G. HUMBERT

Sur l’équation hypergéométrique

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 112-120
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__112_0>

Sur l'équation hypergéométrique; par M. HUMBERT.

(Séance du 5 mars 1880.)

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$(1)\qquad (x^2-1)y''+[(\lambda+\mu+2)x+(\lambda-\mu)]y'+Fy=0,$$

à laquelle on peut toujours ramener l'équation de Gauss; pour abréger, nous l'écrirons souvent

$$(2)\qquad \Delta y''+Gy'+Fy=0.$$

I. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier de degré n satisfasse à l'équation (1) est que n soit racine de l'équation du second degré

$$(3)\qquad n(n-1)+(\lambda+\mu+2)n+F=0,$$

l'autre racine n'étant pas en même temps entière et inférieure à $n-1$.

Plus généralement, si l'on pose

$$\Delta=Ax^2+Bx+C,$$
$$G=Dx+E,$$

n devra être racine de

$$(3')\qquad An(n-1)+Dn+F=0.$$

Cette équation joue un grand rôle dans la théorie qui va suivre ; nous l'appellerons l'équation *caractéristique* de l'équation (1).

II. Jacobi a donné une expression du polynôme qui satisfait à l'équation différentielle (1); nous emploierons la même expression, mise sous une forme un peu plus générale.

Soit $K(x)$ une fonction satisfaisant à la relation

$$\frac{K'}{K}=\frac{G}{\Delta}.$$

Je dis que, si l'équation caractéristique (3') a une racine entière et positive n, une solution de l'équation différentielle sera le polynôme de degré n

(4) $$P_n = \frac{\Delta}{K} D_n K \Delta^{n-1}.$$

Il suffit, pour le montrer, d'écrire

$$z = K\Delta^{n-1},$$
$$\frac{z'}{z} = \frac{G + (n-1)\Delta'}{\Delta}$$

ou

$$\Delta z' = z[G + (n-1)\Delta'];$$

en prenant les dérivées d'ordre $(n+1)$ des deux membres de cette relation et posant $z^{(n)} = \frac{K}{\Delta} y$, on retrouve l'équation (2).

Il est d'ailleurs évident, à cause de la relation

$$\frac{K'}{K} = \frac{G}{\Delta},$$

que P_n est un polynôme entier de degré n.

La formule (4) est plus commode, dans les calculs, que celle de Jacobi; elle ne nécessite aucune transformation préalable de l'équation (2), et elle s'applique aux équations de la forme

$$(Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + F = 0,$$

B pouvant être égal à zéro ou différent de zéro.

Elle donne même, dans ce cas, des résultats intéressants par l'introduction de fonctions transcendantes que la formule de Jacobi ne laissait pas prévoir immédiatement.

Ici, en effet, si $B \gtrless 0$,

$$\frac{K'}{K} = \frac{MB}{Bx + C} - N,$$
$$K = (Bx + C)^M e^{-Nx}.$$

On aura donc ici

$$P = (Bx + C)^{1-M} e^{Nx} D_n e^{-Nx} (Bx + C)^{n+M-1}.$$

Si $B = 0$,

$$\frac{K'}{K} = 2D'x + E',$$
$$K = e^{D'x^2 + E'x},$$

et, par suite,

$$P = e^{-(D'x^2 + E'x)} D_n e^{D'x^2 + E'x}.$$

III. Il est un cas où la formule (4) ne donne rien : c'est celui où

$$K\Delta^{n-1} = \text{const.}$$

On peut s'assurer d'ailleurs que la formule de Jacobi est également en défaut.

On a, dans ce cas,

$$\frac{K'}{K} = -\frac{(n-1)\Delta'}{\Delta},$$

par suite

$$G + (n-1)\Delta' = 0$$

ou

$$(Dx + E) + (n-1)(2Ax + B) = 0,$$
$$D + 2A(n-1) = 0,$$
$$E + B(n-1) = 0.$$

Comme n satisfait à l'équation

$$An(n-1) + Dn + F = 0,$$

on aura

$$F - An(n-1) = 0$$

ou

$$\frac{F}{A} = n(n-1).$$

La seconde racine de l'équation caractéristique sera donc $(n-1)$.

Par suite, on aura la solution

$$P_{n-1} = \Delta^n D_{n-1} \frac{1}{\Delta}.$$

On s'assure ensuite directement que le polynôme

$$P_n = \Delta^n D_{n-1} \frac{\alpha x + \beta}{\Delta}$$

satisfait à l'équation différentielle.

On voit que cette solution renferme la précédente.

Donc la solution la plus générale de l'équation

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' - (n-1)(2Ax + B)y' + An(n-1)y = 0$$

est donnée par la formule

$$P_n = \Delta^n D_{n-1} \frac{\alpha x + \beta}{\Delta},$$

α et β étant deux constantes arbitraires.

IV. Cela posé, nous allons arriver à d'autres expressions des solutions de l'équation (1) de la manière suivante.

Faisons dans cette équation la substitution

$$y = u \varphi(x).$$

Nous arriverons à une équation en u du second ordre.

En exprimant qu'elle est de la forme (1), nous déterminerons $\varphi(x)$; dès lors, à une expression de u va correspondre une expression de y.

Sans entrer dans les détails du calcul, les substitutions répondant à la question seront les suivantes :

(A) $$y = (x-1)^{-\lambda}(x+1)^{-\mu} u,$$

(B) $$y = (x-1)^{-\lambda} u,$$

(C) $$y = (x+1)^{-\mu} u.$$

Nous allons les étudier successivement [1].

V. *Substitution* (A):

$$y = (x-1)^{-\lambda}(x+1)^{-\mu} u.$$

On trouve, pour l'équation en u,

$$(x^2-1)u'' + [(-\lambda-\mu+2)x - \lambda + \mu]u' + F_1 u = 0.$$

Plus généralement, cette substitution revient à

$$y = \frac{\Delta}{K} u,$$

et l'on a

$$\Delta u'' + u'(2\Delta' - G) + n(F + \Delta'' - G') = 0.$$

---

[1] Ces substitutions ont été données sous une autre forme par Jacobi, dans son Mémoire posthume *Sur l'équation de Gauss*.

L'équation caractéristique est ici

$$(5)\qquad An'(n'-1)+(4A-D)n'+F+2A-D=0.$$

C'est la transformée de l'équation caractéristique primitive (3) par la substitution

$$n'+1=-n.$$

Si donc une racine de l'équation caractéristique

$$An(n-1)+Dn+F=0$$

est entière et négative, $-m$, l'équation (4) aura la racine $m-1$.

La formule (4), appliquée à l'équation différentielle en u, donne, après un calcul facile, la solution

$$u=\frac{K}{\Delta}D_{m-1}\frac{\Delta^m}{K},$$

et par suite, pour l'équation en y,

$$y=D_{m-1}\frac{\Delta^m}{K}.$$

Avec la forme (1) on aura

$$y=D_{m-1}(x-1)^{-\lambda+m-1}(x+1)^{-\mu+m-1}.$$

VI. *Substitution* (B) :

$$y=(x-1)^{-\lambda}u.$$

On trouve que les racines de l'équation caractéristique nouvelle sont celles de l'équation (3), augmentées de λ.

Si donc $n+\lambda$ est entier, la formule (4) donnera une expression de u. On a ainsi pour y :

1° Si $n+\lambda$ est entier et positif,

$$y=(x+1)^{-\mu}D_{n+\lambda}(x^2-1)^n(x+1)^{\lambda+\mu};$$

2° Si $n+\lambda$ est entier et négatif,

$$y=(x-1)^{-\lambda}D_{-n-\lambda-1}(x^2-1)^{-n-1}(x+1)^{-\lambda-\mu}.$$

VII. *Substitution* (C):

$$y=(x-1)^{-\mu}u.$$

Elle donne de même :

1° Si $n+\mu$ est entier et positif,

$$y=(x-1)^{-\lambda}D_{n+\mu}(x^2-1)^n(x-1)^{\lambda+\mu};$$

2° Si $n+$ est entier et négatif,

$$y=(x+1)^{-\mu}D_{-n-\mu-1}(x^2-1)^{-n-1}(x-1)^{-\lambda-\mu}.$$

VIII. Les deux derniers paragraphes nous permettent d'exprimer par des dérivées les solutions d'équations différentielles auxquelles la formule de Jacobi ou la formule (4) n'est pas applicable immédiatement.

Il peut se faire en effet que n ne soit pas entier et que $n+\lambda$ le soit.

Nous allons, par exemple, retrouver deux formules connues, dues à Jacobi.

L'équation

$$(x^2-1)y''+xy'-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2y=0$$

admet pour solutions les fonctions

$$\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\arccos x,$$
$$\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\arccos x.$$

Or $\lambda=\mu=-\frac{1}{2}$; prenant $n=\frac{2m+1}{2}$, $n+\lambda=m$, on trouve facilement

$$\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(\arccos x)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1.3\ldots 2m-1}D_m(x-1)^{m+\frac{1}{2}}(x+1)^{m-\frac{1}{2}},$$
$$\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)(\arccos x)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{1.3\ldots 2m-1}D_m(x+1)^{m+\frac{1}{2}}(x-1)^{m-\frac{1}{2}},$$

IX. Appliquons les substitutions (B) et (C) aux équations différentielles qu'on obtient en différentiant p fois le premier membre de (1) :

$$(6)\quad \begin{cases} 0=(x^2-1)z''+[(\lambda+p+\mu+p+2)x+\lambda-\mu]y' \\ \quad +y[p(p-1)+(\lambda+\mu+2)p+F]. \end{cases}$$

Les racines de l'équation (3) étant n et n', celles de l'équation caractéristique nouvelle sont

$$n-p \quad \text{et} \quad n'-p.$$

Faisons la substitution (B) :

$$z=(x-1)^{-\lambda-p}u.$$

Les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation en u seront

$$n-p+\lambda+p=n+\lambda.$$

On a donc ce théorème :

Les transformées de l'équation (1) *et des équations dérivées par les substitutions*

$$y=(x-1)^{-\lambda-p}u,$$
$$y=(x+1)^{-\mu-p}u$$

ont même équation caractéristique.

X. Dans ce qui précède, on n'a fait aucune hypothèse sur le signe de p. Si p est positif, l'équation (6) s'obtient en différentiant p fois l'équation (1); si p est négatif et égal à $-p'$, c'est l'équation (1) qui s'obtient en différentiant p' fois l'équation (6).

Dans les deux cas, nous représenterons les solutions de l'équation (6) par $D^p y$, où y représente une solution de (1).

Si $p>0$, cette expression sera une dérivée; si $p<0$, ce sera une intégrale.

XI. Il résulte de là que, si $n+\lambda$ est entier et positif, nous pourrons exprimer une solution de l'équation (1), ses dérivées et ses intégrales par une fonction contenant une dérivée d'indice constant.

On aura ainsi

$$D_p y = (x+1)^{-\mu-p} D_{n+\lambda}(x^2-1)^n (x+1)^{\mu+\lambda+p}(x-1)^{-p}.$$

Si de même $n+\mu$ est entier et positif,

$$D_p y = (x-1)^{-\lambda-p} D_{n+\mu}(x^2-1)^n (x-1)^{\lambda+\mu+p}(x+1)^{-p}.$$

Il y aura une discussion à faire pour chercher si ces expressions représentent bien les dérivées d'une même solution de l'équation (1). Nous allons donner quelques exemples.

XII. *Polynômes de Legendre.* — X_n satisfait à l'équation

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Ici $\lambda = \mu = 0$, $n+\lambda = n+\mu = n$.

L'équation (6) aura donc pour solutions

$$(x+1)^{-p} D_n (x+1)^{n+p}(x-1)^{n-p}$$

et

$$(x-1)^{-p} D_n (x-1)^{n+p}(x+1)^{n-p}.$$

Ces deux expressions, tant que p est compris entre $-n$ et $+n$, représentent des polynômes entiers de degré $n-p$.

Comme X_n est le seul polynôme satisfaisant à l'équation différentielle écrite plus haut, ces deux expressions représentent, à un facteur constant près, $D_p X_n$.

On a donc

$$D_p X_n = \frac{C}{(x+1)^p} D_n (x+1)^{n+p}(x-1)^{n-p},$$

$$D_p X_n = \frac{C}{(x-1)^p} D_n (x+1)^{n-p}(x-1)^{n+p}.$$

On a de même

$$D_{-p} X_n = \frac{C'}{(x+1)^{-p}} D_n (x+1)^{n-p}(x-1)^{n+p}.$$

On en déduit la formule connue

$$\frac{D_{-p} X_n}{D_p X_n} = A(x^2-1)^p.$$

XIII. Appliquons les mêmes formules à l'équation

$$(x^2-1)y'' + xy' - \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 y = 0.$$

On trouve, après une discussion facile,

$$\mathrm{D}_p \sin n \arccos x = \frac{C}{(x+1)^{p-\frac{1}{2}}} \mathrm{D}_m (x-1)^{m-p+\frac{1}{2}} (x+1)^{m+p-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{D}_p \cos n \arccos x = \frac{C'}{(x-1)^{p-\frac{1}{2}}} \mathrm{D}_m (x-1)^{m+p-\frac{1}{2}} (x+1)^{m-p+\frac{1}{2}}.$$

On en déduit, par un calcul analogue à celui qu'on a fait pour X_n,

$$\frac{\mathrm{D}_{-(p-1)} \sin (m+\frac{1}{2}) \arccos x}{\mathrm{D}_p \cos (m+\frac{1}{2}) \arccos x}$$

$$= \frac{\mathrm{D}_{-(p-1)} \cos (m+\frac{1}{2}) \arccos x}{\mathrm{D}_p \sin (m+\frac{1}{2}) \arccos x} = \mathrm{A}(x^2-1)^{p-\frac{1}{2}}.$$