BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN MOULIN OLLAGNIER
DIDIER PINCHON

Filtre moyennant et valeurs moyennes des capacités invariantes

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 259-277
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__259_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 259-277.

FILTRE MOYENNANT ET VALEURS MOYENNES DES CAPACITÉS INVARIANTES

PAR

JEAN MOULIN OLLAGNIER et DIDIER PINCHON (*)

RÉSUMÉ. — Nous proposons dans cet article une étude des valeurs moyennes des capacités invariantes sur les groupes localement compacts possédant la propriété de point fixe. C'est ainsi que l'on obtient l'existence du filtre moyennant, asymptotiquement invariant par les translations à gauche.

La propriété de sous-additivité complète que nous introduisons permet une démonstration de la propriété (A) d'EMERSON et GREENLEAF pour les groupes localement compacts moyennables; cette démonstration n'utilise plus leur lemme de recouvrement sur les groupes localement compacts.

Enfin, nous répondons à la conjecture d'Emerson en étendant aux groupes non-unimodulaires les résultats d'Emerson et de Kieffer.

ABSTRACT. — We propose in this paper a study of mean values for invariant capacities on locally compact groups with the fixed point property. In this way, we get the existence of the ameaning filter, asymptotically invariant under left translations.

The complete sub-additivity property allows us to prove the (A) property of EMERSON and GREENLEAF without using their covering lemma for locally compact groups.

Last, we give an answer to the Emerson's conjecture. The results of Emerson and Kieffer about strongly subadditive set functions are also true for non-unimodular groups.

Introduction

Le théorème de Markov-Kakutani signifie que le groupe Z possède la propriété de point fixe : si E est un espace vectoriel topologique localement convexe et K un sous-ensemble convexe compact non vide de E, toute bijection affine continue de K laisse fixe au moins un point de K.

(*) Texte reçu le 8 juillet 1980, révisé le 25 janvier 1982.

Jean MOULIN OLLAGNIER, Université Paris-Nord, Département de Mathématiques, avenue J.-B.-Clément, 93430 Villetaneuse.

Didier PINCHON, Laboratoire de Probabilité, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/259/$ 5.00

La démonstration de ce résultat utilise la possibilité de trouver dans Z une suite de parties finies (les segments d'origine 0 par exemple) qui, pour une translation donnée, soient de plus en plus invariantes.

Cette propriété et la propriété de point fixe peuvent être généralisées aux groupes abéliens, puis résolubles.

A l'aide d'une démonstration très ingénieuse datant de 1955, E. FØLNER établit l'équivalence entre la propriété de point fixe et l'existence d'une suite (éventuellement généralisée si le groupe n'est pas dénombrable) de parties finies A_n tendant vers l'invariance, c'est-à-dire vérifiant, pour tout g :

$$\lim |A_n|^{-1} . |g A_n \Delta A_n| = 0 \quad [3].$$

A la fin des années 60, plusieurs auteurs ont établi un résultat semblable pour les groupes localement compacts. Citons Hulanicki, Ryll-Nardzewski et renvoyons pour plus de précisions au livre de GREENLEAF [4].

Le cadre topologique introduit des problèmes nouveaux, car plusieurs conditions « de Følner » évidemment équivalentes dans le cas discret, ne le sont plus pour les groupes localement compacts. En particulier, EMERSON et GREENLEAF démontrent la condition la plus forte pour les groupes localement compacts moyennables : pour tout compact K du groupe, la borne inférieure sur tous les compacts A de G du rapport $h(KA)/h(A)$, où h est une mesure de Haar à gauche, est égale à 1 (condition A) [2].

Ils utilisent pour cela un lemme de recouvrement valable pour tous les groupes localement compacts dont MILNES et BONDAR ont donné récemment une démonstration simplifiée [8].

D'autre part, en 1975, pour généraliser le théorème de Shannon et McMillan à tous les groupes moyennables discrets, KIEFFER [5] a mis en évidence une nouvelle propriété des groupes moyennables, l'existence d'une limite selon le filtre moyennant, pour les valeurs moyennes des fonctions fortement sous-additives, invariantes à droite sur l'ensemble des parties finies du groupe; sa démonstration utilise des probabilités invariantes sur l'ensemble des ordres totaux sur le groupe.

KIEFFER [6] et EMERSON [1] obtiennent des résultats de ce type pour les groupes localement compacts moyennables unimodulaires. Dans [1], EMERSON conjecture une généralisation de son résultat aux groupes non-unimodulaires.

La théorie des groupes moyennables présente plusieurs aspects; elle est utilisée dans divers domaines. La propriété de point fixe et le théorème de Følner sont particulièrement utiles en théorie ergodique.

Inversement, c'est en étudiant un système dynamique particulier que nous avons obtenu dans [7] une démonstration nouvelle du théorème de FØLNER pour les groupes discrets.

L'étude que nous présentons ici des propriétés de FØLNER pour les groupes localement compacts moyennables est le prolongement de cette note.

Nous utilisons la propriété de point fixe pour construire un filtre selon lequel les valeurs moyennes de certaines capacités invariantes ont des limites (paragraphe 6).

Le calcul particulier d'une limite selon ce filtre permet la démonstration de la propriété de FØLNER pour les groupes localement compacts moyennables, ce qui explique le nom de moyennant donné à ce filtre (paragraphe 8).

En calculant ensuite la valeur moyenne de la capacité $A \to h(KA)$ nous donnons une démonstration de la propriété (A) d'EMERSON et GREENLEAF en utilisant la sous-additivité complète, étudiée dans les paragraphes 2 à 4, à la place d'un lemme de recouvrement (paragraphe 9).

Cette propriété fournit une base du filtre moyennant dont nous nous servons pour démontrer que les valeurs moyennes des capacités invariantes admettent des limites selon ce filtre, ce qui répond à la conjecture d'EMERSON (paragraphe 10).

1. La propriété de point fixe

Il existe pour les groupes localement compacts plusieurs définitions équivalentes de la moyennabilité liées à l'existence de moyennes invariantes sur certaines sous-algèbres invariantes par translations de $L^\infty(G)$.

L'existence d'une forme linéaire positive, de masse 1, invariante par les translations à gauche sur l'espace de Banach des fonctions bornées, uniformément continues à droite sur un groupe localement compact est équivalente à la propriété dite de point fixe. Pour ce qui nous concerne, un groupe localement compact est par définition moyennable s'il possède cette dernière propriété :

toute action continue de G sur un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe par des bijections affines laisse fixe un point au moins du compact (propriété de point fixe).

Nous utilisons dans la suite une forme encore plus fonctionnelle de cette propriété qui la fait apparaître comme une version invariante du théorème de Hahn-Banach. Disons provisoirement qu'un groupe topologique G possède la propriété de Hahn-Banach si, pour toute action linéaire continue par isométries sur un espace vectoriel E muni d'une fonction sous-linéaire s, on peut prolonger toute forme linéaire majorée par s, invariante sous l'action de G sur un sous-espace invariant F en une forme linéaire sur E possédant les mêmes propriétés. Rappelons qu'une fonction sur E est dite sous-linéaire si elle est sous-additive et positivement homogène. Dire que G agit par isométries signifie que l'action de G conserve s. L'action est continue si, pour tout vecteur x de E et tout élément g_0 de G, $\lim_{g \to g_0} s(gx - g_0 x) = 0$.

PROPOSITION 1. — *Les propriétés de point fixe et de Hahn-Banach sont équivalentes.*

Démonstration. — (*a*) Point fixe $\Rightarrow$ Hahn-Banach.

Notons $\| \ \|$ la fonction $x \to \|x\| = \sup(s(x), s(-x))$. C'est une semi-norme; soit $\bar{E}$ le séparé complété de E pour cette semi-norme. Une forme linéaire majorée par s est une forme linéaire sur $\bar{E}$, dans la boule unité du dual de $\bar{E}$. On peut étendre l'action de G en une action continue sur $\bar{E}$. Si F est un sous-espace invariant de E, $\bar{F}$ est un sous-espace invariant de $\bar{E}$. Une forme linéaire invariante majorée par s sur $\bar{F}$ admet des prolongements d'après le théorème de Hahn-Banach. L'ensemble de ces prolongements est un convexe faiblement compact sur lequel le groupe agit de façon continue. La propriété de point fixe permet alors de conclure à l'existence d'un prolongement invariant.

(*b*) Hahn-Banach $\Rightarrow$ point fixe.

Soit $E = C(K)$ l'espace des fonctions continues sur le convexe compact K muni de la fonction $s(f) = \sup_{x \in K} f(x)$. Le groupe G agit par dualité en conservant s : $g(f)(x) = f(g^{-1}x)$. La continuité de l'action sur K implique celle de l'action sur E.

Choisissant pour F l'espace réduit au vecteur nul, sous-espace invariant, la propriété de Hahn-Banach fournit une forme linéaire sur E, invariante, majorée par s, c'est-à-dire une probabilité de Radon invariante sur K. Il est alors facile de voir que le barycentre d'une telle probabilité est un point fixe de K.

2. Fonctions sous-additives

Les fonctions que nous considérons ici sont définies sur l'ensemble des compacts d'un espace localement compact X (qui dans la suite est un groupe) et à valeurs réelles. Pour ces fonctions, nous introduisons les propriétés (N), (FS) et (CS).

$(N)\, m(\emptyset)=0.$

(FS) pour tout couple de parties compactes de X :

$$m(A \cup B)+m(A \cap B) \leqslant m(A)+m(B).$$

(CS) pour tout compact A et toute combinaison linéaire à coefficients positifs $\sum \lambda_i 1_{A_i}$ égale à 1_A, on a $m(A) \leqslant \sum \lambda_i m(A_i)$.

Une fonction vérifiant (N) et (FS) est dite fortement sous-additive, une fonction vérifiant (CS) est dite complètement sous-additive. Nous notons de la même façon un compact et la fonction s. c. s. qui est son indicatrice. La condition (CS) est nécessaire et suffisante pour que l'on puisse prolonger la fonction m définie sur les indicatrices de compacts en une fonction sous-additive, positivement homogène sur le cône convexe des combinaisons linéaires positives de ces fonctions. On note alors m le prolongement maximal défini par $m(f)=\inf \sum \lambda_A m(A)$ où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs égales à f.

Pour les fonctions fortement sous-additives, le théorème suivant montre que la borne inférieure précédente est atteinte pour une décomposition particulière de la fonction, son réarrangement, ce qui établit au passage qu'une fonction fortement sous-additive est complètement sous-additive.

Une combinaison linéaire à coefficients positifs $f=\sum_{A \in I} \lambda_A A$ est une fonction s. c. s. à support compact, positive, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $\alpha_0=0<\alpha_1< \ldots <\alpha_k$. Les ensembles $(f \geqslant \alpha_i)$ sont des compacts et f se décompose en particulier sous la forme $f=\sum (\alpha_i-\alpha_{i-1})(f \geqslant \alpha_i)$. C'est cette décomposition que l'on appelle le réarrangement de f.

THÉORÈME 2. — *Soit m une fonction fortement sous-additive et f une combinaison linéaire à coefficients positifs d'indicatrices de compacts. La borne inférieure des sommes $\sum \lambda_A m(A)$ pour les diverses décompositions de f est obtenue pour le réarrangement.*

Démonstration. — Considérons une décomposition $\sum_{A \in I} \lambda_A A$ de f. L'ensemble des compacts obtenus en saturant I pour les opérations d'union et d'intersection est fini. Les compacts $(f \geqslant \alpha_i)$ appartiennent à cet ensemble J. Considérons un élément maximal parmi les suites strictement croissantes pour l'inclusion d'éléments de J contenant les $(f \geqslant \alpha_i)$ et notons $K_1 \not\subset \ldots \not\subset K_n$ une telle suite.

Chaque fonction A de I est constante sur chacun des ensembles non vides $K_{i+1} \setminus K_i$; en effet, dans le cas contraire, le compact $K'=(K_{i+1} \cap A) \cup K_i$ serait strictement intermédiaire entre K_i et K_{i+1}, ce qui contredirait la maximalité de la suite.

En effectuant une transformation d'Abel, on peut écrire :

$\sum_1^k (\alpha_i - \alpha_{i-1}) m(f \geqslant \alpha_i) = \sum_1^{k-1} \alpha_i (m(f \geqslant \alpha_i) - m(f \geqslant \alpha_{i+1})) + \alpha_k m(f \geqslant \alpha_k)$,

ce qui est encore égal, en intercalant les autres K_i de la suite maximale à :

$$\sum_2^n f(i)(m(K_i) - m(K_{i-1})) + f(1) m(K_1),$$

où $f(i)$ désigne la valeur constante de f sur $K_i \setminus K_{i-1}$.

Remplaçant f par la décomposition considérée, nous obtenons l'égalité :

$$\sum_1^k (\alpha_i - \alpha_{i-1}) m(f \geqslant \alpha_i)$$
$$= \sum_{A \in I} \lambda_A \left[\sum_2^n A(i)(m(K_i) - m(K_{i-1})) + A(1) m(K_1) \right].$$

En utilisant la sous-additivité forte de m, on obtient, pour tout i, l'inégalité :

$$m(K_i) - m(K_{i-1}) \leqslant m(K_i \cap A) - m(K_{i-1} \cap A) \qquad \text{lorsque} \quad A(i) = 1,$$

d'où la majoration de l'expression précédente par $\sum_{A \in I} \lambda_A m(A)$, ce qui est le résultat annoncé.

Comme nous l'avons dit plus haut, on déduit de ce résultat que les fonctions fortement sous-additives sont complètement sous-additives. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème précédent aux indicatrices de compacts.

3. Fonctions prolongeables

Introduisons maintenant une condition de continuité sur les fonctions complètement sous-additives.

(C) Pour tout compact K de X, il existe une constante $C(K)$ telle que, pour tout couple de combinaisons linéaires à coefficients positifs d'indicatrices de compacts, on ait :

$$|m(f_1) - m(f_2)| \leqslant C(K) \| f_1 - f_2 \|.$$

Puisque toute fonction s. c. s. positive à support compact K est limite uniforme de telles combinaisons à support dans K, la condition (C) est suffisante pour qu'il existe un unique prolongement de m, sous-linéaire, au cône convexe des fonctions s. c. s. positives à support compact vérifiant la même relation de continuité. On en déduit en particulier que les formes linéaires majorées par m sur le cône $C_K^+(X)$ des fonctions continues à support compact positives sont des mesures de Radon.

Nous appelons prolongeables les fonctions complètement sous-additives vérifiant la condition de continuité (C).

Une condition s'introduit plus naturellement que la condition de continuité, c'est la condition de variation bornée (V). Cette condition est en effet vérifiée par les capacités au sens de Choquet, qui sont croissantes, et par les fonctions d'ensembles introduites par KIEFFER et EMERSON, qui sont décroissantes.

(V) Pour tout compact K de X, la borne supérieure $V_m(K)$ des sommes $\sum |m(K_i)-m(K_{i-1})|$ sur l'ensemble de toutes les suites croissantes finies de parties compactes de K, est finie.

Ces conditions sont en fait équivalentes pour les fonctions fortement sous-additives. Ce résultat est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 3. — *Si m est une fonction de compacts fortement sous-additive à variation bornée, elle vérifie la condition de continuité avec, pour tout compact K, $C(K)=V_m(K)$. Réciproquement, si la fonction fortement sous-additive m satisfait la condition de continuité (C), elle est à variation bornée et, pour tout K, la variation totale $V_m(K)$ est majorée par $C(K)$.*

Démonstration. — (a) $(V)\Rightarrow(C)$. Soient f_1 et f_2 deux combinaisons linéaires à coefficients positifs d'indicatrices de compacts, à support dans un compact K. Nous saturons par union et intersection l'ensemble fini de compacts réunion des $(f_1\geqslant\alpha_i)$ et des $(f_2\geqslant\beta_j)$ et nous choisissons, comme dans la démonstration du théorème 2, une suite croissante maximale contenant la suite des $(f_1\geqslant\alpha_i)$ de sorte que :

$$m(f_1)=\sum f_1(k).(m(K_k)-m(K_{k-1})) \qquad \text{avec} \quad K_0=\emptyset,$$

$$m(f_2)\geqslant\sum f_2(k).(m(K_k)-m(K_{k-1})).$$

D'où l'on déduit l'inégalité $m(f_1)-m(f_2)\leqslant\|f_1-f_2\|\,.\,V_m(K)$.

On démontre de la même façon l'inégalité :

$$m(f_2)-m(f_1)\leqslant\|f_1-f_2\|\,.\,V_m(K).$$

La fonction fortement sous-additive m vérifie donc la condition de continuité avec, pour tout compact K, $C(K)=V_m(K)$.

(b) $(C)\Rightarrow(V)$. Considérons une suite croissante finie de parties compactes de K : $K_0=\emptyset\not\subset K_1\not\subset\ldots\not\subset K_n=K$. On construit deux fonctions à support dans K, combinaisons linéaires à coefficients positifs d'indicatrices de compacts de la manière suivante.

Pour tout entier i de 0 à $n-1$, on définit les fonctions f_1 et f_2 comme constantes sur l'ensemble non vide $K_{n-i}\setminus K_{n-i-1}$. Si la différence

$m(K_{n-i})-m(K_{n-i-1})$ est strictement positive, f_1 est égale à i sur cet ensemble et f_2 y est égale à $i+1$; sinon, c'est f_1 qui est égale à $i+1$ et f_2 à i.

La suite de compacts envisagée est alors plus fine que celles qui correspondent aux réarrangements des deux fonctions; on a donc, pour f_1 et f_2, l'égalité :

$$m(f)=\sum f(i).(m(K_i)-m(K_{i-1}))$$

où $f(i)$ est la valeur constante sur l'ensemble $K_i \setminus K_{i-1}$.

La différence $m(f_2)-m(f_1)$ qui est majorée en valeur absolue par $C(K)$ puisque la norme uniforme de f_1-f_2 est égale à 1 par construction, est alors égale à la somme des valeurs absolues $\sum |m(K_i)-m(K_{i-1})|$.

Si la fonction m est fortement sous-additive, sa variation totale $V_m(K)$ sur le compact K est donc majorée par la constante de continuité $C(K)$.

Remarque 3. — Si m est une fonction fortement sous-additive prolongeable, on obtient la valeur $m(f)$ de son prolongement aux fonctions s. c. s. à support compact en calculant l'intégrale de Riemann de la fonction à variation bornée sur le segment $[0, \sup f]$, $x \to m((f \geqslant x) \cap \operatorname{Supp} f)$.

4. Fonctions bien prolongeables

Nous avons besoin, dans la suite, d'appliquer la propriété de point fixe d'un groupe. Il est alors nécessaire de disposer d'une fonction sous-linéaire, non seulement sur le cône convexe des fonctions continues à support compact positives, mais sur l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues à support compact. Ceci conduit à définir les fonctions bien prolongeables.

DÉFINITION 4. — Une fonction fortement sous-additive prolongeable m est dite bien prolongeable si, pour toute fonction continue f à support compact sur X, la borne supérieure $\bar{m}(f)$ des différences $m(h)-m(k)$, où h et k sont des éléments de $C_K^+(X)$ tels que $h-k=f$, est finie.

PROPOSITION 4. — Si la fonction fortement sous-additive m est bien prolongeable, $\bar{m}$ est un prolongement sous-linéaire de m à $C_K(X)$.

Démonstration. — Pour tout couple (h, k) de fonctions continues positives, à support dans un compact K, la différence $m(h)-m(k)$ est majorée par $m(f+c.\varphi)-c.m(\varphi)$ où φ est une fonction de $C_K^+(X)$ comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur K, et c un nombre positif tel que la fonction $f+c.\varphi$ soit positive.

On a, en effet $m(f+c.\varphi)+m(k) \geqslant m(h+c.\varphi)$ d'après la sous-additivité de m tandis que, d'après le réarrangement de $h+c.\varphi$, $m(h+c.\varphi)=m(h)+c.m(\varphi)$.

La borne supérieure $\bar{m}(f)$ est donc obtenue comme la limite, lorsque le compact ($\varphi=1$) tend vers l'infini, de la différence $m(f+c.\varphi)-c.m(\varphi)$, ce qui prouve le caractère sous-linéaire de $\bar{m}$. Il est clair, d'autre part, que $\bar{m}$ prolonge m.

Nous considérons le prolongement $\bar{m}$ de m comme canonique et nous le notons désormais m.

Corollaire 4. — Une fonction fortement sous-additive, bien prolongeable, m vérifie, pour tout élément f de $C_K(X)$, l'égalité $m(f)=m(f^+)+m(-f^-)$.

Démonstration. — Soit φ une fonction continue à support compact, comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur le support de f et c une constante positive telle que $f+c.\varphi$ soit positive. Le réarrangement montre que :

$$m(f+c.\varphi)=m(f^+)+m(c.\varphi-f^-),$$

ce qui permet d'écrire :

$$m(f+c.\varphi)-c.m(\varphi)=m(f^+)+m(c.\varphi-f^-)-c.m(\varphi),$$

et d'obtenir le résultat annoncé en passant à la limite.

Remarque 4. — Les fonctions φ peuvent être remplacées par des indicatrices de compacts; on a, en particulier :

$$m(f)=\sup\,(m\,(f+c.K)-c.m(K)),$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des compacts K contenant le support de f et des nombres c tels que $f+c.K$ soit positive.

Soit m une fonction fortement sous-additive. On suppose que, pour tout ouvert U relativement compact, la borne supérieure $\tilde{m}(U)$ des différences $m(A\setminus U)-m(A)$ où A est un compact contenant U, est finie. Cette borne est aussi la limite des différences précédentes lorsque A tend vers X. La fonction $\tilde{m}$ est alors fortement sous-additive sur l'ensemble des ouverts relativement compacts de X. Nous appelons conjuguée de m cette fonction.

Il est clair que les résultats établis sur les fonctions de compacts prolongeables sont valables, mutatis mutandis, sur les fonctions d'ouverts relativement compacts. Si $\tilde{m}$ est à variation bornée, elle est prolongeable au cône des fonctions s. c. i. à support compact positives, donc, en particulier à $C_K^+(X)$.

Théorème 4. — *Si la fonction fortement sous-additive prolongeable m admet une conjuguée $\tilde{m}$ prolongeable, m est bien prolongeable et l'on a, pour toute fonction continue à support compact négative,* $m(f)=\tilde{m}(-f)$.

Démonstration. — Il suffit d'établir l'égalité annoncée pour montrer en même temps que m est bien prolongeable. D'après la remarque 3, $\tilde{m}(-f)$ est l'intégrale de la fonction à variation bornée sur le segment $[0, -\inf f]$, $x \to \tilde{m}(f < -x)$. $\tilde{m}(f < -x)$ est la limite croissante, quand le compact A croît vers X, de la différence $m(A \setminus (f < -x)) - m(A)$. On s'assure aisément que les conditions d'application du théorème de convergence dominée sont satisfaites et $\tilde{m}(-f)$ est donc la limite, lorsque le compact A tend vers X, de l'expression :

$$\int_0^{-\inf f} [m(f + c.A \geqslant c - x) - m(A)]\, dx,$$

qui est égale à $m(f + c.A) - c.m(A)$. D'où le résultat.

Les capacités au sens de Choquet sont prolongeables, comme nous l'avons vu. Elles admettent des conjuguées décroissantes, donc prolongeables. Elles sont donc bien prolongeables.

Les fonctions d'Emerson et Kieffer ne sont pas nécessairement bien prolongeables car la borne supérieure $m(U)$ peut être $+\infty$.

5. Le cône Σ et la valeur moyenne de ses éléments

Nous considérons désormais des fonctions définies sur l'ensemble des compacts d'un groupe localement compact G. On désigne par h une mesure de Haar à gauche sur le groupe et par Δ la fonction modulaire. On appelle invariance la propriété suivante des fonctions d'ensembles.

(I) Pour tout compact A et tout élément a du groupe, $m(A\,a) = \Delta(a).m(A)$. Nous appelons invariance à droite plutôt que quasi-invariance cette propriété car il s'agit de l'invariance sous l'action d'un groupe bien défini de multiplications-translations.

On désigne alors par Σ le cône convexe des fonctions fortement sous-additives, bien prolongeables, invariantes à droite, sur l'ensemble des parties compactes du groupe localement compact G.

Les fonctions du cône Σ sont donc prolongeables en des fonctions sous-linéaires sur le cône $C_K^+(G)$ des fonctions continues à support compact sur G. La propriété fondamentale de ce prolongement est sa linéarité, d'après le théorème 2. C'est pourquoi nous nous restreignons aux fonctions fortement sous-additives pour établir le théorème principal de cet article.

THÉORÈME 5. — *Soit q la fonction sur-additive, positivement homogène, sur le cône Σ définie par $q(m) = \inf m(f)/h(f)$, où la borne inférieure est prise sur*

$C_K^+(G)$. *Si le groupe G possède la propriété de point fixe, la fonction q est aussi sous-additive.*

Démonstration. — Soit m un élément de Σ; on note E_m l'espace vectoriel $C_K(G)$ muni de la fonction m. Le groupe G agit sur E_m par multiplications-translations de la façon suivante :

$$T_g(f)=\Delta(g)^{-1}.f_0 d_{g-1},$$

où $d_{g^{-1}}$ désigne la translation à droite dans G par l'élément g^{-1}. La condition (C) sur m implique la continuité de cette action. L'invariance à droite de m est exactement traduite par le caractère isométrique de cette action de G.

Si m et n sont deux éléments de Σ, $E_{m,n}$ désigne l'espace $E_m \oplus E_n$ muni de la fonction s définie par $s(f_1, f_2)=m(f_1)+n(f_2)$ qui est sous-linéaire, et invariante sous l'action de G définie composante par composante. Le sous-espace diagonal s'identifie alors à E_{m+n} d'après la propriété fondamentale.

Comme nous l'avons vu plus haut (1), la propriété de point fixe permet le prolongement des formes linéaires invariantes majorées par une fonction sous-linéaire invariante s. On en déduit l'égalité des bornes supérieures :

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{M}(F,s,G)} \lambda(x)=\sup_{\lambda \in \mathscr{M}(E,s,G)} \lambda(x),$$

où x est un élément du sous-espace invariant F et où $\mathscr{M}(\ ,\ ,\ )$ désigne l'ensemble des formes linéaires sur l'espace, majorées par la fonction, invariantes sous l'action du groupe.

En appliquant ce résultat à la situation de l'espace $E_{m,n}$, il vient :

$$\sup_{\lambda \in \mathscr{M}(E_{m+n}, m+n, G)} \lambda(f) \leqslant \sup_{\lambda \in \mathscr{M}(E_m, m, G)} \lambda(f)+\sup_{\lambda \in \mathscr{M}(E_n, n, G)} \lambda(f).$$

Pour achever la démonstration du théorème, c'est-à-dire établir le caractère sous-additif de q, il suffit de montrer, pour une fonction m de Σ et une fonction f de $C_K^+(G)$, l'égalité :

$$q(m).h(f)=\sup_{\lambda \in \mathscr{M}(E_m, m, G)} \lambda(f).$$

Un élément λ de $\mathscr{M}(E_m, m, G)$ est une mesure de Radon, invariante sous l'action considérée de G; c'est donc un multiple $k.h$ de la mesure de Haar. Il est clair que k est inférieur ou égal à $q(m)$. Pour montrer l'égalité, il suffit de vérifier que la forme linéaire invariante $q(m).h$ est majorée par m sur $C_K(G)$.

Ceci résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 5. — *Soit m une fonction fortement sous-additive, bien prolongeable, invariante à droite. Pour toute fonction f de $C_K(G)$, on a $h(f).q(m) \leqslant m(f)$.*

Démonstration. — Le résultat est clair pour les fonctions positives. D'autre part, on a, pour toute fonction continue f à support compact $m(f)=m(f^+)+m(-f^-)$. Il suffit donc de s'assurer que, pour toute fonction négative, on a $q(m)\geqslant m(f)/h(f)$. Ceci résulte de l'existence d'un nombre k tel que la forme linéaire $k.h$ soit majorée par m.

6. Le filtre moyennant

Le théorème précédent traduit l'existence d'un filtre sur $C_K^+(G)$. Pour obtenir un filtre moyennant, il faut naturellement se restreindre à des fonctions de Σ ayant une régularité supplémentaire. Nous appelons régulièrement prolongeables les fonctions de compacts prolongeables vérifiant la condition suivante.

(R) Pour tout compact A, $m(A)$ est supérieur ou égal à la limite inférieure de $m(\varphi)$ lorsque la fonction continue à support compact φ décroît vers l'indicatrice du compact A.

Pour les capacités au sens de Choquet, ceci n'est rien d'autre que la régularité extérieure. Quant aux fonctions d'Emerson et Kieffer, elles vérifient toujours cette condition (R) puisqu'elles sont décroissantes.

Théorème 6. — *Les fonctions régulièrement prolongeables, invariantes à droite, vérifient* $q(m)=\inf m(A)/h(A)$.

Démonstration. — Par construction de l'extension de m aux fonctions de $C_K^+(G)$, on a l'inégalité $m(f)\geqslant h(f).\inf m(A)/h(A)$. D'où $\inf m(A)/h(A)\leqslant q(m)$.

Montrons l'inégalité inverse; la mesure de Haar étant une mesure de Radon, vérifie $h(A)=\inf h(\varphi)$ où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des fonctions continues à support compact majorant l'indicatrice du compact A.

Puisque m possède la propriété de régularité (R), pour tout réel positif ε, il existe une fonction φ de $C_K^+(G)$ vérifiant simultanément :

$$h(\varphi)\leqslant h(A)+\varepsilon \quad \text{et} \quad m(\varphi)\leqslant m(A)+\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure, pour les fonctions régulièrement prolongeables, à l'égalité $q(m)=\inf m(A)/h(A)$.

L'ensemble Σ_0 des fonctions fortement sous-additives, invariantes, régulièrement prolongeables est un sous-cône convexe de Σ. Il est possible de définir le filtre moyennant à l'aide de ces fonctions comme le montre le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6. — *Il existe sur l'ensemble des compacts de mesure non nulle de G un filtre $\mathcal{M}$ selon lequel les valeurs moyennes $m(A)/h(A)$ convergent vers $q(m)$ pour tout m de Σ_0.*

Démonstration. — Soient $m_1, \ldots, m_k$ des éléments de Σ_0 et ε un réel positif. On note $M(\varepsilon; m_1, \ldots, m_k)$ l'ensemble des compacts A vérifiant pour tout i, $m_i(A)/h(A) - q(m_i) < \varepsilon$. Ces ensembles sont non vides car $M(\varepsilon; m_1, \ldots, m_k)$ contient $M(\varepsilon; m_1 + \ldots + m_k)$ qui est non vide. Ceci résulte simplement des théorèmes 5 et 6.

Les ensembles précédents constituent donc une base de filtre. Le résultat annoncé est alors immédiat.

7. Exemples d'éléments de Σ_0

Comme nous en avons fait la remarque plus haut, les capacités au sens de Choquet, puisqu'elles sont bien prolongeables, sont des éléments de Σ_0. Donnons maintenant des exemples explicites de telles fonctions, qui servent à produire une base plus simple du filtre moyennant, permettant la démonstration de certains théorèmes de convergence.

Soit B un compact de G; on définit la fonction de compacts V_B par $V_B(A) = h(BA)$. On vérifie simplement que cette fonction est fortement sous-additive et invariante à droite. Elle est prolongeable puisqu'elle est croissante. Sa régularité résulte de la régularité extérieure de la mesure de Haar. Pour tout compact B, V_B est donc un élément de Σ_0.

Si d est un élément de G, on définit m_d par $m_d(A) = h(\{x \in A, dx \notin A\})$. On remarque que $m_d = V_{\{d,e\}} - h$ et donc que m_d appartient au cône Σ_0.

PROPOSITION 7. — *Pour tout élément d du groupe G, la valeur moyenne $q(m_d)$ est nulle.*

Démonstration. — Puisque la fonction m_d est régulière, il suffit d'établir que la borne inférieure des moyennes $m_d(A)/h(A)$ sur tous les compacts de mesure non nulle est nulle.

Si l'adhérence K du groupe engendré par d est compacte, le compact $K.K'$ est invariant par translation à gauche par d et $m_d(K.K')$ est nulle, d'où le résultat. K' est choisi de mesure non nulle, de sorte qu'il en est de même pour $K.K'$.

Sinon, pour tout entier n, il est possible de trouver un compact A de mesure non nulle tel que les $d^k.A$, pour k variant de 0 à $n-1$, soient disjoints. Pour un tel A, le compact $A' = \bigcup_0^{n-1} d^k.A$ vérifie $m_d(A')/h(A') = 1/n$.

8. Un théorème de convergence uniforme

Il résulte de la proposition 6 que, pour tout élément d de G, la limite selon le filtre moyennant $\mathcal{M}$ des valeurs moyennes $m_d(A)/h(A)$ est nulle. La convergence de ces fonctions de l'élément d de G est *a priori* une convergence simple. La proposition suivante montre que la convergence est en fait uniforme sur tout compact du groupe localement compact G possédant la propriété de point fixe.

PROPOSITION 8. — *Pour tout compact K de G, on a :*

$$\lim_{\mathcal{M}} \sup_{d\in K} \frac{m_d(A)}{h(A)} = 0.$$

Démonstration. — Choisissons un compact A de mesure non nulle; pour tout réel positif ε, il existe un voisinage compact B de l'élément neutre tel que $h(BA)/h(A)$ soit inférieur à $1+\varepsilon$. Il est donc possible, pour tout réel positif ε de trouver un voisinage compact de l'élément neutre tel que $q(V_B)$ soit inférieur à $1+\varepsilon/3$.

Le compact K peut être recouvert par un nombre fini de translatés à droite $B\,d_i$ de B. Si A appartient à $M(\varepsilon/3;\ V_B, m_{d_1}, \ldots, m_{d_K})$, on a pour tout d de K, un d_i tel que d appartienne à $B\,d_i$ de sorte que :

$$\begin{aligned}
&h(\{x\in A,\ dx\notin A\})\\
&\qquad\leqslant h(\{x\in A,\ d_i x\notin A\})+h(\{x\in A,\ d_i x\in A,\ dx\notin A\})\\
&\qquad\qquad\leqslant m_{d_i}(A)+V_B(A)-h(A)\leqslant\varepsilon.h(A),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

9. Un calcul de valeur moyenne

THÉORÈME 9. — *Pour tout compact K, la valeur moyenne $q(V_K)$ est égale à* 1.

Démonstration. — Il s'agit d'établir, pour tout compact K, que la borne inférieure des $h(KA)/h(A)$ est égale à 1.

Notre démonstration reprend l'idée d'EMERSON et GREENLEAF mais n'utilise aucun lemme de recouvrement.

D'après la proposition 8, pour tout réel positif ε et tout compact K', il existe un compact A tel que, pour tout x de K', $m_x(A)/h(A)$ soit inférieure à ε. Si δ est un réel positif, on désigne par A_δ la modification suivante de A.

$$A_\delta=\{y\in A,\ h(K'\setminus A\,y^{-1})<\delta\},$$

K' étant choisi en fonction de K, deux problèmes se posent pour majorer le rapport $h(KA_\delta)/h(A_\delta)$, minorer $h(A_\delta)$ et majorer $h(KA_\delta)$.

Minoration de $h(A_\delta)$. — Notons A'_δ le complémentaire de A_δ dans A. On peut majorer $\delta . h(A'_\delta)$ par l'intégrale sur A'_δ pour la mesure de Haar h de la fonction de y, $h(K' \setminus A y^{-1})$. En appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\int_{A'_\delta} h(K' \setminus A y^{-1})\, dhy = \int_{A'_\delta} dhy \int_{K'} 1_{K' \setminus A y^{-1}}(z)\, dhz$$

$$= \int_{K'} dhz \int_{A'_\delta} 1_{K' \setminus A y^{-1}}(z)\, dhy,$$

or l'intégrale sur A'_δ de $1_{K' \setminus A y^{-1}}(z)$ par rapport à la variable y est la mesure de l'ensemble des y de A' tels que zy sorte de A, ensemble dont la mesure est majorée par $\varepsilon . h(A)$ puisque z appartient à K'.

D'où la minoration cherchée de $h(A_\delta)$:

$$h(A_\delta)/h(A) \geqslant 1 - \frac{h(K').\varepsilon}{\delta}.$$

Majoration de $h(KA_\delta)$. — C'est pour cette majoration que Greenleaf et Emerson utilisent un lemme de recouvrement. Ce lemme peut être remplacé par la remarque suivante.

Pour tout compact B et tout compact A de G, on a :

$$h(B).h(A) = \int_G h(Kg \cap A).\Delta(g)^{-1}\, dhg,$$

la démonstration de ce résultat est une conséquence simple du théorème de Fubini.

On en déduit la majoration par $h(K^{-1}).h(A)$ de l'intégrale de la fonction de g, $h(K^{-1} g \cap A).\Delta(g)^{-1}$ sur l'ensemble G_δ des éléments de G tels que $K^{-1} g$ rencontre A_δ. Ce dernier ensemble n'est rien d'autre que KA_δ.

Pour un élément g de G_δ, on a :

$$h(K^{-1} g \cap A) = h(K^{-1}).\Delta(g) - h(K^{-1} g \setminus A).$$

Nous pouvons majorer $h(K^{-1} g \setminus A)$ par $h(K^{-1} Kp \setminus A)$ où p est élément de $K^{-1} g \cap A$. Si nous choisissons pour K' le compact $K^{-1} K$, nous pouvons majorer $h(K^{-1} Kp \setminus A)$ par $\delta . \Delta(p)$.

Ceci aboutit à l'inégalité :

$$h(K^{-1}).h(A) \geqslant h(KA_\delta).[h(K^{-1}) - \delta M],$$

où M est la borne supérieure sur K^{-1} de la fonction modulaire.

En choisissant, par exemple, $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, lorsque ε tend vers 0, les rapports $h(KA_\delta)/h(A)$ et $h(A_\delta)/h(A)$ tendent simultanément vers 1, ce qui achève la démonstration du théorème.

Définissons maintenant une nouvelle fonction de compacts, la fonction Δ_K. $\Delta_K(A)$ est la mesure de « la frontière de A d'épaisseur K » :

$$\Delta_K(A)=h(\{g\in G,\ Kg\cap A\neq\emptyset,\ Kg\cap A^c\neq\emptyset\}).$$

PROPOSITION 9. — *Pour tout compact K de G, la fonction Δ_K est un élément de Σ_0 et sa valeur moyenne est nulle.*

On peut écrire, pour tout compact A, $\Delta_K(A)=V_{K^{-1}}(A)-h(\bigcap_{k\in K}k^{-1}A)$. La fonction $V_{K^{-1}}$ est un élément de Σ_0. Le second terme de la somme est une fonction fortement sous-additive, invariante, décroissante, vérifiant la condition (R). C'est un élément de Σ_0 car elle admet une conjuguée qui n'est autre que $V_{K^{-1}}$. Δ_K est donc un élément de Σ_0.

Nous avons vu plus haut que la valeur moyenne de toute fonction V_L est égale à 1. Choisissant pour L le compact $K^{-1}.K$, il existe donc, pour tout réel positif ε, un compact A tel que $h(K^{-1}.K.A)/h(A)$ soit inférieur à $1+\varepsilon$. On vérifie alors que $\Delta_K(K.A)$ est majoré par $\varepsilon.h(A)$, donc par $\varepsilon.h(K.A)$. La moyenne $q(\Delta_K)$ est donc nulle.

10. Théorèmes de convergence

Pour établir les résultats précédents, nous avons exigé que les fonctions considérées satisfassent des conditions de plus en plus restrictives. Ceci aboutit à la définition du filtre moyennant à l'aide de tous les éléments du cône Σ_0. Nous définissons maintenant un filtre $\mathscr{F}$, *a priori* moins fin que le filtre $\mathscr{M}$, en utilisant que les fonctions Δ_K.

Le but de cette partie est, en quelque sorte, de faire la démarche inverse; il s'agit d'établir la convergence des moyennes $m(A)/h(A)$ selon le filtre $\mathscr{F}$ vers la borne inférieure de ces nombres lorsque m est une fonction complètement sous-additive invariante. Outre la condition de régularité (R), les conditions sur m sont suffisamment faibles pour être satisfaites, en particulier, par tout élément de Σ_0, de sorte que les filtres $\mathscr{F}$ et $\mathscr{M}$ sont les mêmes. Les fonctions introduites par EMERSON et KIEFFER vérifient aussi les hypothèses du théorème de convergence. Dans le cas des groupes discrets, il suffit des conditions algébriques (CS) et (I).

Le lemme suivant est utile à la démonstration du théorème de convergence.

LEMME 10. — *Soit* Δ_B *la fonction de compacts, invariante à droite, définie par* $\overline{\Delta}_B(A)=h(\overline{B^{-1}.A\setminus\bigcap_{b\in B} b^{-1}A})$ *où B est un compact fixé. La limite selon le filtre* $\mathscr{F}$ *des rapports* $\Delta_B(A)/h(A)$ *est nulle.*

Démonstration. — Soit U un voisinage compact de l'élément neutre et C le compact $B.U$; on a l'inclusion $\overline{B^{-1}.A\setminus\bigcap_{b\in B} b^{-1}A}\subset C^{-1}.A\setminus\bigcap_{c\in C} c^{-1}A$. En effet, d'une part, $B^{-1}.A$ est contenu dans $C^{-1}.A$ et d'autre part, l'intersection $\bigcap_{c\in C} c^{-1}A$ est contenue dans l'intérieur de l'intersection $\bigcap_{b\in B} b^{-1}A$, comme on le voit aisément. D'où $\overline{\Delta}_B\leqslant\Delta_C$ et le résultat annoncé.

Un résultat, bien classique, sur la convolution, intervient aussi dans la démonstration du théorème de convergence. C'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 10. — *Soit* f *une fonction bornée, uniformément continue à gauche, sur le groupe localement compact G. L'application linéaire* $\mu\to\mu\star f$, *définie par* $\mu\star f(x)=\int_G f(xg)\,d\mu(g)$ *est continue de tout sous-ensemble borné de l'espace des mesures bornées muni de la topologie de la convergence étroite, dans l'espace des fonctions bornées, uniformément continues à gauche, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — Puisque f est uniformément continue à gauche, il existe, pour tout réel positif ε, un voisinage U de l'élément neutre e du groupe G, tel que $|f(x)-f(y)|$ soit inférieur à ε dès que $x^{-1}y$ appartient à U. Soit A un compact de G; il peut être recouvert par un nombre fini de translatés $U\,a_i$ de ce voisinage de sorte que, pour tout x de A, il existe un indice i de cet ensemble tel que $|f(xg)-f(a_i g)|$ soit majoré par ε uniformément en g.

Soit E un sous-ensemble borné de l'espace des mesures bornées; il existe une constante M telle que $|\mu\star f(x)-\mu\star f(a_i)|\leqslant\varepsilon.M$, pour toute mesure de E.

Si l'on choisit l'entourage étroit ω défini par $|(\mu_1-\mu_2)(f\circ a_i)|<\varepsilon$ pour tout i, deux mesures prises dans l'ensemble E, proches d'ordre ω, vérifient, pour tout x de A,

$$|\mu_1\star f(x)-\mu_2\star f(x)|<\varepsilon.(1+2M).$$

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence.

THÉORÈME 10. — *Pour toute fonction prolongeable invariante, c'est-à-dire vérifiant les conditions (CS), (C) et (I), on a* $\lim\sup_{\mathscr{F}} m(A)/h(A)\leqslant m(f)/h(f)$.

Démonstration. — Soit f un élément non nul de $C_K^+(G)$. Son intégrale $h(f)$ est égale, pour tout x, à l'intégrale $\int_G f(xg^{-1})\Delta(g)^{-1}\,dh(g)$. La fonction indicatrice du compact A vérifie donc :

$$h(f).A(x)=\int_G f(xg^{-1}).A(x).\Delta(g)^{-1}\,dh(g).$$

Il suffit d'ailleurs de prendre l'intégrale sur le compact $B^{-1}.A$ où B est le support de f.

D'après la proposition 10, il est possible, pour tout réel positif ε de trouver une combinaison linéaire à coefficients positifs $\sum\lambda_a.\delta_a$ de masses de Dirac vérifiant simultanément :

(i) $$\frac{1}{h(f)}\left[\int_{B^{-1}A} f(xg^{-1}).\Delta(g)^{-1}\,dh(g)-\sum\lambda_a f(xa^{-1}).\Delta(a)^{-1}\right]<\varepsilon$$

uniformément pour tout x de $B^{-1}A$

(ii) $\sum\lambda_a\delta_a(K)<h(K)+\varepsilon$ où $K=\overline{B^{-1}A\setminus\bigcap_{b\in B}b^{-1}A}$

(iii) $\sum\lambda_a\delta_a(B^{-1}A)<h(B^{-1}A)+\varepsilon.$

La continuité de m permet de majorer $m(A)$ par $\varepsilon.C(B^{-1}A)+m(\psi)$ où ψ est la fonction s. c. s. à support dans $B^{-1}A$, proche de A de moins de ε en norme uniforme :

$$\psi=(1/h(f)).\sum\lambda_a f\circ a^{-1}.\Delta(a)^{-1}.A.$$

Utilisant l'invariance de m, on obtient la majoration :

$$m(A)\leqslant\varepsilon.C(B^{-1}A)+(1/h(f)).\sum\lambda_a m(f.A\,a).$$

On distingue parmi les éléments a ceux tels que le support B de f soit contenu dans $A\,a$; ce sont des éléments de $\bigcap_{b\in B}b^{-1}$; $m(f.A\,a)$ est alors égal à $m(f)$. Sinon, on majore $m(f.A\,a)$ par $\|f\|.C(B)$.

On obtient ainsi, si $m(f)$ est positif, la majoration de $m(A)$ par :

$$\varepsilon.C(B^{-1}A)+(h(A)+\varepsilon).\frac{m(f)}{h(f)}+(h(K)+\varepsilon).\frac{\|f\|}{h(f)}.C(B),$$

et si $m(f)$ est négatif, il faut mettre un facteur 2 devant le dernier terme.

La majoration précédente étant valable pour tout ε, on obtient finalement :

$$\frac{m(A)}{h(A)}\leqslant\frac{m(f)}{h(f)}+2\frac{h(K)}{h(A)}.\frac{\|f\|}{h(f)}.C(B).$$

D'où le résultat, en appliquant le lemme 10.

COROLLAIRE 10. — *Pour toute fonction prolongeable, invariante, régulière, sur l'ensemble des compacts d'un groupe localement compact G possédant la propriété de point fixe, on a* $\lim_{\mathcal{F}} m(A)/h(A) = \inf m(A)/h(A)$.

Démonstration. — La condition de régularité (R) implique, en effet, pour les fonctions prolongeables, $q(m) = \inf m(A)/h(A)$. Le théorème 10 n'est rien d'autre que l'inégalité $\lim \sup_{\mathcal{F}} m(A)/h(A) \leqslant q(m)$. D'où le résultat.

Remarque 10. — On peut affaiblir la condition de continuité (C) sur les fonctions complètement sous-additives en une condition de semi-continuité inférieure qui permet encore la démonstration des théorèmes 6 et 10, donc le résultat du corollaire 10.

(S) Pour toute combinaison linéaire d'indicatrices de compacts, $m(\varphi)$ est finie et, pour toute fonction s. c. s. à support compact f, la limite inférieure de $m(\varphi)$, lorsque φ tend uniformément vers f en gardant son support dans un compact fixe, est finie.

Cette limite inférieure est alors un prolongement sous-linéaire, au cône $G_K^+(G)$. Ce prolongement est s. c. i., ce qui permet l'approximation dans la démonstration du théorème 10.

La condition de régularité s'exprime alors sur ce prolongement, qui coïncide, bien sûr, avec le prolongement canonique lorsque m est prolongeable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EMERSON (W. R.). — Averaging strongly subadditive set functions in unimodular amenable groups I and II, *Pac. J. Math.*, vol. 61, 1975, p. 391-400 et vol. 64, 1976, p. 353-368.

[2] EMERSON (W. R.) et GREENLEAF (F. P.). — Covering properties and Følner conditions for locally compact groups, *Math. Zeit.*, vol. 102, 1967, p. 370-384.

[3] FØLNER (E.). — On groups with full Banach mean value, *Math. Scand.*, vol. 3, 1955, p. 243-254.

[4] GREENLEAF (F. P.). — Invariant means on topological groups, Van Nostrand Mathematical Studies, 1969.

[5] KIEFFER (J. C.). — A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space, *Ann. oj Prob.*, vol. 3, 1975, p. 1031-1037.

[6] KIEFFER (J. C.). — A ratio limit theorem for a strongly subadditive set function in a locally compact amenable group, *Pac. J. Math.*, vol. 61, 1975, p. 183-189.

[7] MOULIN OLLAGNIER (J.) et PINCHON (D.). — Une nouvelle démonstration du théorème de Følner, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 287, série A, 1978, p. 557-560.

[8] MILNES (P.) et BONDAR (J. V.). — A simple proof of a covering property of locally compact groups, *P.A.M.S.*, vol. 73, 1979, p. 117-118.