BULLETIN DE LA S. M. F.

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS
RENEE LEWIN-MÉNÉGAUX

Surfaces de type général dominées par une variété fixe

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 127-146
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__127_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 127-146.

SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL DOMINÉES PAR UNE VARIÉTÉ FIXE

PAR

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS et RENÉE LEWIN-MÉNÉGAUX (*)

RÉSUMÉ. — Soit X une variété projective lisse sur un corps k de caractéristique nulle. On montre ici qu'à équivalence birationnelle près, d'une part les k-surfaces projectives lisses Y, de type général telles qu'il existe un morphisme surjectif de X sur Y, sont en nombre fini, d'autre part les k-surfaces projectives lisses, de type général, d'irrégularité strictement positive ou de genre géométrique supérieur ou égal à 2, telles qu'il existe une application rationnelle dominante de X dans Y, sont en nombre fini.

ABSTRACT. — Let X be a smooth projective variety over a field k of characteristic zero. In this paper, we prove that the set of smooth projective k-surfaces of general type Y for which there exists a surjective morphism $X \to Y$, modulo birational equivalence, is finite, and that the set of smooth projective k-surfaces of general type Y with strictly positive irregularity or 2 geometric genus greater than 2 and with a dominant rational map $X \to Y$, modulo birational equivalence, is finite.

On connaît pour les courbes de genre supérieur ou égal à 2 les trois grands théorèmes de finitude suivants [12] :

THÉORÈME DE SCHWARZ-KLEIN. — *Soit X une courbe projective lisse sur un corps k, de genre absolu supérieur ou égal à 2. Le groupe de ses automorphismes est fini.*

THÉORÈME DE DE FRANCHIS. — *Soit X une variété projective sur un corps k, et soit Y une courbe projective sur k, de genre géométrique supérieur ou égal à 2. Les applications rationnelles dominantes séparables de X dans Y sont en nombre fini.*

(*) Texte reçu le 5 janvier 1981, révisé le 27 avril 1981.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS, 11, rue de la Sablonnière, 91400 Gometz-le-Châtel.
Renée LEWIN-MÉNÉGAUX, 12, boulevard des Invalides, 75007 Paris.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1982/127/$ 5.00

THÉORÈME DE SÉVERI. — *Soit X une variété projective sur un corps k. Les courbes projectives Y sur k, de genre géométrique supérieur ou égal à 2, telles qu'il existe une application rationnelle dominante et séparable de X dans Y, sont en nombre fini, modulo équivalence birationnelle.*

Il est bien connu qu'en dimension supérieure les variétés analogues des courbes de genre supérieur ou égal à 2 sont les variétés de type général. Il est donc naturel de se demander si ces théorèmes de finitude se démontrent pour des variétés de type général.

La finitude du groupe des automorphismes (resp. des automorphismes birationnels) d'une variété de type général est un résultat classique [11].

Le théorème de De Franchis est encore vrai pour des variétés de dimensions quelconques, lorsque Y est une variété de type général. Ce résultat a été démontré sur $\mathbb{C}$ par KOBAYASHI et OCHIAI [7], utilisant des méthodes transcendantes, et en toute caractéristique, par voie algébrique, par les auteurs de ce travail [10].

Le but de cet article est d'étudier la situation des surfaces de type général par rapport à un théorème « type Séveri ». Résumons brièvement les résultats :

On se fixe une variété projective X sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique nulle, et on étudie l'ensemble $\mathbf{E}$ des couples (Y, f), où Y est une k-surface projective lisse, de type général, et f une application rationnelle dominante de X dans Y, modulo équivalence birationnelle.

On se ramène aisément au cas où X est une surface lisse, de type général (partie IV).

On montre alors que $\mathbf{E}$ est une famille limitée, en construisant une injection de $\mathbf{E}$ dans le schéma de Hilbert $\mathbf{H}$ des surfaces contenues dans $X \times X$ (partie I).

La méthode standard qui consiste à étudier les déformations infinitésimales des images dans $\mathbf{H}$ des éléments de $\mathbf{E}$ conduit au théorème de finitude suivant (partie II) :

THÉORÈME. — *Soit X une surface projective lisse sur un corps de caractéristique nulle. Les surfaces Y, projectives lisses, de type général telles qu'il existe un morphisme surjectif de X sur Y, sont en nombre fini, à équivalence birationnelle près.*

Une autre façon d'aborder le problème est d'étudier aussi la variation de certaines structures attachées à la surface Y. On montre dans la partie III que pour une famille infinie d'éléments de $\mathbf{E}$, les images de la structure de Hodge de Y en bidegré (0,2) dans celle de X d'une part, et de la variété de Picard de Y dans celle de X d'autre part, sont constantes, ce qui permet de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit X une surface projective lisse sur un corps de catactéristique nulle. Il n'y a, à équivalence birationnelle près, q'un nombre fini de surfaces Y, projectives et lisses, de type général, de genre géométrique supérieur ou égal à 2, ou d'irrégularité strictement positive, telles qu'il existe une application rationnelle dominante de X dans Y.*

Les cas $p_g(Y)=0$ ou 1, $q(Y)=0$, où les deux structures décrites ci-dessus s'effondrent, restent à étudier.

Nous remercions Michel RAYNAUD de ses conseils et de ses encouragements, qui nous ont été précieux tout au long de ce travail.

RAPPELS ET NOTATIONS

Dans toute la suite, k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et toutes les variétés considérées sont définies sur k.

Pour toute k-variété S, de dimension r, on note $\mathbf{O}_S$ le faisceau structural, $\Omega_S^i (i=1, 2, \ldots, r)$ le faisceau des i-formes différentielles, et si S est lisse, $\omega_S = \wedge^r \Omega_S^1 = \Omega_S^r$ le faisceau dualisant. Dans le cas où S est une surface lisse, on désigne par K_S un diviseur canonique $(\mathbf{O}_S(K_S) \simeq \omega_S)$.

Pour tout faisceau $\mathbf{F}$ quasi-cohérent sur S, on note $h^i(\mathbf{F}) = \dim_k H^i(S, \mathbf{F})$, $i \geqslant 0$, et si D est un diviseur sur S, on note aussi $h^i(D) = h^i(\mathbf{O}_S(\mathbf{D}))$.

Une surface S, lisse et projective sur k, est dite de type général si pour n grand, l'image de l'application rationnelle n-canonique φ_{nK_S} : $S \ldots \to \mathbb{P}(H^0(S, \omega_S^{\otimes n})$ est une surface. On rappelle les résultats suivants ([1], [14]) :

— soit S une surface lisse, projective, de type général, minimale. Alors, pour $n \geqslant 5$, l'application rationnelle n-canonique φ_{nK_S} est partout définie, et birationnelle sur son image. Cètte dernière est normale et n'a que des points doubles rationnels;

— sur une surface S, de type général, minimale, un diviseur canonique K_S est numériquement positif, c'est-à-dire qu'il possède les propriétés suivantes :

$$K_S^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad K_S . C \geqslant 0,$$

pour toute courbe C tracée sur S.

Soit X une surface projective lisse. On considère l'ensemble $\mathbf{E}_1$ des couples (Y,f), où Y est une surface projective lisse, de type général, et f une application rationnelle dominante de X dans Y, et on définit sur $\mathbf{E}_1$ la relation d'équivalence : $(Y,f)\sim(Y',f')$ si et seulement s'il existe une application birationnelle $\alpha : Y\ldots\to Y'$ telle que $\alpha f=f'$. On note $\mathbf{E}$ l'ensemble quotient.

Enfin, on note $\mathbf{H}$ le schéma de Hilbert des surfaces contenues dans $X\times X$ [5].

I. La famille E est limitée

On se place dans le cas où l'ensemble $\mathbf{E}$ n'est pas vide, ce qui entraîne en particulier que la surface X est de type général.

Soit (Y,f) un élément de $\mathbf{E}_1$, et soit U l'ouvert de définition de f.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \arrow[d, dotted, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Soit Δ_Y la diagonale de $Y\times Y$. On a le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} U\times_Y U \arrow[r, hook] \arrow[d] & U\times U \arrow[d, "f\times f"] \\ Y\simeq\Delta_Y \arrow[r, hook] & Y\times Y \end{tikzcd}$$

Pour tous les points y de Y, sauf un nombre fini, la fibre $(f\times f)^{-1}(y,y)=f^{-1}(y)\times f^{-1}(y)$ est de dimension 0. Un nombre fini de fibres ont des composantes de dimension 2 (surfaces de la forme $C\times C$, où C est une courbe contractée par f), et des composantes de dimensions 1 et 0. Le produit fibré $U\times_Y U$ ne contient donc aucune variété de dimension 3.

D'autre part, puisque Y est lisse, Δ_Y est localement intersection complète dans $Y\times Y$, définie par deux équations. Donc $U\times_Y U$ est localement défini par deux équations dans un schéma régulier de dimension 4. C'est une surface, localement intersection complète, formée de composantes qui dominent Δ_Y par $f \times f$ et de composantes dont les espaces sous-jacents sont des produits de courbes (qui ne dominent pas Δ_Y).

La partie « générique » (celle qui domine Δ_Y par $f \times f$) est l'adhérence schématique de Spec $(k(X) \otimes_{k(Y)} k(X))$ dans $U \times U$. C'est donc une surface réduite.

Soit Z_0 l'adhérence schématique de $U \times_Y U$ dans $X \times X$. C'est une surface. Sa partie « générique » Z est réduite, domine Y, et donc domine X par les deux projections. Les autres composantes ont pour supports des produits de courbes.

Exemple. — Soit $\tau : X \to Y$ l'éclatement d'un point fermé de Y, et soit E le diviseur exceptionnel. Alors $X \times_Y X$ est la réunion de la diagonale Δ_X de $X \times X$ et du produit $E \times E$.

PROPOSITION 1. — *L'application qui à tout élément* (Y, f) *de* $\mathbf{E}_1$ *fait correspondre la surface* Z *définie ci-dessus induit une injection de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{H}$.

Démonstration. — Puisque Z est l'adhérence de Spec$(k(X) \otimes_{k(Y)} k(X))$ dans $X \times X$, il ne dépend que de l'injection des corps $k(Y) \subsetneq k(X)$ donc de la classe du couple (Y, f) dans $\mathbf{E}_1$.

D'autre part, il existe un ouvert W de X tel que $Z \cap (W \times W)$ définisse une relation d'équivalence sur W, dont le quotient est un ouvert de Y. L'élément (Y, f) de $\mathbf{E}_1$ est donc déterminé à équivalence birationnelle près par la donnée de Z.

Nous allons montrer maintenant que l'image de $\mathbf{E}$ par cette injection est contenue dans un nombre fini de composantes de $\mathbf{H}$, c'est-à-dire en d'autres termes que $\mathbf{E}$ est une famille limitée. Grâce au théorème de Chow, il suffit de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *Soit* $X \overset{i}{\subsetneq} \mathbb{P}^N$ *un plongement projectif fixé de* X. *Alors dans le plongement composé :* $Z \subsetneq X \times X \subsetneq \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \subsetneq \mathbb{P}^{N^2+2N}$, *$Z$ est de degré borné.*

Démonstration. — Puisque la définition de Z ne dépend que de la classe du couple (Y, f), on peut supposer Y minimale.

Désignons par X_0 le modèle minimal de X, par H une section hyperplane (relative au plongement j), et par p_1 et p_2 les deux projections du produit $X \times X$. Le degré de Z est donné par un nombre d'intersection calculé dans l'anneau de Chow de $X \times X$ [3] :

$$\begin{aligned}\deg Z &= Z.(p_1^* H + p_2^* H).(p_1^* H + p_2^* H)\\ &= Z.p_1^* H.p_1^* H + Z.p_2^* H.p_2^* H + 2Z.(H\times H)\\ &= (\deg p_1|_Z + \deg p_2|_Z)\, H.H + 2Z.(H\times H),\end{aligned}$$

où $H.H$ est le degré de X dans le plongement j :

$$\deg Z = 2 \deg f.\deg X + 2Z.(H\times H).$$

Soit $\sigma : X' \to X$ un morphisme composé d'un nombre fini d'éclatements de points fermés de X tel que l'application rationnelle composée $f' = \sigma f$ soit un morphisme.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[r, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Soient $H' = \sigma^* H$ et $Z' = X' \times_Y X' \subset X' \times X'$. Le schéma Z' est l'image réciproque de la diagonale Δ_Y par $f' \times f'$, c'est donc une surface, localement intersection complète dans $X' \times X'$.

Le cycle $\sigma_* Z'$ contient le cycle Z qui est sa partie « générique ». On peut donc écrire $\sigma_* Z' = Z + Z''$, où Z'' est un cycle positif, dont le support est contenu dans des produits de courbes.

Le diviseur H est ample, donc numériquement positif, d'où :

$$Z.(H\times H) = (\sigma_* Z' - Z'').(H\times H) = Z'.(H'\times H') - Z''.(H\times H)$$

et par conséquent :

$$Z.(H\times H) \leqslant Z'.(H'\times H').$$

Pour borner le degré de Z, il suffit donc de borner les nombres $\deg f$ et $Z'.(H'\times H')$, ce qui est une conséquence des trois lemmes suivants :

LEMME 1. — *On a* $(\deg f)\, K_Y^2 \leqslant K_{X_0}^2$.

Démonstration. — Pour tout entier positif n, f' induit une injection : $f'^* \omega_Y^{\otimes n} \hookrightarrow \omega_{X'}^{\otimes n}$. On a donc :

$$h^0(X', f'^*(nK_Y) \leqslant h^0(X', nK_{X'}) = h^0(X_0, nK_{X_0}).$$

Par la dualité de Serre, on sait que :

$$H^1(nK_{X_0})\simeq[H^1((1-n)K_{X_0})] \ ,$$

qui est nul d'après le théorème d'annulation de RAMANUJAM [13], car K_{X_0} est un diviseur numériquement positif.

D'autre part, pour tout diviseur numériquement positif D sur une surface projective lisse S :

$$H^2(S, nD)\simeq[H^0(S, K_S-nD)]^{\check{}}$$

est nul pour $n\gg 0$. En effet, sinon, il existerait pour une grande valeur de n un diviseur effectif linéairement équivalent à $K_{X'}-nD$, on aurait donc $D.(K_{X'}-nD)\leqslant 0$ ce qui est impossible si n est assez grand, puisque D^2 est strictement positif.

En particulier, on a pour $n\gg 0$:

$$h^2(X_0, nK_{X_0})=h^2(X', nf'^*(K_Y))=0.$$

et :

$$h^0(X_0, nK_{X_0})\sim\frac{n^2}{2}K_{X_0}^2,$$

$$h^0(X', nf'^*(K_Y))\geqslant\chi(X', nf'^*(K_Y))\sim\frac{n^2}{2}(f'^*(K_Y))^2=\frac{n^2}{2}(\deg f')K_Y^2$$

$$=\frac{n^2}{2}(\deg f)K_Y^2$$

ce qui entraîne l'inégalité cherchée.

LEMME 2. — *Si C_1 et C_2 sont des courbes sur X', on a :*

$$Z'.(C_1\times C_2)=f'_*C_1.f'_*C_2=C_1.f'^*f'_*C_2.$$

Démonstration. — On a : $Z'=(f'\times f')^*\Delta_Y$. D'où la suite d'égalités :

$$Z'.(C_1\times C_2)=(f'\times f')^*\Delta_Y.(C_1\times C_2)=\Delta_Y.(f'\times f')_*(C_1\times C_2)$$
$$=f'_*C_1.f'_*C_2=C_1.f'^*f'_*C_2.$$

LEMME 3. — *Il existe un entier n ne dépendant que de X tel que pour tout couple (Y,f) de $\mathbf{E}$, Z' étant défini comme ci-dessus, on ait :*

$$Z'.(H'\times H')\leqslant Z'.(f'^*nK_Y\times f'^*nK_Y)=n^2(\deg f)^2K_Y^2.$$

Démonstration. — On a : $K_{X'} = f'^* K_Y + D$, où D est un diviseur effectif.

Choisissons une section hyperplane H telle que $H' = \sigma^* H$ coupe proprement D et évite les points éclatés par σ.

De la suite exacte :

$$0 \to \mathbf{O}_{X'}(f'^* nK_Y - H') \to \mathbf{O}_{X'}(f'^* nK_Y) \to \mathbf{O}_{H'}(f'^* nK_Y|_H) \to 0$$

et de la suite exacte de cohomologie associée, on déduit :

$$\begin{aligned} h^0(X', f'^* nK_Y - H') &\geqslant h^0(X', f'^* nK_Y) - h^0(H', f'^* nK_Y|_{H'}) \\ &\geqslant h^0(Y, nK_Y) - h^0(H', nK_{X'}|_{H'}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^0(X', f'^* nK_Y - H') &\geqslant \frac{n(n-1)}{2} K_Y^2 + 1 - q(Y) + p(Y) - h^0(H, nK_X|_H) \\ &\geqslant \frac{n(n-1)}{2} + 1 - q(X) - \mathcal{O}(n), \end{aligned}$$

le dernier $\mathcal{O}(n)$ ne dépendant que de X.

Pour n assez grand (ne dépassant pas de Y), l'espace $H^0(X', f'^* nK_Y - H')$ n'est pas nul, et il existe un diviseur effectif C tel que $f'^* nK_Y$ soit linéairement équivalent à $C + H'$. On a :

$$Z'.(f'^* nK_Y \times f'^* nK_Y) = Z'.(H' \times H') + Z'.(C \times H') + Z'.(f'^* nK_Y \times C).$$

On sait que :

$$Z'.(C \times H') = f'^* f'_* C . H' \geqslant 0$$

parce que H est numériquement positif :

$$Z'.(f'^* nK_Y \times C) = nf'_* f'^* K_Y . f'_* C = n(\deg f)\, K_Y . f'_* C \geqslant 0.$$

parce que K_Y est numériquement positif.

Enfin :

$$Z'.(f'^* n K_Y \times f'^* n K_Y) = n^2 (f'_* f'^* K_Y . f'_* f'^* K_Y) = n^2 (\deg f)^2 K_Y^2.$$

II. Étude infinitésimale

Soit $\mathbf{E}'$ le sous-ensemble de $\mathbf{E}$ formé des classes dont il existe un représentant (Y, f) tel que f soit un morphisme. On montre dans cette partie, grâce à la théorie des déformations, que $\mathbf{E}'$ est fini.

PROPOSITION 3. — *Les composantes de* $\mathbf{H}$ *qui contiennent l'image de* $\mathbf{E}'$ *sont des points réduits.*

En d'autres termes, la surface Z associée à un couple (Y, f) de $\mathbf{E}'$ ne peut pas « bouger » dans $X \times X$.

Démonstration. — Soit (Y, f) la classe d'un élément de $\mathbf{E}'$. Comme dans la partie I, Z est la partie « générique » de $X \times_Y X$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] & X \times_Y X \arrow[r, hook] & X \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

On note : $g = fp_1|_{X \times_Y X} = fp_2|_{X \times_Y X}$.

Soit I (resp. I') le faisceau d'idéaux qui définit Z (resp. $X \times_Y X$) dans $X \times X$. Le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"] & X \times X \arrow[d, "f \times f"] \\ Y \simeq \Delta_Y \arrow[r, hook] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

et l'homomorphisme canonique de $\mathbf{O}_{X \times_Y X}$-modules $g^* \Omega_Y^1 \to I'/I'^2$ est un isomorphisme.

D'autre part, il existe une flèche de $\mathbf{O}_Z$-modules : $(I'/I'^2) \otimes \mathbf{O}_Z \to I/I^2$, non nulle sur un ouvert partout dense de Z, d'où une flèche de $\mathbf{O}_Z$-modules : $g^* \Omega_Y^1 \to I/I^2$ non nulle sur un ouvert partout dense de Z.

Les déformations infinitésimales de Z dans $X \times X$ sont paramétrées par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_Z}(I/I^2, \mathbf{O}_Z)$ [9]. Si cet espace vectoriel n'est pas nul, il existe sur une composante T de Z une flèche non nulle : $(I/I^2) \otimes \mathbf{O}_T \to \mathbf{O}_T$, donc une flèche non nulle : $g^* \Omega_Y^1 \to \mathbf{O}_T$ (où l'on a encore noté g la restriction de g à T).

Par Koszul, on obtient une flèche non nulle $g^* \omega_Y \to g^* \Omega_Y^1$, ce qui permet d'identifier $g^* \omega_Y$ à un sous-faisceau inversible de Ω_T^1.

Or, pour $n \gg 0$, on a :

$$h^0(g^* \omega_Y^{\otimes n}) \geqslant h^0(nK_Y) \sim \frac{n^2}{2} K_Y^2.$$

Par ailleurs, on connaît le théorème suivant :

THÉORÈME [15]. — *Soit S une surface propre et irréductible sur un corps de caractéristique nulle, et soit L un sous-faisceau inversible de Ω_S^1. Alors, $h^0(L^{\otimes n}) \leqslant O(n)$.*

Il est donc impossible d'identifier $g^* \omega_{\tilde{Y}}$ à un sous-faisceau inversible de Ω_T^1. L'espace des déformations infinitésimales de Z dans $X \times X$ est nul. Compte tenu de la proposition 2, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit X une surface projective lisse sur un corps de caractéristique nulle.*

Il n'y a, à équivalence birationnelle près, qu'un nombre fini de surfaces projectives, lisses de type général, telles qu'il existe un morphisme surjectif $X \to Y$.

On rappelle que pour chacune de ces surfaces Y, l'ensemble des applications rationnelles dominantes (*a fortiori* celui des morphismes surjectifs) de X dans Y est fini.

COROLLAIRE. — *Soit X une surface projective lisse sur un corps de caractéristique nulle.*

Il n'y a, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de surfaces projectives lisses, de type général, telles qu'il existe un morphisme surjectif $X \to Y$.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que si Y est minimale, et si f est un morphisme $X \to Y$, il n'y a qu'un nombre fini de morphismes birationnels $\varepsilon : Y' \to Y$, à travers lesquels f se factorise. On sait que ε est un composé d'éclatements $Y' = Y_n \to \ldots Y_2 \to Y_1 \to Y$; il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour Y_1, puisque les points de Y qu'on éclate sont images de courbes de X. De même, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $Y_2, \ldots, Y_n$. Enfin, le nombre n des éclatements est borné par le rang du groupe de Néron-Severi de X.

Remarque. — Le théorème 1 ne résoud qu'une partie du problème posé (trouver pour les surfaces un théorème « type Séveri »). On peut en effet donner un exemple d'une application rationnelle dominante $X \ldots \to Y$, où Y est une surface minimale de type général, et f n'est pas un morphisme.

Exemple (inspiré d'un exposé de A. Beauville, Angers 1979).

Soit Σ une surface de Togliatti, de degré 5, avec 31 points doubles, et soit Y la surface lisse obtenue en éclatant ces 31 points : $Y \xrightarrow{\pi} \Sigma$.

Les images réciproques des points doubles sont des diviseurs exceptionnels $E_i (i=1, 2, \ldots, 31)$, vérifiant $E_i^2=-2$ et $E_i . E_j=0$ pour $i=j$.

La surface Y est minimale, de type général, et possède les invariants suivants :

$$q=0, \qquad K_Y^2=5, \qquad \chi(\mathbf{O}_Y)=5, \qquad b_2=53.$$

De plus, $K_Y=\pi^* \mathbf{O}(1)$, donc π est l'application canonique.

Dans $\mathrm{H}^2(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, le sous-espace $(E_1, \ldots, E_{31})$ est totalement isotrope, donc de dimension inférieure ou égale à 26, et il existe un sous-ensemble I de $[1, 31]$ tel que $\sum_{i \in I} E_i \equiv 0 \pmod 2$ dans $H^2(Y, \mathbb{Z})$.

On montre que dans un tel cas (par un argument de théorie des codes) l'ensemble I a 16 ou 20 éléments, et plus précisément 16 dans le cas où Σ est une surface de Togliatti.

D'autre part, la condition $\sum_{i \in I} E_i \equiv 0 \pmod 2$ est équivalente à l'existence d'un revêtement double ramifié exactement le long des E_i, $i \in I$.

Soit donc X' un tel revêtement :

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "f"'] \\
Y \arrow[r] & \Sigma
\end{tikzcd}$$

Sur X', soit $E'_i=f'^{-1} E_i$. On a $E_i'^2=-1$. La surface X' n'est donc pas minimale, et soit X la surface obtenue en contractant les E'_i. L'application rationnelle $f=\sigma^{-1} f'$ n'est pas définie aux images des E'_i.

Remarquons enfin que par contre l'application composée $X \ldots \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} \Sigma$ est un morphisme.

III. Variation de la structure de Hodge et de la variété de Picard

Définissons le foncteur **F** qui à tout k-schéma S associe l'ensemble $\mathbf{F}(S)$ des couples $(\mathbf{Y}, f)$, où $\mathbf{Y}$ est une famille de surfaces projectives lisses, de type,général, sur S, et f une S-application rationnelle dominante fibre par fibre, de $X \times S$ dans $\mathbf{Y}$, modulo équivalence birationnelle.

Les opérations et techniques utilisées dans les parties I et II n'étant pas fonctorielles, nous nous étions bornées à l'étude de $\mathbf{E} = \mathbf{F}(k)$. Nous utiliserons ici l'aspect fonctoriel de la définition, ceci sans essayer de représenter le foncteur **F** (ce qui ne nous semble pas possible).

PROPOSITION 4. — *Si l'ensemble* **E** *est infini, il contient une sous-famille algébrique infinie.*

Démonstration. — Fixons un entier N supérieur ou égal à 5, ce qui entraîne que pour toute surface lisse S, de type général, l'application N-canonique de S dans $\mathbb{P}(H^0(\omega_S^{\otimes N}))$ est un morphisme birationnel de S sur son image [1].

Si **E** est infini, il existe un entier n strictement positif tel que l'ensemble $\mathbf{E}_n$ dont la définition suit est infini :

$$\mathbf{E}_n = \{(Y, f) \in \mathbf{E} \mid h^0(\omega_Y^{\otimes V}) = n+1\} / \text{équivalence birationnelle.}$$

Soit G la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $n+1$ de $H^0(\omega_X^{\otimes \Lambda}) = E$. On définit une application injective $\psi : \mathbf{E}_n \to G$ en associant au couple (Y, f) l'image de l'application linéaire induite par l'application f :

$$df : \quad H^0(\omega_Y^{\otimes N}) \to H^0(\omega_X^{\otimes N}).$$

Soit G^0 un sous-schéma fermé de G, minimal pour la propriété de contenir une infinité de points de $\psi(E_n)$. Par construction, G^0 est intègre, de dimension au moins égale à 1, et $\psi(\mathbf{E}_n)$ est dense dans G^0.

Soit S un ouvert de G^0 sur lequel le sous-fibré universel de rang $n+1$ de $E \otimes \mathbf{O}_G$ est libre. On a une injection $\mathbf{O}_S^{n+1} \hookrightarrow E \otimes \mathbf{O}_G$, d'où une flèche $\mathbb{P}(E) \times S \cdots \xrightarrow{\lambda} \mathbb{P}^n \times S$, et la flèche composée :

$$X \times S \xrightarrow{\varphi_N \times S} \mathbb{P}(E) \times S \cdots \xrightarrow{\lambda} \mathbb{P}^n \times S.$$

Il existe un S-schéma $\mathbf{X}$, un morphisme $\sigma : \mathbf{X} \to X \times S$ projectif et birationnel, tel que l'application composée $\lambda(\varphi_N \times S)\sigma$ soit un morphisme de X dans $\mathbb{P}^n \times S$. Soit $\mathbf{Y}'$ son image et soit $\mathbf{Y}$ un modèle lisse de $\mathbf{Y}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & X \times S \arrow[r, "\varphi_N \times S"] & \mathbb{P}(E) \times S \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\
& \mathbf{Y}' \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^N \times S \\
\mathbf{Y} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Par construction, f est une S-application rationnelle $X \times S \cdots \to \mathbf{Y}$, dominante fibre par fibre, quitte à restreindre S, et, pour un ensemble dense de points s de S, l'image de f_s est une surface de type général. Pour conclure, on utilise le lemme suivant [6] :

LEMME. — *Soit* $\mathbf{Y} \xrightarrow{q} S$ *une famille de surfaces projectives et lisses, telle que l'ensemble des points s de S dont la fibre est une surface de type général soit dense dans S. Alors, toutes les surfaces Y_s sont de type général.*

Dans les démonstrations des prochains théorèmes, le résultat technique suivant sera nécessaire :

PROPOSITION 5. — *Soit Z une variété projective de dimension* 1 *ou* 2, *et soit* $u : X \cdots \to Z$ *une application rationnelle dominante.*

L'ensemble des couples (Y,f) de $\mathbf{E}$ *tels qu'il existe une application rationnelle* $v : Y \cdots \to Z$ *avec* $vf = u$, *est fini.*

Démonstration. — Quitte à remplacer X par une surface qui la domine et à bien choisir le représentant dans la classe de (Y,f) on peut supposer que u et v sont des morphismes :

(a) si Z est une surface : on a l'inclusion des corps de fonctions rationnelles $k(Z) \subset k(Y) \subset k(X)$, et le résultat est une conséquence de la finitude de l'ensemble des sous-corps de $k(X)$ contenant $k(Z)$;

(b) si Z est une courbe : soit $C = \operatorname{Spec} u_* \mathbf{O}_X$. On a la factorisation de Stein de u :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & Z \\
& C \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit K (resp. L) le corps des fonctions rationnelles de Z (resp. C).

En remplaçant éventuellement X par une surface qui la domine, on peut supposer que L est galoisienne sur K.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, dashed] & & Y \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[rr] & Y' = Y \times_Z C \arrow[l] \arrow[ur] & Z \end{tikzcd}$$

D'après le théorème de Séveri pour les courbes appliqué à la courbe $X \times_C L$, il n'y a qu'un nombre fini de courbes $Y \times_Z L$ de genre au moins 2 sur L, et pour chaque $Y \times_Z L$ un nombre fini de flèches $X \times_C L \to Y \times_Z L$. On peut donc supposer que la classe de birationalité de Y' est fixée.

La classe de birationalité de Y est définie de manière unique par la donnée du groupe de Galois de l'extension (galoisienne) $k(Y) \subset k(Y')$. Or il n'y a qu'un nombre fini de tels groupes, puisque ce sont des sous-groupes du groupe des k-automorphismes birationnels de la surface de type général Y', qui est fini.

L'étude de la variation de la structure de Hodge de Y en bidegré (0,2) va nous permettre maintenant de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit X une surface projective et lisse.*

Les surfaces de type général Y, projectives et lisses, de genre géométrique p_g supérieur ou égal à 2, telles qu'il existe une application rationnelle dominante $X \cdots \to Y$, modulo équivalence birationnelle, sont en nombre fini.

Démonstration. — Supposons qu'il y en ait une infinité. Alors, d'après la proposition 4, il existe un schéma intègre S, de dimension au moins 1, une famille $\mathbf{Y} \xrightarrow{q} S$ de surfaces de type général, dont une infinité correspondent à des éléments deux à deux distincts de $\mathbf{E}$, tels que p_g soit au moins égal à 2.

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbf{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathbf{X} \xrightarrow{\sigma} X \times S$ un éclatement qui supprime l'indétermination de f, et soit $p' = p\sigma$.

Soit $(R^2 q_* \mathbb{Q})^0$ le plus grand sous-système local constant du système local $R^2 q_* \mathbb{Q}$. D'après les résultats de DELIGNE [4], on sait que $H^0(S, R^2 q_* \mathbb{Q})$ possède une structure de Hodge telle que, pour tout point s de S, la flèche :

$$H^0(S, R^2 q_* \mathbb{Q}) \simeq (R^2 q_* \mathbb{Q})^0_s \subseteq (R^2 q_* \mathbb{Q})_s \simeq H^2(\mathbf{Y}_s, \mathbb{Q}),$$

soit un morphisme de structures de Hodge.

Il en est de même en remplaçant $\mathbf{Y}$ par $\mathbf{X}$, puis par $X \times S$. Ce qui donne, pour tout couple d'entiers (p, q) tels que $p+q=2$, en notant $[V]^{p,q}$ la composante (p, q) de l'espace vectoriel V muni d'une structure de Hodge :

$$\begin{array}{ccccccc}
[H^0(S, R^2 q_* \mathbb{C})]^{p,q} & \simeq & [(R^2 q_* \mathbb{C})^0_s]^{p,q} & \subset & [(R^2 q_* \mathbb{C}_s)]^{p,q} & \simeq & H^{p,q}(\mathbf{Y}_s) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[H^0(S, R^2 p'_* \mathbb{C})]^{p,q} & \simeq & [(R^2 p'_* \mathbb{C})^0_s]^{p,q} & \subset & [(R^2 p'_* \mathbb{C}_s)]^{p,q} & \simeq & H^{p,q}(\mathbf{X}_s) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
[H^0(S, R^2 p_* \mathbb{C})]^{p,q} & \simeq & [(R^2 p_* \mathbb{C})^0_s]^{p,q} & = & [(R^2 p_* \mathbb{C}_s)]^{p,q} & \simeq & H^{p,q}(X).
\end{array}$$

Quitte à restreindre S, le morphisme $\sigma_s : \mathbf{X}_s \to X$ est un éclatement pour tout point s de S. Pour $(p, q) = (0,2)$ ou $(2,0)$, les flèches $H^{p,q}(X) \to H^{p,q}(\mathbf{X}_s)$ sont donc des isomorphismes. Le système local $(R^2 p'_* \mathbb{C})^{p,q}$ est donc constant. Alors le sous-système $(R^2 q_* \mathbb{C})^{p,q}$ est aussi constant, et donc égal à $[(R^2 q_* \mathbb{C})^0]^{p,q}$.

L'image de $H^{p,q}(\mathbf{Y}_s)$ dans $H^{p,q}(X)$ est donc l'image de $H^0(S, R^2 q_* \mathbb{C})^{p,q}$, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de s.

Pour tout couple (Y, f) de E vérifiant $p_g(Y) \geq 2$, l'application linéaire $H^0(\omega_Y) \to H^0(\omega_X)$ a pour image un sous-espace vectoriel fixe V de $H^0(\omega_X)$, de dimension au moins 2. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, dashed, "u"] & P(H^0(\omega_X)) \arrow[d, dashed] \\
Y \arrow[r, dashed] & P(V)
\end{tikzcd}$$

où l'application rationnelle u est fixée, et on conclut grâce à la proposition 5.

Compte tenu de l'inégalité $q(Y) \leq p_g(Y)$, les seuls cas qui restent à étudier maintenant sont les cas :

$$q(Y)=0, \qquad p_g(Y)=0;$$
$$q(Y)=0, \qquad p_g(Y)=1;$$
$$q(Y)=1, \qquad p_g(Y)=1;$$

Le théorème qui suit permet de régler le dernier de ces cas.

THÉORÈME 3. — *Soit X une surface projective et lisse.*

Les surfaces Y, projectives et lisses, de type général, d'irrégularité strictement positive, telles qu'il existe une application rationnelle dominante $X \ldots \to Y$, modulo équivalence birationnelle, sont en nombre fini.

Démonstration. — Soit $\mathbf{Y} \to S$ une famille de surfaces de type général dont une infinité correspondent à des couples (Y, f) de $\mathbf{E}$, deux à deux distincts, avec $q(Y) \geqslant 1$.

$$\begin{tikzcd} X \times S \cdots \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbf{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

On considère le schéma de Picard relatif Pic $\mathbf{Y}/S$, qui est propre sur S, de même que sa composante neutre Pic $^0\mathbf{Y}/S$ qui est un S-schéma abélien. Pour tout point s de S, on a : $\operatorname{Pic}^0\mathbf{Y}/S \times_S k(S) = \operatorname{Pic}^0\mathbf{Y}_s/k$.

Quitte à restreindre S, l'application rationnelle $\operatorname{Pic}^0\mathbf{Y}/S \ldots \to \operatorname{Pic}^0(X \times S)/S = \operatorname{Pic}^0 X \times_k S$ est partout définie et, fibre par fibre, elle est quasi-finie, donc finie. Son image est une famille de variétés abéliennes contenue dans une variété abélienne constante. C'est donc une variété abélienne constante A.

Ceci signifie que pour tout élément (Y, f) de $\mathbf{E}$, l'homomorphisme $\operatorname{Pic}^0 Y \to \operatorname{Pic}^0 X$, qui est un morphisme fini se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Pic}^0 Y \arrow[rr] \arrow[dr, "a"'] & & \operatorname{Pic}^0 X \\ & A \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

et a est une isogénie.

Soit B la variété abélienne duale de A. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & \operatorname{Alb} X \arrow[dr] & \\ & Y'_0 \arrow[rr] \arrow[d] & & B \arrow[ddl, "b"] \\ & Y_0 & & \\ Y \arrow[ur, two heads] \arrow[rr] & & \operatorname{Alb} Y & \end{tikzcd}$$

où Y_0 est le modèle minimal de Y, et b est une isogénie.

Soit $Y'_0 = Y_0 \times_{\mathrm{Alb}\, Y} B$, qui est étale sur Y_0, donc lisse, de type général, et minimale.

L'ensemble des surfaces Y'_0 est fini d'après la proposition 5, à isomorphisme près (parce que Y'_0 est minimale).

Pour chaque Y'_0, il n'y a qu'un nombre fini de Y_0, toujours à isomorphisme près, d'après le théorème 1, d'où une contradiction.

IV. Cas où X est de dimension quelconque

THÉORÈME 4. — *Soit X une variété projective de dimension quelconque.*

Les surfaces Y, projectives et lisses, de type général, de genre géométrique $p_g(Y)$ au moins 2 ou bien d'irrégularité strictement positive, telles qu'il existe une application rationnelle dominante $X \ldots \to Y$, sont en nombre fini modulo équivalence birationnelle.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la dimension de X.

Si dim $X = 2$, c'est ce qui a été prouvé dans les parties précédentes.

Si dim $X \geqslant 3$, il suffit de montrer le théorème sur une extension quelconque de k, on peut donc supposer k non dénombrable.

Soit $j : X \subsetneq \mathbb{P}^N = P$ un plongement projectif fixé de X. La récurrence est basée sur le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — *S'il existe une infinité de couples $(Y_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Y_n est une surface de type général, f_n une application rationnelle dominante de X dans Y_n non deux à deux birationnellement équivalents, alors il existe une section hyperplane $H \cap X$ de X, lisse irréductible, telle que pour tout n, f_n définisse une application rationnelle dominante de $H \cap X$ dans Y_n.*

Démonstration. — Soit $\check{P}$ l'espace projectif dual de P, et soit $\mathbf{H}$ l'hyperplan universel de $P \times \check{P}$.

$$\mathbf{H} = \{(x, H) \mid x \in P,\ H \in \check{P},\ x \in H\},$$

$$X_{\mathbf{H}} = X \times_P \mathbf{H} = \{(x, H) \mid x \in P,\ H \in \check{P},\ x \in H \cap X\}$$

est la variété d'incidence.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \check{P} \\
X_{\mathbf{H}} \arrow[r, hook] \arrow[rrru, "u"] \arrow[d] & \mathbf{H} \arrow[r, hook] & P\times\check{P} \arrow[ru] \arrow[d] & \\
X \arrow[rr, hook] & & P &
\end{tikzcd}$$

Il existe un ouvert V non vide de $\check{P}$ au-dessus duquel le morphisme $u : X_{\mathbf{H}} \to \check{P}$ a des fibres lisses et irréductibles.

LEMME. — *Soit S une sous-variété intègre lisse, localement fermée, de $\check{P}$, soient Y une variété intègre lisse et $f: S \to Y$ un morphisme dominant.*

Si $\dim S > \dim Y$, *il existe un ouvert non vide de $\check{P}$ tel que pour tout point fermé H de cet ouvert, $H \cap X$ domine Y.*

Démonstration du lemme. — Soit $g : S_{\mathbf{H}} = S \times_P \mathbf{H} \to Y \times \check{P}$ le morphisme défini par $g(s, H) = (f(s), H)$. On montre que g est dominant en montrant que la restriction de g aux fibres génériques : $S_H \times_Y k(Y) \to k(Y) \times \check{P}$ est dominante.

Soient $K = k(Y)$ et $S_\eta = S \times_Y K$. On a les égalités suivantes :

$$S_{\mathbf{H}} \times_Y K = S_{\mathbf{H}} \times_S S = (S \times_P \mathbf{H}) \times_S S_\eta = S_\eta \times_P \mathbf{H} = S_\eta \times_{P\times K} (\mathbf{H} \times K).$$

On est donc ramené à démontrer sur le corps K le résultat suivant, qui est immédiat : soit S' une sous-variété intègre localement fermée de P, de dimension strictement positive. Alors $S'_H \to \check{P}$ est dominant.

Soit $\Omega^1_{S_{\mathbf{H}}/Y\times\check{P}}$ le faisceau des différentielles relatives. C'est un faisceau cohérent sur S, et il existe un ouvert non vide où il est de rang $r = \dim S - \dim(Y \times \check{P})$. Cet ouvert rencontrant la fibre générique de $S_{\mathbf{H}} \to \check{P}$, il existe un ouvert de $\check{P}$ dont il rencontre toutes les fibres.

Soit H un point de cet ouvert. Dans la suite exacte de modules de différentielles :

$$f^*(\Omega^1_Y) \xrightarrow{df} \Omega^1_{H\cap S} \to (\Omega^1_{S_{\mathbf{H}}/Y\times\check{P}})|_{H\cap S} = \Omega^1_{H\cap S/Y} \to 0$$

on a : $\operatorname{rang} \Omega^1_{H\cap S/Y} = \operatorname{rang} \Omega^1_{H\cap S} - \operatorname{rang} f^*\Omega^1_Y = r$.

L'application df est donc injective et $f|_{H\cap S}$ est dominante.

Appliquons le lemme à l'application rationnelle f_i : il existe un ouvert W_i de V tel que pour tout point H de W_i, $f_i|_{H \cap X}$ est dominante.

LEMME. — *Soit S un k-schéma intègre de type fini.*
Si k n'est pas dénombrable, et s'il existe une famille dénombrable de fermés F_n tels que :

$$\{\textit{points fermés de } S\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

$$\textit{il existe un entier } n_0 \textit{ tel que } S = F_{n_0}.$$

Démonstration du lemme. — Elle se fait par récurrence sur la dimension de S;

— si dim $S=0$, c'est immédiat;

— si dim $S \geqslant 1$, il existe une sous-variété irréductible Z de S, de codimension 1, distincte de tous les F_n.

En effet, on peut supposer S affine. Soit $S=\operatorname{Spec} A$. D'après le lemme de normalisation, A est fini sur une algèbre de polynômes $k[z_1, \ldots, z_r]$.

Au-dessus de chaque sous-variété linéaire de codimension 1 de $\operatorname{Spec} k[z_1, \ldots, z_r]$, il y a une sous-variété de codimension 1 de S. Il existe donc un ensemble non dénombrable de sous-variétés de codimension 1 de S.

L'ensemble des points fermés de Z est contenu dans la réunion des F_n. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier n_0 tel que Z soit contenu dans F_{n_0}. Pour des raisons de dimension, $S=F_{n_0}$.

Appliquons ce lemme à V : il existe un hyperplan H correspondant à un point fermé de $V - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (V - W_m)$. Soit $X' = H \cap X$, qui est une sous-variété lisse, irréductible, de codimension 1. Par construction, la restriction de f_n à X' est une application rationnelle dominante de X' dans Y_n, ceci pour tout entier n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (E.). — Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 42, 1973.

[2] BURNS (D.) et WAHL (J.). — Local contribution to global deformations of surfaces, *Inv. Math.*, vol. 26, 1974.

[3] CHEVALLEY (C.), GROTHENDIECK (A.) et SERRE (J.-P.). — Anneaux de Chow et Applications, *Séminaire Chevalley*, 1958.

[4] DELIGNE (P.), Theorie de Hodge II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 40, 1974.

[5] GROTHENDIECK (A.), Fondements de la Géométrie Algébrique. Les schémas de Hilbert, *Séminaire Bourbaki*, n° 221; les schémas de Picard. Propriétés générales, *Séminaire Bourbaki*, n° 236.
[6] IITAKA, Deformations of complex compact surfaces II, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 22, 1970.
[7] KOBAYASHI (S.) et OCHIAI (T.). — Meromorphic mappings onto complex spaces of general type, *Inv. Math.*, vol. 31, 1975.
[8] KODAIRA (K.). — Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 20, 1968.
[9] KODAIRA (K.) et SPENCER (D.). — On deformations of complex analytic structures, *Ann. of Math.*, vol. 67, 1958.
[10] MARTIN-DESCHAMPS (M.) et LEWIN-MENEGAUX (R.). — Applications rationnelles séparables et dominantes sur une variété de type général, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 106, 1978.
[11] MATSUMURA (H.). — On algebraic groups of birational transformation, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, Série 8, t. 34, 1963.
[12] SAMUEL (P.). — *On old and new results on algebraic curves*, Tata Institute of Fondamental Research, Bombay, 1966.
[13] RAMANUJAM (C.-P.). — Remarks on the Kodaira vanishing Theorem, *Journal of the Indian Math. Soc.*, vol. 36, 1972; « supplément » au précédent, *Journal of the Indian Math. Soc.*, vol. 38, 1974.
[14] SHAFFAREVITCH (R.). — Algebraic Surfaces, *Proc. of the Steklov Institute*, vol. 75, 1965.
[15] VAN DE VEN (A.). — *Séminaire Bourbaki*, n° 500.
[16] SCHLESSINGER (M.). — Rigidity of quotient singularities, *Inv. Math.*, vol. 14, 1971.