensemble analytique de Ω. On dit que le germe de X en un point a de Ω est convenable si ce germe est la réunion d'un nombre fini de germes de revêtements ramifiés; on dit que X est convenable si, en tout point de Ω, le germe de X est convenable.

Un *espace analytique convenable* est alors un espace analytique (réduit) qui est localement isomorphe à un sous-ensemble analytique convenable.

On a la propriété de stabilité des espaces analytiques convenables suivante :

Pour tout espace analytique convenable X et toute fonction analytique f définie sur X, le lieu des zéros de f est encore un espace analytique convenable.

Il s'ensuit que tout sous-ensemble analytique de définition finie d'un espace analytique convenable est encore un espace analytique convenable. En particulier les espaces analytiques (réduits) de dimension finie ainsi que les sous-ensembles analytiques de codimension finie étudiés par RAMIS [5] sont des espaces analytiques convenables.

De nombreux énoncés valables pour les espaces de dimension ou de codimension finie sont en fait valables pour tous les espaces convenables. C'est le cas en particulier pour le Nullstellensatz comme nous allons le voir.

II. Le cas d'une hypersurface d'un ouvert d'e.l.c.s.

1. Ouverts adaptés et théorème de Weierstrass

DÉFINITION II.1. — *Soient E un e.l.c.s., Ω un ouvert de E et f une fonction analytique de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit qu'un ouvert non vide de Ω est* adapté *à f s'il existe une décomposition de E en $F \times G$, avec* $\dim G = 1$, *pour laquelle l'ouvert s'écrit $U \times D$, U étant un ouvert connexe de F et D un disque ouvert de G tels que $U \times \overline{D}$ soit contenu dans Ω et f ne s'annule pas sur $U \times \partial D$.*

Pour un tel ouvert adapté, si g est analytique au voisinage de $U\times D$ et $x\in U$, on définit g_x holomorphe au voisinage de D par $g_x(z)=g(x, z)$. En particulier la fonction f_x admet un nombre fini de zéros dans D dont la somme des ordres est un entier n indépendant de x (parce que U est connexe).

On a alors le théorème de division de Weierstrass qui affirme que, pour g analytique sur $U\times D$, il existe q analytique sur $U\times D$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ analytiques sur U telles que l'on ait :

$$\forall (x, z)\in U\times D, \quad g(x, z)=q(x, z)f(x, z)+\textstyle\sum_{p=0}^{p=n-1} a_p(x)z^p.$$

En outre, pour $x\in U$, on obtient q_x et les $a_p(x)$ en effectuant la division (en 1 variable) de g_x par f_x.

On en déduit en particulier que, pour que f divise g sur $U\times D$, il suffit que f_x divise g_x sur D pour tous les x appartenant à un ouvert non vide U, puisqu'alors le principe du prolongement analytique implique la nullité des a_i.

2. Exposant et Nullstellensatz globaux

Considérons une fonction analytique f sur un ouvert d'e.l.c.s. et un ouvert $U\times D$ adapté à f. Pour $x\in U$, notons $\alpha(x)$ le maximum des ordres des zéros de f_x dans D. Pour étudier cette fonction α de U dans $\mathbb{N}$. Faisons intervenir le polynôme de Weierstrass de f; plus précisément, si n est la somme des ordres des zéros de f_x, la division de z^n par f fournit une relation :

$$z^n-\textstyle\sum_1^n a_i(x)z^{n-i}=q(x, z)f(x, z)$$

où le premier membre est un polynôme en z dont les racines sont exactement, et avec la même multiplicité, les zéros de f_x dans D. Remarquons alors que les coefficients de ce polynôme sont des fonctions analytiques de x et que, dans l'ensemble des polynômes unitaires de degré n, ceux qui ont une racine au moins d'ordre supérieur à un entier donné forment un sous-ensemble algébrique; on en déduit immédiatement :

PROPOSITION II.1. — *Soit $U\times D$ un ouvert adapté à une fonction analytique f. Le maximum des ordres des zéros de f_x dans D est une fonction semi-continue supérieurement de x; elle atteint son minimum sur le complémentaire d'un sous-ensemble analytique de U. La valeur de ce minimum s'appelle* l'exposant *de f sur $U\times D$.*

Cette notion d'exposant permet d'énoncer :

THÉORÈME II.1 (Nullstellensatz global). — *Soit $U \times D$ un ouvert adapté à une fonction analytique f dont l'exposant sur $U \times D$ est ε. Alors pour que g analytique sur $U \times D$ s'annule sur $(U \times D) \cap f^{-1}(0)$ il faut et il suffit que f divise g^{ε} sur $U \times D$.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Si g est nulle sur $(U \times D) \cap f^{-1}(0)$, pour $x \in U$, g_x^{ε} s'annule en tout point de D où f_x s'annule et ce à un ordre au moins ε. Il s'ensuit que f_x divise g_x^{ε} sur D chaque fois que $\alpha(x) = \varepsilon$. Comme cette égalité a lieu sur un ouvert non vide, la conclusion découle du théorème de division de Weierstrass.

Remarque. — Dans l'énoncé précédent on ne peut pas remplacer ε par un entier strictement plus petit. En effet, $U \times D$ étant adapté à f, $(U \times D) \cap f^{-1}(0)$ est un revêtement ramifié de U; ce revêtement admet une équation canonique $T(x, z) = 0$, où T_x est un polynôme en z dont toutes les racines sont simples sauf si x appartient à l'ensemble de ramification.

Il existe donc un ouvert dense de U sur lequel T_x n'a que des racines simples et f_x a au moins une racine d'ordre ε dans D. Alors T est nul sur $(U \times D) \cap f^{-1}(0)$ et, pour que f divise T^n, il faut que f_x divise T_x^n et donc $n \geqslant \varepsilon$.

3. Exposant et Nullstellensatz locaux

On sait que l'anneau local $\mathcal{O}_a$ des germes de fonctions analytiques au point a est factoriel. Cela permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION II.2. — *Pour φ non nul dans $\mathcal{O}_a$ on appelle* exposant *de φ et l'on note $\varepsilon(\varphi)$ le plus grand des exposants qui interviennent dans une décomposition de φ en facteurs irréductibles. Par convention on pose $\varepsilon(0) = 1$.*

*Pour f analytique au voisinage de a on définit l'*exposant *de f* au point *a comme l'exposant du germe de f en a et on le note $\varepsilon(f, a)$.*

On a alors :

THÉORÈME II.2 (Nullstellensatz local). — *Soit φ un germe de fonction analytique au point a d'exposant $\varepsilon(\varphi)$. Alors, pour qu'un germe ψ soit nul sur $\varphi^{-1}(0)$ il faut et il suffit que φ divise $\psi^{\varepsilon(\varphi)}$.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Cela est clair si $\varphi = 0$ ou φ est inversible (on a alors

$\varepsilon(\varphi)=0$), supposons donc que φ s'écrive $\varphi_1^{\alpha_1}.\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_n^{\alpha_n}$ où les φ_i sont irréductibles, deux à deux non équivalents.

Soit f (resp. g) un représentant de φ (resp. ψ). Comme il existe une base de voisinages de a formée d'ouverts adaptés à f (puisque $\varphi\neq 0$), on peut trouver un tel ouvert $U\times D$ sur lequel f et g sont définis et g s'annule lorsque f s'annule. Si ε est l'exposant de f sur $U\times D$, le Nullstellensatz global (th. II.1) affirme que f divise g^ε et donc que φ divise ψ^ε. Il s'ensuit que ψ est divisible par chacun des facteurs irréductibles de φ, donc par le produit $\varphi_1.\varphi_2.\ \ldots\ .\ \varphi_n$. Ainsi $(\varphi_1.\varphi_2.\ \ldots\ .\ \varphi_n)^{\varepsilon(\varphi)}$ divise $\psi^{\varepsilon(\varphi)}$ et, par définition de $\varepsilon(\varphi)$, on a $\alpha_i\leqslant\varepsilon(\varphi)$ d'où φ divise $(\varphi_1.\varphi_2.\ \ldots\ .\ \varphi_n)^{\varepsilon(\varphi)}$; le théorème en découle.

Remarques. — 1° Ici encore on ne peut pas remplacer $\varepsilon(\varphi)$ par un entier strictement plus petit. C'est évident si $\varphi=0$ (avec la convention $0^0=1$) et pour φ inversible. Lorsque $\varphi=\varphi_1^{\alpha_1}.\varphi_2^{\alpha_2}.\ \ldots\ .\varphi_n^{\alpha_n}$ on constate que $\psi=\varphi_1.\varphi_2.\ \ldots\ .\ \varphi_n$ s'annule sur $\varphi^{-1}(0)$ et que φ divise ψ^p si et seulement si $p\geqslant\sup\alpha_i=\varepsilon(\varphi)$.

2° Si f est une fonction d'une variable complexe, $\varepsilon(f, a)$ n'est autre que l'ordre du zéro de f au point a.

4. Lien entre exposant local et exposant global

Considérons une fonction analytique f et un ouvert $U\times D$ adapté à cette fonction. Si V est un ouvert connexe non vide de U il est clair que $V\times D$ est encore un ouvert adapté à f; par ailleurs l'exposant de f sur $U\times D$ est le même que sur $V\times D$ puisque (avec les notations du 1°) $\alpha(x)$ atteint son minimum sur un ouvert dense donc en des points de V.

Si maintenant on remplace D par un disque D' plus petit mais tel que $V\times D'$ soit encore adapté à f il est clair que $\alpha(x)$ est remplacé par un $\alpha'(x)$ plus petit et donc que l'exposant de f diminue.

Prenons alors un point a de $U\times D$ et notons ε' le minimum des exposants de f sur les ouverts adaptés à f, relatifs à la décomposition $E=F\times G$, qui contiennent a. Il est clair que ce minimum est atteint pour un voisinage adapté de a et donc pour tous les voisinages plus petits. Reprenant alors la démonstration du théorème II.2 on constate que, si φ est le germe de f en a, et ψ est un germe nul sur $\varphi^{-1}(0)$ on a : φ divise $\psi^{\varepsilon'}$. D'après la remarque qui suit le théorème on conclut $\varepsilon'\geqslant\varepsilon(f, a)$.

Prouvons qu'il y a en fait égalité.

Dans la décomposition de E en $F\times G$, a s'écrit (b, c); on peut toujours réduire U et D de façon à trouver un voisinage adapté $V\times D'$ de a tel que f_b ne s'annule pas sur $D'-\{c\}$. Alors, si g analytique sur $V\times D'$ s'annule sur $(V\times D)\cap f^{-1}(0)$, le Nullstellensatz local assure que f divise $g^{\varepsilon(f,a)}$ sur un voisinage $V'\times D''$ de a contenu dans $V\times D'$. Cependant, si V' est pris suffisamment petit f ne s'annule pas sur $V'\times(D'-D'')$ et donc f divise $g^{\varepsilon(f,a)}$ sur $V'\times D'$. Autrement dit f_x divise $g_x^{\varepsilon(f,a)}$ sur D' pour tout x de V'; le théorème de division de Weierstrass permet donc de conclure que f divise $g^{\varepsilon(f,a)}$ sur $V\times D'$. De la remarque suivant le théorème II.1 on déduit que $\varepsilon(f, a)$ est plus grand que l'exposant de f sur $V\times D'$ qui, par définition, est plus grand que ε'; comme l'on a $\varepsilon'\geqslant\varepsilon(f, a)$, ces trois nombres sont égaux.

On a donc :

PROPOSITION II.2. — *L'exposant d'une fonction analytique f en un point a où son germe n'est pas nul est le minimum des exposants de f sur les voisinages adaptés de a.*

Avec les hypothèses et notations précédentes on conclut donc que l'exposant ε de f sur $U\times D$ est plus grand que tous les $\varepsilon(f, a)$ pour $a\in U\times D$, c'est-à-dire $\varepsilon\geqslant\varepsilon''=\sup_{a\in U\times D}\varepsilon(f, a)$. Cependant, si g est analytique sur $U\times D$ est nulle sur $(U\times D)\cap f^{-1}(0)$, le Nullstellensatz local prouve que f divise $g^{\varepsilon''}$ au voisinage de tout point de $U\times D$ donc sur $U\times D$. La remarque suivant le théorème II.1 prouve donc $\varepsilon''\geqslant\varepsilon$ et, par conséquent $\varepsilon''=\varepsilon$.

En conclusion nous pouvons énoncer :

PROPOSITION II.3. — *L'exposant d'une fonction analytique f sur un ouvert adapté $U\times D$ est le maximum des exposants locaux $\varepsilon(f, a)$ lorsque a parcourt $U\times D$.*

THÉORÈME II.3. — *Pour f analytique sur un ouvert Ω d'e.l.c.s. la fonction $a\rightsquigarrow\varepsilon(f, a)$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. — Soit $a\in\Omega$, si le germe de f en a est nul on a $\varepsilon(f, x)=1$ pour x voisin de a, sinon, d'après la proposition II.2, il existe un voisinage $U\times D$ de a adapté à f sur lequel l'exposant de f est $\varepsilon(f, a)$. La proposition II.3 affirme alors que, pour $b\in U\times D$ on a $\varepsilon(f, b)\leqslant\varepsilon(f, a)$ et le théorème en découle.

III. Le cas d'une hypersurface d'un revêtement ramifié

Le passage des ouverts d'e.l.c.s. aux revêtements ramifiés repose sur l'énoncé classique suivant :

PROPOSITION III.1. — *Soient Ω un ouvert connexe non vide d'un e.l.c.s. E, X un revêtement ramifié de degré k de Ω, f et g des fonctions analytiques sur X. On suppose que f n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles de X. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *La fonction méromorphe g/f est localement bornée sur X.*
2. *La fonction méromorphe g/f vérifie une relation de dépendance intégrale de degré k sur $\mathcal{O}(\Omega)$.*
3. *La fonction méromorphe g/f est entière sur l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Démonstration. — Prouvons $1 \Rightarrow 2$. Notons Y le lieu des zéros de la norme de f; l'hypothèse faite sur f montre que Y est une hypersurface d'intérieur vide, c'est donc un fermé négligeable de Ω. Pour $x \notin Y$ et $1 \leqslant h \leqslant k$, notons $\sigma_h(x)$ la h-ième fonction symétrique élémentaire des k nombres $g/f(x, a_i)$ (où $(x, a_i)_{i \in I}$ est la famille des k points de X qui se projettent sur x répétés avec leur multiplicité). On a donc :

$$\sigma_h(x) = \textstyle\sum_{J \subset I, |J| = h} (\prod_{i \in J} g/f(x, a_i)),$$

et la relation évidente :

$$\textstyle\prod_{i \in I} [g/f(x, z) - g/f(x, a_i)] = 0 \qquad \text{si} \quad (x, z) \in X$$

s'écrit : pour $(x, z) \in X$, $x \notin Y$:

$$[g/f(x, z)]^k + \textstyle\sum_1^k (-1)^h \sigma_h(x) [g/f(x, z)]^{k-h} = 0.$$

Si la fonction g/f est localement bornée sur X, il est clair que les fonctions σ_h sont localement bornées sur Ω; elles se prolongent donc en des éléments, encore notés σ_h, de $\mathcal{O}(\Omega)$. La relation précédente se prolonge donc par continuité aux points de X où f ne s'annule pas pour donner une relation de dépendance intégrale de degré k sur $\mathcal{O}(\Omega)$ pour la fonction g/f.

L'implification $2 \Rightarrow 3$ est évidente; prouvons $3 \Rightarrow 1$.

Partons donc d'une relation $(g/f)^n + a_1 (g/f)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, où les a_i sont dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Soit (x, z) un point de X; on peut trouver ω voisinage de x sur lequel les n fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ont un module borné par un réel M. Alors, pour $(x, z) \in X$ tel que $f(x, z) \neq 0$ et $x \in \omega$, on a :

$$g/f(x, z) = -a_1(x)[g/f(x, z)]^{-1} - \ldots - a_n(x)[g/f(x, z)]^{-n}$$

et donc, ou bien $|g/f(x, z)| \leqslant 1$, ou bien :

$$|g/f(x, z)| \leqslant |a_1(x)| + \ldots + |a_n(x)| \leqslant nM.$$

Dans tous les cas on a $|g/f(x, z)| \leqslant 1+nM$, d'où le caractère localement borné de g/f.

Remarque. — L'énoncé 1 est local; pour le vérifier au voisinage d'un point (x, z) on peut donc remplacer Ω par un ouvert $U \times D$ adapté à la norme de f (puisque celle-ci n'est pas identiquement nulle au voisinage de x). Dans ce cas on peut utiliser la proposition suivante :

PROPOSITION III.2. — *Avec les notations de la proposition précédente, soit $U \times D$ un ouvert adapté à la norme de f. Pour que g/f soit localement borné au-dessus de $U \times D$ il suffit qu'il existe un ouvert non vide V de U tel que, pour tout x de V, g/f soit localement borné au-dessus de $\{x\} \times D$.*

Démonstration. — Supposons donc g/f localement bornée au-dessus de $\{x\} \times D$ pour tous les x appartenant à V ouvert non vide de U. Reprenant la démonstration de la proposition précédente nous voyons que tout revient à prouver que les fonctions σ_h définies en dehors de Y ont un prolongement analytique sur $U \times D$. Pour cela remarquons que, pour $x \notin Y$, on a :

$$N(f).\sigma_h(x)=\sum_{J \subset I, |J|=h} [\prod_{i \in J} g(x, a_i).\prod_{i \notin J} f(x, a_i)]$$

(où $N(f)$ est la norme de f).

Il s'ensuit que $N(f).\sigma_h$ est une fonction localement bornée; elle admet donc un prolongement analytique s_h défini sur tout Ω. Nous sommes ainsi ramenés à prouver que $N(f)$ divise chacune des fonctions s_h sur $(U \times D)$. Compte tenu du théorème de division de Weierstrass il suffit de prouver que, pour $x \in V$, la restriction de $N(f)$ à $\{x\} \times D$ divise chacune des restrictions des fonctions s_h. Or, comme $U \times D$ est un ouvert adapté à $N(f)$, pour $x \in V$, $N(f)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur $\{x\} \times D$ et donc, puisque g/f est localement bornée sur $\{x\} \times D$, les fonctions symétriques σ_h sont analytiques sur $\{x\} \times D$ en dehors d'un fermé négligeable et localement bornées. On conclut qu'elles se prolongent analytiquement à $\{x\} \times D$ et la relation $s_h=N(f).\sigma_k$ prouve que $N(f)$ divise s_h sur $\{x\} \times D$.

Nous pouvons alors donner un Nullstellensatz global pour les revêtements ramifiés.

THÉORÈME III.1. — *Soient Ω un ouvert connexe non vide d'un e.l.c.s., X un revêtement ramifié de degré k de Ω et f un élément de $\mathcal{O}(X)$.*

On suppose que f n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles de X et qu'en tout point de Ω l'exposant de la norme de f est majoré par un entier ε. Alors, pour tout g de $\mathcal{O}(X)$ nul sur $f^{-1}(0)$ on a :

1. *La fonction méromorphe g^{ε}/f est localement bornée sur X.*

2. *Il existe des éléments* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *de* $\mathcal{O}(\Omega)$ *tels que l'on ait :*

$$g^{k\varepsilon}=\sum_{1\leqslant p\leqslant k} a_p . g^{(k-p)\varepsilon} . f^p.$$

En particulier f *divise* $g^{k\varepsilon}$ *dans* $\mathcal{O}(X)$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'implication $1 \Rightarrow 2$ de la proposition III.1 prouve qu'ici l'on a $1 \Rightarrow 2$.

Nous nous contenterons donc de prouver l'énoncé 1.

Soit a un point de Ω; on peut trouver une droite affine passant par a transverse à la fois à $N(f)^{-1}(0)$ et à l'ensemble de ramification du revêtement ramifié. On en déduit que a appartient à un ouvert $U \times D$ adapté à la norme de f pour lequel, si $x \in U$, $\{x\} \times D$ n'est pas contenu dans l'ensemble de ramification de X. Comme a est arbitraire, il nous suffit de prouver que g^ε/f est localement borné au-dessus de $U \times D$ et donc, d'après la proposition III.2, il suffit de montrer que g^ε/f est localement borné au-dessus de $\{x\} \times D$ pour tout x dans un ouvert non vide V de U.

Remarquons alors que la proposition II.3 et les hypothèses faites sur l'exposant de la norme de f font que l'exposant de $N(f)$ sur le voisinage adapté $U \times D$ est inférieur ou égal à ε. De la proposition II.1 on conclut donc qu'il existe un ouvert non vide V de U tel que, pour $x \in V$, $N(f)$ ne s'annule sur $\{x\} \times D$ qu'à des ordres inférieurs ou égaux à ε; autrement dit, pour $x \in V$, l'exposant de la restriction de $N(f)$ à $\{x\} \times D$ est majoré par ε.

Nous allons prouver que pour tout x de V, g^ε/f est localement borné au-dessus de $\{x\} \times D$. Or, au-dessus de $\{x\} \times D$, X est encore un revêtement ramifié de degré k et la restriction de f ne s'annule sur aucune de ses composantes irréductibles puisque la norme de cette restriction est la restriction à $\{x\} \times D$ de $N(f)$ et n'est donc pas identiquement nulle. En outre l'exposant de cette norme est majoré par ε. Nous sommes donc ramenés, après restriction, à prouver le théorème dans les cas où Ω est un disque $\{x\} \times D$, c'est ce que nous supposerons désormais. L'ensemble de ramification de X et l'ensemble des zéros de $N(f)$ sont alors des ensembles de points isolés. Comme l'énoncé à prouver est local nous pouvons supposer en outre que Ω est un disque dont le centre est le seul point qui puisse être un point de ramification ou un zéro de $N(f)$.

En outre, quitte à faire une translation nous pouvons supposer que ce centre est 0.

Décomposons alors X en ses composantes irréductibles X_i et notons π_i la projection de X_i sur Ω. Comme X_i n'a pas de point de ramification en dehors de 0, $\pi_i^{-1}(\Omega-\{0\})$ est un revêtement non ramifié du disque pointé $\Omega-\{0\}$; si son degré est k_i il est donc isomorphe à un disque pointé $\Delta_i-\{0\}$ par un isomorphisme θ_i qui vérifie $\pi_i \circ \theta_i(t)=t^{k_i}$. Comme π_i est propre, θ_i est localement bornée et se prolonge donc en une application analytique, encore notée θ_i de Δ_i sur X_i; en particulier $\pi_i^{-1}\{0\}$ se réduit au point $a_i=\theta_i(0)$. (On peut dire aussi que X_i est de dimension 1 et que θ_i définit une normalisation de X_i.) Comme $N(f)$ ne s'annule pas en dehors de 0, $f \circ \theta_i$ ne peut s'annuler qu'en 0, soit p_i l'ordre de ce zéro ($p_i=0$ si f $\circ\,\theta_i(0)\neq 0$). On a alors, pour $t \to 0$, $|f\circ\theta_i(t)| \sim A_i|t|^{p_i}$ et donc, pour $x \to a_i$, $x \in X_i$, $|f(x)| \sim A_i |\pi_i(x)|^{p_i/k_i}$. En faisant le produit pour tous les x de $\pi_1^{-1}(z)$ et toutes les composantes X_i on obtient : pour $z \to 0$, $|N(f)(z)| \sim (\Pi A_i^{k_i})|z|^{\Sigma p_i}$, il s'ensuit que l'exposant de $N(f)$ en 0, qui est l'ordre du zéro de $N(f)$ en 0, vaut Σp_i. Cela prouve $\Sigma p_i \leqslant \varepsilon$ et, en particulier, chaque p_i est inférieur à ε.

Prouvons alors que g^ε/f est localement borné sur X.

Il suffit de le faire pour chacune des restrictions aux composantes irréductibles; comme c'est évident au voisinage des points où f ne s'annule pas, il suffit de prouver que la restriction à X_i de g^ε/f est bornée au voisinage de a_i lorsque $f(a_i)=0$, c'est-à-dire $p_i\neq 0$. Dans ce cas $g(a_i)=0$ et donc $g\circ\theta_i$ s'annule en 0; on en déduit, au voisinage de 0, une majoration $|g\circ\theta_i(t)| \leqslant B|t|$. Il s'ensuit $|(g^\varepsilon/f)\circ\theta_i(t)| \leqslant C|t|^{\varepsilon-p_i}$ si $C>B^\varepsilon/A_i$ et $|t|$ assez petit. Comme p_i est inférieur à ε, $(g^\varepsilon/f)\circ\theta_i$ est borné au voisinage de 0 et la restriction de g^ε/f à X_i est donc bornée au voisinage de a_i, ce qui termine la démonstration.

Remarque. — Les a_i qui interviennent dans ce théorème sont des fonctions de la variable dans Ω. Il s'ensuit que si f et g sont des restrictions à X de fonctions analytiques définies sur un ouvert U de $\Omega\times E$ on peut trouver q analytique sur U telle que $g^{k\varepsilon}-qf$ soit nulle sur X.

IV. Le cas d'un sous-ensemble de définition finie dans un espace analytique convenable

THÉORÈME IV.1 (Nullstellensatz). — *Soient X un espace analytique convenable et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathcal{O}(X)$; on pose :*

$$Y=\{x\in X \mid f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_n(x)=0\}.$$

Alors il existe ε application semi-continue supérieurement de X dans $\mathbb{N}$ telle que :

Pour a dans X et φ dans l'anneau local ${}_X\mathcal{O}_a$ des germes en a de fonctions analytiques sur X, φ est nul sur le germe de Y au point a si et seulement si $\varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient à l'idéal engendré par les germes au point a de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Démonstration. – Quel que soit $\varepsilon(a)$, il est clair que, si $\varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient à l'idéal engendré par les germes des f_i, φ est nul sur le germe de Y au point a. C'est donc la propriété réciproque que nous devons montrer. Cela va se faire par réductions successives.

1. Réduction au cas $n=1$

Supposons le théorème établi pour $n-1$ fonctions et pour 1 fonction. Posons :

$$X' = \{ x \in X \mid f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{n-1}(x) = 0 \}.$$

La donnée $X, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ fournit donc une application ε' s.c.s. de X dans $\mathbb{N}$. Par ailleurs X' est encore un espace analytique convenable et la donnée de X' et de la restriction à X' de f_n fournit une application ε'' s.c.s. de X' dans $\mathbb{N}$. Prolongeons ε'' en lui donnant la valeur 0 sur $X - X'$; ε'' est encore s.c.s. ainsi que le produit $\varepsilon = \varepsilon' . \varepsilon''$. Montrons que l'application ε a la propriété voulue pour la donnée $X, f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Soient donc a dans X et φ dans ${}_X\mathcal{O}_a$ nul sur le germe de Y au point a.

Si $a \notin Y$, il est clair que $\varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient à l'idéal engendré par les germes des f_i puisque celui-ci est trivial.

Supposons donc $a \in Y$. Comme $Y = \{ x \in X' \mid f_n(x) = 0 \}$, la propriété de ε'' prouve que la restriction à X' de $\varphi^{\varepsilon''(a)}$ s'écrit $\alpha \underline{\underline{f_n}}$, où $\underline{\underline{f_n}}$ désigne le germe en a de f_n et α est le germe en a d'une fonction analytique sur X'; ce germe est donc la restriction d'un élément de ${}_X\mathcal{O}_a$ encore noté α. Ainsi $\varphi^{\varepsilon''(a)} - \alpha \underline{\underline{f_n}}$ est un élément de ${}_X\mathcal{O}_a$ nul sur le germe en a de X'.

La propriété de ε' prouve que $(\varphi^{\varepsilon''(a)} - \alpha \underline{\underline{f_n}})^{\varepsilon'(a)}$ appartient à l'idéal engendré par les germes en a de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. En développant l'expression $(\varphi^{\varepsilon''(a)} - \alpha \underline{\underline{f_n}})^{\varepsilon'(a)}$ on obtient bien que $\varphi^{\varepsilon''(a).\varepsilon'(a)} = \varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient à l'idéal engendré par les germes en a de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Raisonnant alors par récurrence sur n, nous voyons qu'il suffit d'établir le théorème lorsque $n=1$. Nous supposerons donc désormais $n=1$ et nous écrirons f pour f_1.

2. Réduction au local

Supposons que X soit la réunion d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X et que, pour chaque indice i, on ait établi le théorème pour X_i et la restriction de f à X_i dans $\mathbb{N}$.

Prolongeons chaque ε_i en lui donnant la valeur $+\infty$ en dehors de X_i, ε_i est encore s.c.s. Comme les X_i recouvrent X et ε_i est finie sur X_i, l'application $\varepsilon = \inf_{i\in I}\varepsilon_i$ est s.c.s., à valeurs dans $\mathbb{N}$ et il est clair qu'elle possède la propriété voulue par la donnée X, f.

3. Réduction au cas d'un revêtement ramifié irréductible

Supposons que X soit la réunion de deux sous-ensembles analytiques X' et X'' et que le théorème soit établi pour les données X', $f\,|_{X'}$ et X'', $f\,|_{X''}$; on dispose donc d'une application s.c.s. ε' (resp. ε'') de X' (resp. X'') dans $\mathbb{N}$. Prolongeons ε' (resp. ε'') en lui donnant la valeur 0 en dehors de X' (resp. X''). Il est clair que ε' et ε'' sont des applications s.c.s. de X dans $\mathbb{N}$ ainsi donc que leur somme $\varepsilon=\varepsilon'+\varepsilon''$. Montrons que ε a la propriété voulue pour la donnée X, f.

Soient donc a dans X et φ dans ${}_X\mathcal{O}_a$ nul sur le germe en a de Y. Si $a\notin X''$, comme X'' est fermé on a ${}_X\mathcal{O}_a={}_{X'}\mathcal{O}_a$ et donc $\varphi^{\varepsilon'(a)}=\varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient à l'idéal engendré par le germe de f. De même, la conclusion est évidente si $a\notin X'$; supposons donc $a\in X'\cap X''$. Alors la restriction de φ à X' est nulle sur le germe de $Y\cap X'$; on en conclut que $\varphi^{\varepsilon'(a)}$ est divisible par $\underline{\underline{f}}$ dans ${}_{X'}\mathcal{O}_a$. Autrement dit il existe α dans ${}_X\mathcal{O}_a$ tel que $\varphi^{\varepsilon'(a)}-\alpha\underline{\underline{f}}$ soit nul sur le germe de X' en a. De même on peut trouver β dans ${}_X\mathcal{O}_a$ tel que $\varphi^{\varepsilon''(a)}-\beta\underline{\underline{f}}$ est nul sur le germe de X'' en a. Il s'ensuit que le produit $(\varphi^{\varepsilon'(a)}-\alpha\underline{\underline{f}})(\varphi^{\varepsilon''(a)}-\beta\underline{\underline{f}})$ est nul sur le germe de $X'\cup X''=X$, donc est identiquement nul. Autrement dit on a :

$$\varphi^{\varepsilon(a)}=\varphi^{\varepsilon'(a)}.\varphi^{\varepsilon''(a)}=(\alpha\varphi^{\varepsilon''(a)}+\beta\varphi^{\varepsilon'(a)}-\alpha\beta\underline{\underline{f}})\underline{\underline{f}}$$

et $\varphi^{\varepsilon(a)}$ appartient bien à l'idéal engendré par le germe de f.

Comme la restriction au local permet de limiter la démonstration au cas où X est une réunion finie de parties ouvertes de revêtements ramifiés (puisque X est convenable), en utilisant le résultat précédent on se ramène au cas où X est un ouvert de revêtement ramifié. Toujours à l'aide de la réduction au local, on se ramène alors au cas où X est un revêtement ramifié de base connexe et, en utilisant le résultat précédent il ne reste plus qu'a prouver le théorème pour chacune des composantes irréductibles de ce revêtement ramifié.

4. Fin de la démonstration

Compte tenu des réductions précédentes, nous pouvons supposer que X est un revêtement ramifié irréductible de Ω ouvert connexe d'e.l.c.s. et que $n=1$. On a alors $Y=f^{-1}(0)$ où $f\in\mathcal{O}(X)$ et, comme X est irréductible, deux cas peuvent se présenter.

– $Y=X$: Dans ce cas f est identiquement nulle et il est clair que l'on peut prendre pour ε l'application constante 1.

– $Y\neq X$: Comme X est irréductible Y est d'intérieur vide dans X. Soit a un point de X, notons $k(a)$ la multiplicité de a dans $\pi^{-1}(\pi(a))$ (où π est la projection de X sur Ω). Il existe alors un voisinage X' de a dans X qui est un revêtement ramifié de degré $k(a)$ de Ω' voisinage ouvert connexe de $\pi(a)$. La restriction de f à X' n'est identiquement nulle sur aucun ouvert non vide de X', sa norme est donc une fonction analytique $N(f)$ non nulle. Notons $\varepsilon(a)$ le produit de $k(a)$ et de l'exposant au point $\pi(a)$ de $N(f)$. La semi-continuité de l'exposant (*cf.* th. II.3) permet, quitte à restreindre Ω', de supposer que l'exposant de $N(f)$ atteint son maximum au point $\pi(a)$. Le théorème III.1 prouve alors que, si $g\in\mathcal{O}(X')$ est nul sur $Y\cap X'$, $g^{\varepsilon(a)}$ est divisible par f dans $\mathcal{O}(X')$.

Par ailleurs, la définition de $k(a)$ prouve que $X'\cap\pi^{-1}[\pi(a)]$ se réduit au point a; il s'ensuit que, si ω décrit une base de voisinages ouverts et connexes de a dans Ω', $X'\cap\pi^{-1}(\omega)$ décrit une base de voisinages de a dans X', donc dans X. On obtient ainsi une base de voisinages de a qui sont des revêtements ramifiés dont le degré est toujours $k(a)$ et pour lesquels le germe en $\pi(a)$ de la norme de f ne change pas ainsi donc que son exposant. Le résultat précédent s'applique donc pour tous ces voisinages, ce qui prouve :

si $\varphi\in{}_X\mathcal{O}_a$ est nul sur le germe de Y au point a, $\varphi^{\varepsilon(a)}$ est divisible par le germe en a de f dans ${}_X\mathcal{O}_a$.

Il reste à prouver la semi-continuité de $\varepsilon(a)$ lorsque a varie dans X. Or, si $x\in X'$ on a clairement $k(x)\leqslant k(a)$ et donc le revêtement ramifié à considérer pour définir $\varepsilon(x)$ est une partie de X'. Il s'ensuit que la norme de f qui intervient est un diviseur de celle considérée lorsque $x=a$; son exposant au point $\pi(x)$ est donc inférieur à celui de la précédente norme au point $\pi(x)$ et, *a fortiori*, au point $\pi(a)$. Ces majorations prouvent $\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon(a)$ et donc la semi-continuité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARLET (D.). — Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Fonctions de plusieurs variables complexes II, *Lecture Notes in Math.*, n° 482, Springer, 1975, p. 1-158.

[2] BISHOP (E.). — Mappings of partially analytic spaces, *Amer. J. Math.*, vol. 83, 1961, p. 209-242.

[3] BISHOP (E.). — Partially analytic spaces, *Amer. J. Math.*, vol. 83, 1961, p. 669-692.

[4] MAZET (P.). — Ensembles analytiques complexes dans les espaces localement convexes, *Thèse*, Université Paris-VI, 1979.

[5] RAMIS (J.-P.). — Sous ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, Springer-Verlag, Coll. « Ergebnisse », 53.

[6] RÜCKERT (W.). — Zum Elimination Problem der Potenzreihenideale, *Math. Ann.*, vol. 107, 1932, p. 259-281.