BULLETIN DE LA S. M. F.

LIONEL SCHWARTZ

# Opérations d'Adams en K-homologie et applications

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 109 (1981), p. 237-257
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__237_0>

*Bull. Soc. math. France,*
109, 1981, p. 237-257.

# OPÉRATIONS D'ADAMS EN $K$-HOMOLOGIE ET APPLICATIONS

PAR

LIONEL SCHWARTZ (*)

RÉSUMÉ. — On étudie l'action des opérations d'ADAMS sur l'algèbre de Pontryagin $K_*(\mathbf{CP}^\infty)$ (resp. sur $K_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$ afin de calculer l'algèbre $(\mathbf{KF}_q)_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$. On donnera par ailleurs des applications à $\pi^s_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$.

ABSTRACT. — I study the action of the ADAMS operations on the Pontryagin algebra $K_*(\mathbf{CP}^\infty)$ (resp. on $K_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$). I deduce from that the structure of the algebra $(\mathbf{KF}_q)_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$. I shall give elsewhere applications to $\pi^s_*(\mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}/l)$.

## 0. Introduction

Dans cet article, on étudie l'algèbre de Pontryagin de $\mathbb{CP}^\infty$ en $K$-homologie et en $K$-homologie modulo $l$, on en tire des conséquences pour la structure multiplicative de la partie libre de l'homotopie stable de $\mathbb{CP}^\infty$ et de $BU$ (polynômiale en un générateur dans le premier cas).

Puis on étudie l'action des opérations d'ADAMS homologiques en $K$-homologie modulo $l$, afin de calculer l'algèbre de Pontryagin $(\mathbb{KF}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, où $(\mathbb{KF}_q)_*(-)$ est la théorie homologique associée à un délaçage de $\mathbb{Z}\times BGL(\mathbb{F}_q)^+$, $(\mathbb{KF}_q)_*(-, \mathbb{Z}/l)$ la théorie à coefficient associée ($l$ est premier impair). On donnera dans un article ultérieur des applications à la $l$-torsion de l'homotopie stable de $\mathbb{CP}^\infty$ et de $BU$. KNAPP a obtenu dans [6] des résultats analogues par des méthodes différentes.

(*) Texte reçu le 2 juin 1980, révisé le 8 décembre 1980.

Lionel SCHWARTZ, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, Département de Mathématique, 91405 Orsay.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/237/\$ 5.00

## 1. Structure de l'algèbre de Pontryagin $K_*(\mathbb{CP}^\infty)$

On sait que l'algèbre $K^*(\mathbb{CP}^n)$ (resp. $K^*(\mathbb{CP}^\infty)$), est isomorphe à $K^*(pt)[T]/(T^{n+1})$ (resp. $K^*(pt)[[T]]$), où $T=\eta_n^*-1$ ($\eta_n$ désignant le fibré de Hopf sur $\mathbb{CP}^n$). La loi de $H$-espace sur $\mathbb{CP}^\infty$ induit une comultiplication sur $K^*(\mathbb{CP}^\infty)$ compatible avec le cup-produit, on a donc une structure de bigèbre sur $K^*(\mathbb{CP}^\infty)$. Si on note $\Delta$ la loi de $H$-espace de $\mathbb{CP}^\infty$ la comultiplication est déterminée par :

$$(1) \qquad \Delta^* T = T\otimes 1 + 1\otimes T + T\otimes T.$$

Ce qui identifie $K^0(\mathbb{CP}^\infty)$ avec le dual de la bigèdre du groupe formel multiplicatif sur $\mathbb{Z}$ (défini par $F(X, Y)=X+Y+X.Y$).

Le théorème des coefficients universels d'ANDERSON [2] identifie naturellement $K_0(\mathbb{CP}^\infty)$ à l'ensemble des homomorphismes continus, pour la topologie $T$-adique, de $K^0(\mathbb{CP}^\infty)$ dans $\mathbb{Z}$. Il permet donc de décrire $K_0(\mathbb{CP}^\infty)$ comme la bigèbre du groupe formel multiplicatif sur $\mathbb{Z}$. Soit $(\alpha_i, i\geqslant 0)$ la base, du $\mathbb{Z}$-module libre $K_0(\mathbb{CP}^\infty)$, déterminée par :

$$\langle T^j, \alpha_i\rangle = \delta_{i,j},$$

$\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit de Kronecker. Énonçons alors :

LEMME 1. — *La bigèbre du groupe formel multiplicatif est isomorphe à la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre (et en fait au sous-$\mathbb{Z}$-module) de $\mathbb{Q}[X]$ engendrée par les polynômes $C_X^i = X(X-1)\ldots(X-i+1)/i!$. La comultiplication $m$ est déterminée par :*

$$m(C_X^i) = \textstyle\sum_{k+l=i} C_X^k \otimes C_X^l.$$

LEMME 2. — *L'application de $\mathbb{Z}$-module de $K_0(\mathbb{CP}^\infty)$ dans la bigèbre du groupe formel multiplicatif déterminée par $\alpha_i$ donne $C_X^i$ est un isomorphisme de bigèbre.*

*Démonstration* (lemme 1). — On rappelle que la bigèbre duale d'un groupe formel $F$ (défini sur $\mathbb{Z}$), est l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}[[T]]$ muni de la comultiplication $\Delta_F$ déterminée par :

$$\Delta_F(T) = F(T\otimes 1, 1\otimes T).$$

On considère alors la sous-algèbre $A$ de $\mathbb{Q}[X]$ engendrée par les $C_X^i$, c'est-à-dire la sous-algèbre des polynômes prenant des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$, dont on sait que les $C_X^i$ constituent une $\mathbb{Z}$-base. On peut alors définir un accouplement par :

$$\alpha: \quad \mathbb{Z}[[T]] \otimes A \to \mathbb{Z},$$
$$\alpha(T^j, C_X^i) = \delta_{i,j}.$$

La démonstration du lemme se réduit alors à vérifier que $\alpha$ commute aux multiplications et comultiplications respectives de $\mathbb{Z}[[T]]$ et $A$, c'est-à-dire que :

$$\forall i, j, k, \quad \alpha((T\otimes 1 + 1\otimes T + T\otimes T)^k, C_X^i \otimes C_X^j) = \alpha(T^k, C_X^i . C_X^j).$$

Pour cela il suffit de calculer le coefficient de $C_X^k$ dans la décomposition de $C_X^i . C_X^j$ sur la base des $C_X^h$ et celui de $T^i \otimes T^j$ dans $(T\otimes 1 + 1\otimes T + T\otimes T)^k$. Soit $(1+T)^X$ la série formelle, à coefficients dans $A$, $\sum_{i\geq 0} C_X^i . T^i$. De l'identité formelle suivante :

$$(1 + 1\otimes T)^X . (1 + T\otimes 1)^X = (1 + 1\otimes T + T\otimes 1 + T\otimes T)^X,$$

on déduit, en calculant le coefficient de $T^i \otimes T^j$, la formule :

$$C_X^i . C_X^j = \sum_h C_h^{i+j-h} . C_{2h-i-j}^{h-j} . C_X^h, \tag{2}$$

où $h$ varie de sup $(i, j)$ à $i+j$. Par ailleurs dans le développement de $(T\otimes 1 + 1\otimes T + T\otimes T)^k$ le coefficient de $T^i \otimes T^j$ est $C_k^{k-j} . C_j^{i+j-k}$, or :

$$C_k^{i+j-k} . C_{2k-i-j}^{k-j} = C_k^{k-j} . C_j^{i+j-k} = k!/(k-i)!(k-j)!(i+j-k)!$$

On en déduit le résultat ainsi que le lemme 2. Cette démonstration implicite dans les notes d'ADAMS [1] (*a*), (*voir* aussi [12]) m'a été indiquée par L. Breen. Snaith obtient la formule (2) dans [9] (*a*). On peut alors énoncer, en notant $u \in K_2(pt)$ l'élément de Bott :

PROPOSITION 1. — *L'algèbre de Pontryagin $K_*(\mathbb{CP}^\infty)$ est isomorphe à la sous-$\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$-algèbre (qui est égale au sous-$\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$-module), de $\mathbb{Q}[u, u^{-1}][X]$ engendrée par les polynômes $C_X^i$. L'image de $K_*(\mathbb{CP}^n)$ par l'homomorphisme induit par l'inclusion standard est le sous-$\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$-module engendré par $C_X^i$ avec $0 \leq i \leq n$.*

## 2. Les opérations d'Adams

On sait que si on localise le spectre $\underline{K}$ de la $K$-théorie complexe en dehors de $q$ (on notera $\overline{\underline{K}}$ le spectre ainsi obtenu), on peut étendre l'opération d'ADAMS $\psi^q$ en une opération stable (définie par $q^{-n}\psi^q$ au niveau du 2 $n$-ième terme du spectre $\overline{K}_{2n}=(\mathbb{Z}\times BU)(1/q))$. On peut alors définir $\psi^q$ comme opération *homologique :*

si $x\in\overline{K}_i(X)$ est représentée par :

$$f:\quad S^{2n+i}\to X^+\wedge\overline{K}_{2n},$$

$\psi^q(x)$ est représentée par :

$$S^{2n-i}\xrightarrow{f}X^+\wedge\overline{K}_{2n}\xrightarrow{I\wedge\psi^q}X^+\wedge\overline{K}_{2n}.$$

Ces opérations sont reliées aux opérations d'Adams ordinaires par le lemme suivant :

Lemme 3. — *Pour tout* $x\in\overline{K}^i(X)$ *et tout* $y\in\overline{K}_i(X)$ *on a :*

$$\langle x, y\rangle=\langle\psi^q(x), \psi^q(y)\rangle.$$

*Démonstration.* — Si $x$ est représentée par :

$$g:\quad S^{2n+i}\wedge X^+\to\overline{K}_{2n},$$

$y$ est représentée par :

$$f:\quad S^{2n+i}\to X^+\wedge\overline{K}_{2n},$$

$\langle x, y\rangle$ est représenté par :

$$S^{2n+i}\wedge S^{2n+i}\xrightarrow{I\wedge f}S^{2n+i}\wedge X^+\wedge\overline{K}_{2n}\xrightarrow{g\wedge I}\overline{K}_{2n}\wedge\overline{K}_{2n}\xrightarrow{\mu}\overline{K}_{4n},$$

où $\mu$ est la multiplication du spectre. Le produit $\langle\psi^q(x), \psi^q(y)\rangle$ est représenté par un diagramme analogue où l'on remplace $f$ par $(I\wedge\psi^q).f$ et $g$ par $\psi^q\circ g$. En tenant compte de la multiplicativité de l'opération $\psi^q$, et du fait qu'elle agit trivialement sur $K^0(pt)$ on conclut. *On en déduit en particulier que si* $\psi^q$ *est représentée dans la base* $(1, T, \ldots, T^n)$ *de* $\overline{K}^0(\mathbb{CP}^n)$ *par la matrice* $(n+1, n+1)$ $M_n$ *alors* $\psi^q$ *est représentée dans la base duale de* $\overline{K}_0(\mathbb{CP}^n)$ *par la matrice* ${}^tM_n^{-1}$. On remarquera que la matrice ${}^tM_n^{-1}$ est triangulaire supérieure car l'opération d'Adams $\psi^q$ étant naturelle respecte la filtration par les $K_*(\mathbb{CP}^l)$, $(l\leq n)$.

On va maintenant expliciter les coefficients de cette matrice :

LEMME 4. — *L'action de l'opération d'*ADAMS $\psi^q$ *dans* $\overline{K}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$ *est donnée par la formule suivante (avec* $i \geqslant 1$*) :*

$$\psi^q(C_X^i) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant i} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\, n_1, \ldots, n_k} k\,!/(\alpha_1\,! \ldots \alpha_k\,!).(C_{1/q}^{n_1})^{\alpha_1} \ldots (C_{1/q}^{n_k})^{\alpha_k}.C_X^k,$$

*où la seconde somme est prise sur tous les* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $(n_1, \ldots, n_k)$ *tels que :*

(i) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = k$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$;

(ii) $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k = i$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \geqq 0$;

(iii) $i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j$

*et* $C_{1/q}^n$ *désigne la valeur du polynôme* $C_X^n$ *en* $1/q$.

*Démonstration.* — L'opération $\psi^q$ est multiplicative pour la structure d'algèbre de Pontryagin et il est facile de voir que : $\psi^q(C_X^1) = 1/q\,.\,C_X^1$, car $\psi^q(\mathrm{T}) = \mathrm{q}\,.\,\mathrm{T} +$ degrés supérieurs. Donc on a :

$$\psi^q(C_X^i) = C_{(1/q).X}^i. \tag{3}$$

Or :

$$(1+T)^{(1/q).X} = \sum_{j \geqslant 0} C_{(1/q).X}^j\,.\,T^j = ((1+T)^{1/q})^X$$
$$= (1 + \sum_{i>0} C_{1/q}^i\,.\,T^i)\ X = 1 + \sum_{k>0} (\sum_{i>0} C_{1/q}^i\,.\,T^i)^k\,.\,C_X^k.$$

La formule s'en déduit en développant les puissances $k$-ièmes.

### 3. Applications à $\pi_*^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)/\mathrm{Tor}$ et à $\pi_*^s(BU)/\mathrm{Tor}$

On s'intéresse à la structure d'algèbre de Pontryagin de la partie libre de $\pi_*^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$, qu'on identifiera à $\pi_*^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)/\mathrm{Tor}$, Tor désignant le sous-groupe de torsion de $\pi_*^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$. On sait, grâce à la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, que :

$$\pi_i^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)/\mathrm{Tor} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On étudie alors l'image de $\pi_2^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$ dans $K_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi_2^s(S^2) \arrow[r, "0", "\simeq"'] \arrow[d, "i_*"] & \tilde{K}_2(S^2) \arrow[d, "i_*"] \\ \pi_2^s(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \arrow[r, "0"] & \tilde{K}_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \end{tikzcd}$$

où 0 est l'application universelle, $i$ l'inclusion de $S^2$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. On sait que 0 est un isomorphisme de $\pi_2^s(S^2)$ dans $\tilde{K}_2(S^2)$ et que $i_*(\tilde{K}_2(S^2))$ est un *facteur* *direct* de $\tilde{K}_2(\mathbb{CP}^\infty)$. On en déduit que $i_*$ est un isomorphisme de $\pi_2^s(S^2)$ sur $\pi_2^s(\mathbb{CP}^\infty)/\mathrm{Tor}$ et qu'un générateur de ce groupe a pour image $u.C_X^1$ dans $\tilde{K}_2(\mathbb{CP}^\infty)$. Le sous-anneau polynômial $\mathbb{Z}[u.C_X^1]$ de $\tilde{K}_*(\mathbb{CP}^\infty)$ est donc contenu dans l'image de $\pi_*^s(\mathbb{CP}^\infty)$, mais il est facile de constater que $(C_X^1)^n$ *est indivisible*, et comme ces deux groupes ont même rang en chaque degré ils sont égaux. D'où :

THÉORÈME 1. — *L'algèbre de Pontryagin $\pi_*^s(\mathbb{CP}^\infty)/\mathrm{Tor}$ est polynômiale en un générateur $\beta_1 \in \pi_2^s(\mathbb{CP}^\infty)$ et l'image de $\beta_1$ par l'application universelle dans $K_2(\mathbb{CP}^\infty)$ est $u.C_X^1$.*

Ce résultat a été prouvé par MOSHER [8] et par SNAITH [9] (*b*) par d'autres méthodes. Il peut l'être également en utilisant des techniques de transfert en considérant l'application canonique $\Omega^\infty S^\infty \mathbb{CP}^\infty \to BU$ induite par le plongement du normalisateur d'un tore maximal dans $U(n)$.

COROLLAIRE 1. — *L'image du générateur de $\pi_{2n}^s(\mathbb{CP}^\infty)/\mathrm{Tor}$ dans $\mathrm{H}_{2n}(\mathbb{CP}^\infty)$ est exactement divisible par $n\,!$.*

En effet puisque $\beta_1$ a pour image un générateur de $H_2(\mathbb{CP}^\infty)$, soit $u_1$, il suffit de calculer $(u_1)^n$ en fonction du générateur $u_n$ de $H_{2n}(\mathbb{CP}^\infty)$, or on sait que $(u_1)^n = n\,!\,u_n$.

On étudie maintenant $\pi_*^s(BU)/\mathrm{Tor}$, Tor désignant le sous-groupe de torsion. On sait grâce à la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch que :

$$\pi_i^s(BU)/\mathrm{Tor} = \begin{cases} \mathbb{Z}^{d(n)} & \text{si } i = 2n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d(n)$ est le nombre de partitions de $n$ en entiers positifs, ou encore le rang de l'espace des polynômes homogènes de degré $n$, en $n$ variables $x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de degré respectif $i$ (classes de Chern). Considérons l'application $i : \mathbb{CP}^\infty \to BU$, induite par le plongement canonique $S^1 \to U$, et notons $b_i$ l'image par $i_*$ de $C_X^i$ dans $K_0(\mathbb{CP}^\infty)$. On sait (ADAMS [1] (*b*)) que $K_*(BU)$, en tant qu'algèbre de Pontryagin. Pour la loi de $H$-espace donnée par la somme de Whitney, est isomorphe à l'algèbre polynômiale sur $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ engendrée par les $b_i$. Mais d'après le théorème 1 les éléments $i_*(u^n(C_X^1)^n)$ sont dans l'image de $\pi_*^s(BU)$ dans $K_*(BU)$. Or il est facile de voir que :

$$(C_X^1)^n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i . C_X^i \qquad \text{avec} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_n = n\,!.$$

Les éléments $i_*$ $(u^n.(C_X^1)^n)$ constituent donc une base polynômiale de $K_*(BU) \otimes \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}[u, u^{-1}]$. Étant donné leur degré on conclut qu'ils engendrent une sous-algèbre polynômiale, contenue dans l'image de $\pi_*^s(BU)$, et *ayant même rang qu'elle en chaque degré.*

On a alors :

THÉORÈME 2. — *L'algèbre de Pontryagin* $\pi_*^s(BU)/\mathrm{Tor}$ *contient l'algèbre polynômiale* $\mathbb{Z}[b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots]$, *où* $b_i = i_*(u^n.(\beta_1)^n) \in \pi_{2i}^s(BU)$ *(avec les notations définies précédemment), comme sous-algèbre de rang maximal.*

*Remarque.* — On remarquera que l'image de $\pi_*^s(\mathbb{C}P^{\infty}) \otimes \mathbb{Z}[1/q]$ (resp. de $\pi_*^s(BU) \otimes \mathbb{Z}[1/q]$), dans $\overline{K}_*(\mathbb{C}P^{\infty})$ (resp. dans $\overline{K}_*(BU)$), est constituée d'éléments invariants par l'opération d'ADAMS $\psi^q$, car $\psi^q(C_X^1) = (1/q).C_X^1$ et $\psi^q(u) = q.u$.

## 4. Éléments invariants dans $K_*(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ sous l'action de l'opération d'Adams $\psi^q$

On considère la $K$-homologie mod. $l$, dont on rappelle qu'elle est définie comme suit :

$$\tilde{K}_i(X, \mathbb{Z}/l) = \tilde{K}_{i+1}(X \wedge M_l),$$

où $M_l$ est l'espace de Moore, cône de l'application $z \mapsto z^l$ du cercle $S^1$ dans lui-même. De la cofibration $S^1 \overset{l}{\mapsto} S^1 \mapsto M_l$ on déduit la suite exacte :

$$(4) \qquad K_i(X, \mathbb{Z}/l) \overset{\beta}{\mapsto} K_{i-1}(X) \overset{l}{\mapsto} K_{i-1}(X) \overset{r}{\mapsto} K_{i-1}(X, \mathbb{Z}/l),$$

où $\beta$ est l'homomorphisme de Bockstein et $r$ la réduction modulo $l$. L'opération d'ADAMS $\psi^q$ agit sur cette théorie pourvu que $q$ soit premier à $l$ ($q$ étant alors inversible dans $\mathbb{Z}/l$ on peut stabiliser l'opération ainsi qu'il a été indiqué au 2). On supposera dans la suite que *$l$ est un nombre premier impair* et que *$q$ est une puissance d'un nombre premier distinct de $l$.* Sous l'hypothèse $l$ premier impair le spectre ainsi obtenu est multiplicatif ([10], [4] et appendice 1). Le groupe $K_*(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ a alors naturellement un produit de Pontryagin compatible a celui de $K_*(\mathbb{C}P^{\infty})$, et les opérations d'ADAMS sont multiplicatives, leur action étant donnée par le lemme 4. Dans la suite et jusqu'à nouvel ordre on se placera dans le cas où $l$ divise $q-1$ mais $l^2$ ne divise pas $q-1$. Par abus de notation on désignera par $C_X^i$ aussi bien l'élément de $K_*(\mathbb{C}P^{\infty})$ que son image par l'homomorphisme d'algèbre $r$ dans $K_*(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$. On notera enfin que $r$ est surjectif. On a alors :

LEMME 5. — *Les éléments* $C_X^1, C_X^2, \ldots, C_X^{l-1}$ *de* $K_0(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ *sont invariants par* $\psi^q$.

LEMME 6. — *Les éléments :*

$$P_{\lambda,h}(X)=\sum_{\lambda l^h\leqslant i\leqslant(\lambda+1)l^h-1}(-1)^{i+1}.C_X^i,$$

*où* $1\leqslant\lambda\leqslant l-1$, $1\leqslant h$, *de* $K_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *sont invariants par* $\psi^q$.

Le lemme 5 est immédiat, le lemme 6 sera démontré par récurrence sur $h$. Énonçons d'abord quelques résultats préliminaires :

LEMME 7. — *Soit un polynôme* $P(X)$ *élément de la* $\mathbb{Z}(1/q)$ *sous-algèbre de* $\mathbb{Q}[X]$ *engenrée par les polynômes* $C_X^i$ ($A\otimes\mathbb{Z}(1/q)$ *dans les notations du* 1). *Si* $l^{h-1}\leqslant$ *degré* $(P)<l^h$, *alors :*

$$P(X+l^h)\equiv P(X)\ (l)\quad (dans\ A\otimes\mathbb{Z}(1/q)).$$

Il suffit de prouver que si $n=\alpha l^h+\beta$ avec $0\leqq\alpha\leqq l-1$, et $\beta<l^h$ alors :

$$(1+T)^{X+l^h}=\sum_i C_{X+l^h}^i.T^i=(1+T)^X(1+T)^{l^h}=(1+T)^X(1+T^{l^h})\ (l).$$

On en déduit le résultat en développant cette dernière expression.

LEMME 8. — *Soit un entier positif* $n$ *de développement* $l$*-adique* $a_0+a_1 l+\ldots+a_h l^h$ $(0\leqslant a_i\leqslant l-1)$, *alors :*

$$C_X^n\equiv C_X^{a_0}.C_X^{a_1 l}\ldots C_X^{a_h l^h}(l)\quad (dans\ A\otimes\mathbb{Z}(1/q)).$$

Il suffit de prouver que si $n=\alpha l^h+\beta$ avec $0\leqslant\alpha\leqslant l-1$, et $\beta<l^h$ alors :

$$C_X^n=C_X^{\alpha l^h}.C_X^\beta(l),$$

le résultat s'en déduira alors par récurrence. Or :

$$C_X^n=C_X^{\alpha l^h}.C_{\alpha l^h+\beta}^\beta.C_{X-\alpha l^h}^\beta,$$

mais $C_{X-\alpha l^h}^\beta\equiv C_X^\beta(l)$ (lemme 7), et $C_{\alpha l^h+\beta}^\beta\equiv C_\beta^\beta\equiv 1\ (l)$.

En notant $Q_h(X)$ le polynôme $\sum_{0\leqslant i\leqslant l^h-1}(-1)^i.C_X^i$ on a alors, en application du lemme 8, $P_{\lambda,h}(X)\equiv C_X^{\lambda l^h}.Q_h(X).(l)$.

*Démonstration du lemme* 6. — On fait une récurrence sur $h$.

(i) *Cas* $h=1$. Il résulte immédiatement du lemme 5 que le polynôme $Q_1(X)$ est invariant. Par ailleurs, si on calcule $\psi^q(C_X^{\lambda l})$, on constate que *la composante sur les* $C_X^{\mu l}.(0\leqslant\mu<\lambda\leqslant l-1)$ *est nulle*. En effet le coefficient de $C_X^{\mu l}$ dans $\psi^q(C_X^{\lambda l})$, (donné par le lemme 4), est :

$$\beta_{\mu l}=\sum_{\sum\alpha_i=\mu l;\ \sum n_i\alpha_i=\lambda l}(\mu l)!/(\alpha_1!\ldots\alpha_{\mu l}!).(C_{1/q}^{n_1})^{\alpha_1}\ldots(C_{1/q}^{n_{\mu l}})^{\alpha_{\mu l}}.$$

Du développement de $(\sum x_i)^{\mu l}$ on déduit que $(\mu^l)!/\alpha_1!\ldots\alpha_{\mu l}!$ ne peut être non nul modulo $l$ que si $l$ divise tous les $\alpha_i$. Soient $\alpha'_i$ tels que $\alpha_i = l.\alpha'_i$. On a :

$$\sum \alpha'_i = \mu \qquad \text{et} \qquad \sum n_i \alpha'_i = \lambda \qquad (0 \leqslant \mu < \lambda \leqslant l-1).$$

d'où on déduit que l'un au moins des $n_i$ est compris entre 2 et $l-1$. Le coefficient correspondant $C^{n_i}_{1/q}$ est alors nul modulo $l$. En effet, si $l$ divise $q-1$, alors $C^i_{1/q}$ est nul modulo $l$ pour $2 \leqslant i \leqslant l-1$.

On conclut alors à la nullité du coefficient $\beta_{\mu l}$.

Considérons alors les produits $C^i_X . Q_1(X)$ pour $1 \leqslant i \leqslant l-1$. Le polynôme $Q_1(X)$ prend la valeur 1 (mod $l$), pour $X = \alpha l$, la valeur 0 sinon (on calcule explicitement pour $0 \leqslant n \leqslant l$ puis on applique le lemme 7). Le polynôme $C^i_X (1 \leqslant i \leqslant l-1)$, prend lui des valeurs divisibles par $l$ si $X = \alpha l$. *Le polynôme $C^i_X . Q_1(X)$ prend donc pour toute valeur entière des valeurs divisibles par $l$, il est donc*, en tant qu'élément de l'algèbre $A$, *divisible par $l$, c'est-à-dire nul modulo $l$.*

Remarquons enfin que le coefficient de $C^{\lambda l}_X$ dans $\psi^q(C^{\lambda l}_X)$ est égal à 1 mod $l$ (dans l'hypothèse où $l$ divise $q-1$).

Formons alors $\psi^q(C^{\lambda l}_X . Q_1(X))$ :

$$\psi^q(C^{\lambda l}_X . Q_1(X)) = \psi^q(C^{\lambda l}_X) . \psi^q(Q_1(X))\ (l) = \psi^q(C^{\lambda l}_X) . Q_1(X)\ (l).$$

Mais on conclut aisément des remarques précédentes et du lemme 8 que le seul terme non nul dans le dernier produit est $C^{\lambda l}_X . Q_1(X)$. D'où le cas $h=1$.

(ii) *Récurrence*. Supposons le lemme démontré pour $h-1$. Le polynôme $Q_h(X)$ est alors invariant par $\psi^q$. En calculant $\psi^q(C^{\lambda l^h}_X)$ on démontre, de la même manière qu'au (i), que *le* coefficient de $C^{\mu l^h}_X$ est nul pour $0 \leqslant \mu < \lambda \leqslant l-1$. En effet il est donné par le lemme 4 :

$$\beta_{\mu l^h} = \sum_{\sum \alpha_i = \mu l^h;\ \sum n_i \alpha_i = \lambda l^h} (\mu l^h)!/(\alpha_1! \ldots \alpha_{\mu l^h}!) . (C^{n_1}_{1/q})^{\alpha_1} \ldots (C^{n_{\mu l^h}}_{1/q})^{\alpha_{\mu l^h}}.$$

Mais $(\mu l^h)!/\alpha_1! \ldots \alpha_{\mu l^h}!$ ne peut être non nul mod $l$ que si $l^h$ divise les $\alpha_i$. Soient alors $\alpha'_i$ tels que $\alpha_i = l^h \alpha'_i$. On a alors :

$$\sum \alpha'_i = \mu \qquad \text{et} \qquad \sum n_i \alpha'_i = \lambda \qquad (0 \leqslant \mu < \lambda \leqslant l-1).$$

On en déduit que l'un au moins des $n_i$ est compris entre 2 et $l-1$. Le coefficient correspondant $C^{n_i}_{1/q}$ est donc nul mod $l$... Ensuite on remarque que *les produits $C^i_X . Q_h(X)$ sont nuls* mod $l$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant l^h - 1$. On le démontre en remarquant que $Q_h(X)$ prend la valeur 1 pour les entiers divisibles par $l^h$, la valeur 0 sinon, et que $C_X^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant l^h - 1$ s'annule mod $l$ pour les valeurs divisibles par $l^h$, d'où le résultat. On conclut alors de façon identique au (i). Ce qui achève la démonstration du lemme 6.

On peut maintenant énoncer (sous l'hypothèse $l \mid q-1$, $l^2 \nmid q-1$) :

THÉORÈME 3. — *Les éléments $C_X^i$, pour $0 \leqslant i \leqslant l-1$, et $P_{\lambda, h}(X)$, pour $1 \leqslant h$, $1 \leqslant \lambda \leqslant l-1$, constituent une base du sous-espace des invariants de l'opération d'*ADAMS *$\psi^q$ dans $K_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$.*

Avant d'effectuer la démonstration on énoncera le :

LEMME 9. — *Soit, dans $K_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, $P(X)$ invariant sous l'action de l'opération d'*ADAMS *$\psi^q$, et tel que $P(i)$ soit nul mod $l$ pour $0 \leqslant i \leqslant l^h - 1$. Alors :*

$$P(X).C_X^{l^{h-1}}.Q_{h-1}(X) \equiv 0 \ (l).$$

On supposera que degré $(P) < l^N$ on sait alors que :

$$\begin{cases} P(n) = P(qn)(l) & \text{(invariance)}, \\ P(n + kl^N) = P(n)(l) & \text{(lemme 7)}. \end{cases}$$

Le polynôme $C_X^{l^{h-1}}.Q_{h-1}(X)$ ne prend des valeurs non nulles mod $l$ que pour les entiers $\lambda l^{h-1}$ avec $\lambda \wedge l = 1$. En effet, $Q_{h-1}(X)$ ne prend de valeurs non nulles que pour les entiers $\lambda l^{h-1}$ et $C_{\lambda l^{h-1}}^{l^{h-1}} \equiv \lambda.(l)$. Considérons alors $n = \mu l^h + \lambda l^{h-1}$, avec $1 \leqslant \lambda \leqslant l-1$ et montrons que $P(n) \equiv o(l)$. Par hypothèse $P(\lambda l^{h-1}) \equiv o(l)$, il suffit donc de montrer qu'il existe un entier $i$ tel que :

$$q^i.n = \lambda l^{h-1} \ (l^N),$$

car, par application des deux propriétés énoncées plus haut, $P(n)$ sera alors nul mod $l$.

On considère alors l'orbite de $n$, dans $\mathbb{Z}/l^N$, sous l'action du sous-groupe de $(\mathbb{Z}/l^N)^*$ engendré par $q$. Ce sous-groupe est dans l'hypothèse où $l \mid q-1$ et $l^2 \nmid q-1$ isomorphe à $\mathbb{Z}/l^{N-1}$. Le stabilisateur de $n$ est un sous-groupe d'ordre $l^h$. On en déduit que l'orbite de $n$ a $l^{N-h}$ éléments. Comme tous les éléments de cette orbite ont même réduction modulo $l^h$ et qu'il y a dans $\mathbb{Z}/l^N$ $l^{N-h}$ éléments ayant même réduction mod $l^h$ que $n$, on conclut que l'orbite est constituée des éléments ayant même réduction mod $l^h$ que $n$, ce qui implique le résultat cherché. Le polynôme $P(X).C_X^{l^{h-1}}.Q_{h-1}(X)$ prend donc toujours des valeurs nulles mod $l$, d'où le lemme.

*Démonstration du théorème.* — Soit $P(X)$ un élément de $K_0(\mathbb{C}P^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ invariant par $\psi^q$ et de degré $n$ comme polynôme :

$$P(X)=\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \beta_i . C_X^i, \qquad \beta_i \in \mathbb{Z}/l.$$

On peut supposer (lemme 5), que $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \ldots \equiv \beta_{l-1} \equiv 0$.

Mais alors (lemme 9), $C_X^1 . P(X) \equiv o(l)$. (Remarque : ce résultat n'est pas contenu dans le lemme 9 mais se démontre de façon analogue.) A l'aide de la formule $C_X^1 . C_X^j = j\, C_X^j + (j+1) . C_X^{j+1}$, que l'on déduit de la formule (2) du 1, on obtient :

$$C_X^1 . P(X) \equiv o(l) \qquad \sum_{l \leqslant i \leqslant n} (i\,\beta_i + i\,\beta_{i-1})\, C_X^i \equiv o(l)\,(\beta_{l-1} \equiv o),$$

soit $i(\beta_i + \beta_{i-1}) = o(l)$, soit encore $\beta_{\lambda l+i} = (-1)^i\, \beta_{\lambda l}(l)$ pour tout $\lambda$ et tout $i$ compris entre 1 et $l-1$. On peut donc écrire $P(X)$ sous la forme :

$$\sum_{1 \leqslant \mu \leqslant [n/l]} \beta_{\mu l} . C_X^{\mu l} . Q_1(X).$$

On peut alors retrancher le terme $\sum_{1 \leqslant \mu \leqslant l-1} \beta_{\mu l} . C_X^{\mu l} . Q_1(X)$ qui est invariant par $\psi^q$ et se décompose sur les éléments $P_{\lambda, 1}(X)$, (pour $1 \leqslant \lambda \leqslant l-1$). Formons alors le produit $P(X) . C_X^l . Q_1(X)$ et énonçons deux remarques générales :

(i) $Q_h(X) \equiv (Q_h(X))^2\, (l)$;

(ii) $C_X^{l^h} . C_X^{il^h} = i\, C_X^{il^h} + (i+1)\, C_X^{(i+1)\, l^h}\, (l)$.

La remarque (i) résulte de ce que $Q_h(X)$ prend la valeur 1 mod $l$ pour les entiers divisibles par $l^h$ la valeur 0 mod $l$ sinon, la remarque (ii) résulte elle de la formule (2) du 1.

Le produit $P(X) . C_X^l . Q_1(X)$ s'écrit donc comme suit :

$$\sum_{l \leqslant \mu \leqslant [n/l]} \mu\, (\beta_{\mu l} + \beta_{(\mu-1)\, l}) . C_X^{\mu l} . Q_1(X)\,(l),$$

il est nul d'après le lemme 9, donc :

$$\beta_{\lambda l^2 + il} = (-1)^i . \beta_{\lambda l^2}(l),$$

$\forall \lambda$ et $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant l-1$ ce qui implique que :

$$P(X) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant [n/l^2]} \beta_{\mu l^2} . C_X^{\mu l^2} . Q_2(X).$$

On remarque que la somme des termes de 1 à $l-1$ se décompose sur les $P_{\lambda, 2}(X)$, on peut donc la soustraire et recommencer le même processus...

D'une façon plus générale, *si on suppose que* $l^\alpha$ *divise* $q-1$ *et* $l^{\alpha+1}$ *ne divise pas* $q-1$, on montre de manière analogue qu'*une base du sous-espace des invariants de* $\psi^q$ *dans* $K_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *est constituée par les éléments :*

$$\begin{cases} C_X^i, & 0 \leqslant i \leqslant l^\alpha - 1, \\ C_X^{\lambda l^{\alpha+i-1}} . Q_i(X), & 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1, \quad i \geqslant 1. \end{cases}$$

## 5. Calcul de l'algèbre de Pontryagin $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$

On rappelle d'abord que la théorie homologique générale $(\mathrm{Ad}_q)_*(-)$ est obtenue a partir du spectre fibre de $\psi^q - \mathrm{I}$ du spectre de la $K$-théorie complexe localisée en dehors de $q\ \overline{K}$, dans lui même. Ce spectre est multiplicatif, l'application dans le spectre $\overline{K}$ est multiplicative. On peut alors définir, de façon analogue au 4 la théorie à coefficients $(\mathrm{Ad}_q)_*(-, \mathbb{Z}/l)$. Le spectre associé étant multiplicatif ([10], [4] et appendice 1), on a une structure d'algèbre de Pontryagin sur $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$. Les fibrations et les cofibrations étant équivalentes dans la catégorie des spectres (Adams [1] (*a*)) et appendice 2), on a pour tout espace $X$ la suite exacte :

$$(5) \qquad \to (\mathrm{Ad}_q)_i(X, \mathbb{Z}/l) \to K_i(X, \mathbb{Z}/l) \to K_i(X, \mathbb{Z}/l) \to (\mathrm{Ad}_q)_{i-1}(X, \mathbb{Z}/l).$$

En particulier pour $\mathbb{CP}^\infty$ :

$$0 \to (\mathrm{Ad}_q)_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \to K_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$$
$$\to K_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \to (\mathrm{Ad}_q)_{2i-1}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \to 0,$$

car $K_{2i-1}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ est nul. On a calculé au 4 $(\mathrm{Ad}_q)_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, il nous reste donc à calculer $(\mathrm{Ad}_q)_{2i-1}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, c'est-à-dire le conoyau de $\psi^q - I$. (On se place toujours dans le cas où $l$ divise $q-1$ et $l^2$ ne divise pas $q-1$.) On a :

Théorème 4. — *L'application* $\psi^q - I$ *de* $\tilde{K}_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *dans lui même est surjective.*

Il suffit de le montrer pour $i=0$. Soit alors $j = \lambda l^h$ avec $\lambda \wedge l = 1$ :

Lemme 10. — *Soit :*

$$\psi^q - I(C_X^j) = \textstyle\sum_{1 \leqslant k < j} \lambda_k . C_X^k(l),$$

*alors* $\lambda_k \equiv 0\,(l)$ *dès que* $l^{h+1}$ *divise* $k$.

*Démonstration du lemme.* — Le lemme 4 nous donne :

$$\lambda_k = \textstyle\sum_{\sum \alpha_i = k :\ \sum n_i \alpha_i = j} k\,!/(\alpha_1\,! \ldots \alpha_k\,!) . (C_{1/q}^{n_1})^{\alpha_1} \ldots (C_{1/q}^{n_k})^{\alpha_k}.$$

Si $k=\mu\, l^{h+1}$ le coefficient $k\,!/(\alpha_1\,!\ldots\alpha_k\,!)$ ne peut être non nul mod $l$ que si $l^{h+1}$ divise $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, ce qui entraînerait que $l^{h+1}$ diviserait $j$, ce qui est impossible.

*Démonstration du théorème* 4. — (i) On va d'abord montrer que pour tout $j$ premier à $l$ $C_X^j$ est dans l'image de $\psi^q - I$. Si on démontre que $C_X^j$ est dans l'image de $\psi^{q^{l^{h-1}}} - I$ pour un certain $h$ on aura le résultat car :

$$(\psi^q - I)^{l^{h-1}} = \psi^{q^{l^{h-1}}} - I\ (l)$$

et donc

$$\mathrm{Im}\,(\psi^q - I) \supset \mathrm{Im}\,(\psi^{q^{l^{h-1}}} - I).$$

Or si $l$ divise $q-1$ et $l^2$ ne divise pas $q-1$, $l^h$ divise $q^{l^{h-1}}-1$ et $l^{h+1}$ ne divise pas $q^{l^{h-1}}-1$. *En posant alors* $t=l^{h-1}$, on voit facilement que $C^i_{1/q}$ est nul mod $l$ dès que $2 \leqslant i \leqslant l^h - 1$ et $l^h + 2 \leqslant i \leqslant 2\,l^h - 1$. Le lemme 4 nous donne pour $l^h \leqslant k \leqslant 2\,l^h - 1$ :

$$\psi^{q^t}(C_X^k) = C_X^k + \alpha_k\, C_X^{k-l^h+1} + \beta_k\, C_X^{k-l^h}\ (l),$$

où $\alpha_k \neq 0\ (l)$ si et seulement si $k \neq -1\ (l)$, $\beta_k \neq 0\ (l)$ si et seulement si $k \neq 0\ (l)$.

De cette formule on déduit que tout $C_X^j$, pour $1 \leqslant j \leqslant l^h - 1$ et $j \wedge l = 1$, est dans l'image de $\psi^q - I$ en fait on a la formule suivante :

$$C_X^j = (1/\alpha_{j+l^h-1})\,(\psi^{q^t} - I)\,(C_X^{j+l^h-1})$$
$$+ \textstyle\sum_{1 \leqslant r \leqslant s-1} (-1)^r\, (\beta_{j+l^h-r}/\alpha_{j+l^h-1-r}) \,.\, C_X^{j+l^h-1-r}\ (l),$$

où $s$ est le reste de la division de $j$ par $l$.

(ii) On passe maintenant au cas général. On supposera avoir démontré que pour tout $j$ divisible au plus par $l^h$ $C_X^i$ est dans l'image de $\psi^q - I$. Notons alors $F_h$ le sous-espace de $\tilde{K}_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ engendré par les $C_X^i$ où $i$ est au plus divisible par $l^h$, $F_\infty$ est $\tilde{K}_0(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$. Le lemme 10 nous dit que l'application $\psi^q - I$ factorise en :

$$\begin{tikzcd}
F_\infty \arrow[r, "\psi^q - I"] \arrow[d, "\pi_h"] & F_\infty \arrow[d, "\pi_h"] \\
F_\infty / F_h \arrow[r, "\psi^q - I"] & F_\infty / F_h
\end{tikzcd}$$

Mais l'application du lemme 4 montre que $\psi^q - I$ de $F_\infty/F_h$ dans lui même est surjective sur le sous-espace $F_{h+1}/F_h$. On voit en effet à l'aide du lemme 4 que :

$$\psi^{q^{l^{h-1}}}(C_X^{kl^{h+1}}) = C_X^{kl^{h+1}} + \beta_k\, C_X^{kl^{h+1}-l^h}\ (\text{modulo } F_h),$$

où $\beta_k \not\equiv o(l)$ si et seulement si $k \not\equiv o(l)$, tout ceci pourvu que :

$$l^g \leqslant kl^{h+1} \leqslant 2\,l^g - 1.$$

Il est alors facile de raisonner comme au (i).

On peut maintenant décrire complètement l'algèbre de Pontryagin $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ dans l'hypothèse où $l$ divise $q-1$ et $l^2$ ne divise pas $q-1$. On rappelle que $(\mathrm{Ad}_q)_*(pt, \mathbb{Z}/l) = \mathbb{F}_l[u, u^{-1}] \otimes E[v]$, où $u \in (\mathrm{Ad}_q)_2(pt, \mathbb{Z}/l)$ s'envoit sur l'élément de Bott $u \in K_2(pt, \mathbb{Z}/l)$ et $v \in (\mathrm{Ad}_q)_1(pt, \mathbb{Z}/l)$ est l'image de $u$ par l'homomorphisme de Bockstein. On peut énoncer :

THÉORÈME 5. — *Pour $q-1$ divisible par $l$ mais non par $l^2$ l'algèbre de Pontryagin* $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *est isomorphe à* :

$$(\mathrm{Ad}_q)_*(pt, \mathbb{Z}/l)[X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots]/ \qquad (X_i^l = X_i,\ X_i . X_j = 0 \text{ si } i \neq j,\ v . X_i = 0),$$

*où $X_i$ est égal à $C_X^{l^i} . Q_i(X)$ pour $i \geqslant 1$, à $C_X^1$ pour $i=0$.*

*Démonstration.* — (i) les relations viennent du lemme 9, du théorème 4, et du théorème de Fermat pour $X_i^l = X_i$.

(ii) il suffit alors de vérifier que $\{X_i^\lambda,\ i \geqslant 0,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1\}$ constitue une base des invariants de $\psi^q$, mais cela résulte du théorème 3 et de la relation suivante :

$$(C_X^{l^i})^\lambda = r_\lambda\, C_X^{\lambda l^i} + (\text{degrés inférieurs}),$$

où $1 \leqslant \lambda \leqslant l-1$, $r_\lambda \neq o(l)$.

*Remarque* 1. — Il est facile de voir que $X_i^t$ $(1 \leqslant t \leqslant l-1)$, est dans l'image de $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}/l)$ dans $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ si et seulement si :

$$(t+1)\,l^i - 1 \leqslant n.$$

*Remarque* 2. — On déduit du théorème 5 que :

$$(\mathrm{Ad}_q)_{2i+1}(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Q} \oplus T_i,$$

où $T_i$ est un groupe de torsion $p$-divisible pour $p$ premier à $q$. Ces résultats se généralisent aisément au cas $l^h \mid q-1$, $l^{h+1} \nmid q-1$, mais le cas qui nous intéressera le plus est celui où *$q$ engendre les unités de $\mathbb{Z}/l^2$*, c'est-à-dire où *$l$ ne divise pas $q-1$ et $l^2$ ne divise pas $q^{l-1}-1$*. En effet il correspond à l'image du $J$-homomorphisme en $l$-torsion : le sous-groupe $(\mathrm{Im}\,J)_{(l)}$ de $\pi_i^s$ s'envoit isomorphiquement sur $(\mathrm{Ad}_q)_i\,(pt)_{(l)}$ (pour $i \geqslant 0$). *Plaçons-nous désormais dans ce cas.*

On déduit du théorème 4 que $(\mathrm{Ad}_q)_{2i+1}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ est nul. En effet $\psi^{q^{l-1}} - I$ est surjectif et comme on a :

$$\psi^{q^{l-1}} - I = (\psi^q - I)(\psi^{q^{l-2}} + \ldots + I),$$

$\psi^q - I$ est aussi surjectif. Par ailleurs, tous *les invariants de $\psi^q$ sont des invariants de $\psi^{q^{l-1}}$ et $\psi^q$ est diagonalisable sur le sous-espace engendré par les invariants de $\psi^{q^{l-1}}$*, car sa composante unipotente $y$ est triviale puisque l'on est en caractéristique $l$ et que $\psi^q$ est d'ordre $l-1$. Enfin *les polynômes $Q_i(X)$ sont invariants par $\psi^q$ mod $l$.* Ceci se voit directement car $Q_i(X)$ prend en $kl^i$ la valeur 1 mod $l$ et la valeur 0 pour tout autre entier et le polynôme $Q_i(X/q)$ prend les mêmes valeurs. On calcule alors, avec les notations du théorème 5 :

$$\psi^q(X_i) = q^{-1}.X_i(l),$$

en conséquence $\psi^q(u^h.X_i^k) = q^{h-k}\ u^h.X_i^k$ d'où on déduit qu'*une base des invariants de $\psi^q$* de $\tilde{K}_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *dans lui même est constitué par les éléments suivants :*

$$u^h.X_i^k \qquad \text{avec} \quad 1 \leqslant k \leqslant l-1 \quad \text{et} \quad l-1 \mid h-k.$$

On rappelle que si $q$ engendre $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ :

$$(\mathrm{Ad}_q)_*(pt, \mathbb{Z}/l) = \mathbb{F}_l[\alpha, \alpha^{-1}] \otimes E[\delta],$$

où $\alpha \in (\mathrm{Ad}_q)_{2(l-1)}(pt, \mathbb{Z}/l)$, $(\alpha = u^{l-1})$, et $\delta \in (\mathrm{Ad}_q)_{2l-3}(pt, \mathbb{Z}/l)$, est l'image par l'homomorphisme de Bockstein de $\alpha$.

On peut énoncer :

THÉORÈME 6. — *Si $q$ engendre $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ l'algèbre de Pontryagin $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ est isomorphe à :*

$$(\mathrm{Ad}_q)_*(pt, \mathbb{Z}/l)[Y_0, Y_1, \ldots, Y_i, \ldots]/ \\ (Y_i^l = \alpha\, Y_i,\ Y_i\, Y_j = 0 \text{ si } i \neq j,\ \delta\,.\,Y_i = 0).$$

En effet on pose $Y_i = u.X_i$ et on constate que les éléments invariants exhibés plus haut s'écrivent tous $\alpha^k.Y_i^h$ avec $1 \leqslant h \leqslant l-1$ et $k$ quelconque.

## 6. L'algèbre de Pontryagin $(\mathbb{KF}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$

Le spectre de la théorie homologique connexe associée à $(\mathrm{Ad}_q)_*(-)$ est obtenu comme fibre de l'application $\psi^q - I$ du spectre $\bar{k}$ de la $K$-théorie complexe connexe localisée en dehors de $q$ dans son revêtement 0-

connexe $\bar{k}_0$. (L'application $\psi^q - I$ de $\bar{k}$ dans $\bar{k}_0$ relève $\psi^q - I$ de $\bar{K}$ dans lui même.) Ce spectre peut être également obtenu à partir d'un délaçage de $\mathbb{Z} \times BGL(\mathbb{F}_q)^+$ ([11], [8], [7]) et on a alors, en notant $\underline{\mathbb{KF}_q}$ le spectre ainsi obtenu, la fibration de spectres suivantes ([11], [7]) :

$$\underline{\mathbb{KF}_q} \xrightarrow{\mathrm{Br}} \bar{k} \xrightarrow{\psi^q - I} \bar{k}_0, \tag{6}$$

où Br est une application de spectres multiplicatifs étendant le relèvement de Brauer.

On notera $(\mathbb{KF}_q)_*(-)$ cette théorie et $(\mathbb{KF}_q)_*(-, \mathbb{Z}/l)$ la théorie à coefficient associée ($l$ est toujours un nombre premier impair). On a pour la théorie à coefficients une fibration analogue à (6), ...

Pour calculer $(\mathbb{KF}_q)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, il suffit de remarquer que $k_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $K_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ engendrée par les classes $u^i . C_X^j$ avec $i-j \geqslant 0$, et que $(k_0)_*(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ est isomorphe au sous-module engendré par les classes $u^i . C_X^j$ avec $i-j \geqslant 1$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathbb{KF}_q)_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r] \arrow[d] & k_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r, "\psi^q - I"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Ad}_q)_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r] & K_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r, "\psi^q - I"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\psi^q - I"] & (k_0)_{2i}(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}/l) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{KF}_q)_{2i-1}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{} \arrow[r, "\psi^q - I"] & K_{2i}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

On déduit aisément de ce diagramme que :

(i) l'algèbre $(\mathbb{KF}_q)_{\mathrm{pair}}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$, qui est de dimension finie en chaque degré, s'injecte dans l'algèbre $(\mathrm{Ad}_q)_{\mathrm{pair}}(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ et admet pour base les éléments :

(a) si $l \mid q-1$ et $l^2 \nmid q-1$ :

$$u^h . X_i^\lambda \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1 \quad \text{et} \quad h+1-(\lambda+1)\, l^i \geqslant 0;$$

(b) si $q$ engendre $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ :

$$\alpha^h . Y_i^\lambda \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1 \quad \text{et} \quad (l-1)\, h+1+\lambda-(\lambda+1)\, l^i \geqslant 0.$$

(ii) les groupes impairs sont non nuls,

$$\dim_{\mathbb{F}_l}(\mathbb{KF}_q)_{2i-1}(\mathbb{CP}^{\infty}, \mathbb{Z}/l)=\dim_{\mathbb{F}_l}(\mathbb{KF}_q)_{2i}(\mathbb{CP}^{\infty}, \mathbb{Z}/l)-1,$$

On peut maintenant décrire $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(\mathbb{CP}^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ :

– si $l \mid q-1$ et $l^2 \nmid q-1$ on pose :

$$U_{i,\lambda}=u^{(\lambda+1)l^i-1}.X_i^{\lambda};$$

– si $q$ engendre $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ on pose :

$$V_{i,\lambda}=\alpha^{(\lambda+1)(l^i-1/l-1)}.Y_i^{\lambda} \qquad \text{avec} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1,$$

dans les deux cas. On a alors :

THÉORÈME 7. – *L'algèbre de Pontryagin* $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(\mathbb{CP}^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$ *est isomorphe à :*

(i) *si* $l \mid q-1$ *et* $l^2 \nmid q-1$ $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(pt, \mathbb{Z}/l)[U_{i,\lambda}\, i \geqslant 0,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1]$ *modulo les relations :*

$$U_{i,\lambda}^{\mu}=u^{(\lambda\mu-\eta)l^i+(\mu-1)(l^i-1)}.U_{i,\eta},$$

*où* $\eta$ *est le reste de la division de* $\lambda\mu$ *par* $l-1$, *sauf si* $l-1$ *divise* $\lambda\mu$ *auquel cas* $\eta$ *est égal à* $l-1$:

$$U_{i,\lambda}.U_{j,\mu}=0 \qquad \textit{dès que} \quad i \neq j.$$

(*On rappelle que* $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(pt, \mathbb{Z}/l)=\mathbb{F}_l[u]$.)

(ii) *si* $q$ *engendre* $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(pt, \mathbb{Z}/l)[V_{i,\lambda}\, i \geqslant 0,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant l-1]$ *modulo les relations :*

$$V_{i,\lambda}^{\mu}=\alpha^{((\lambda\mu-\eta)l^i+(\mu-1)(l^i-1))/(l-1)}.V_{i,\eta},$$

*où* $\eta$ *est le reste de la division de* $\lambda\mu$ *par* $l-1$, *sauf si* $l-1$ *divise* $\lambda\mu$ *auquel cas* $\eta$ *est égal à* $l-1$:

$$V_{i,\lambda}.V_{j,\mu}=0 \qquad \textit{dès que} \quad i \neq j.$$

(*On rappelle que* $(\mathbb{KF}_q)_{\text{pair}}(pt, \mathbb{Z}'l)=\mathbb{F}_l[\alpha]$.)

Le degré de $U_{i,\lambda}$ est $2(\lambda+1)l^i-2$, celui de $V_{i,\lambda}$ est aussi $2(\lambda+1)l^i-2$, et en fait ces deux classes sont égales dans $K_*(\mathbb{CP}^{\infty}, \mathbb{Z}/l)$.

COROLLAIRE 2 (KNAPP [6]). — *Si $q$ engendre $(\mathbb{Z}/l^2)^*$ la dimension sur $\mathbb{F}_l$ de $(\mathbb{K}\mathbb{F}_q)_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$, est :*

$$[\log(n+1/s+1)/\log l]+1,$$

*où $n=t(l-1)+s$ avec $0<s\leqslant l-1$.*

On n'étudiera pas les produits d'éléments de degré pair de $(\mathbb{K}\mathbb{F}_q)_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ par des éléments de degré impair, en particulier par $v$ où $\delta$. (Il est facile de voir que le produit de deux éléments de degré impair est nul.) En vue d'applications ultérieures on énoncera néanmoins deux propositions, qui seront également utiles pour l'étude de l'homomorphisme de Bockstein. On remarque que pour étudier les deux problèmes envisagés il est nécessaire de connaître les coinvariants de $\psi^q-I$. C'est-à-dire de connaître une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Im}(\psi^q-I)$ dans $(k_0)_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$. Le problème peut être reformulé comme suit : étant donné le $\mathbb{F}_l$-espace vectoriel de base $u^n.C_X^i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, trouver une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Im}(\psi^q-I)$, la source de $\psi^q-I$ étant le $\mathbb{F}_l$-espace vectoriel de base $u^n.C_X^i$, $1\leqslant i\leqslant n$.

On se contentera dans la suite d'exhiber des éléments qui ne sont pas dans $\operatorname{Im}(\psi^q-I)$.

Soit $n$ de développement $l$-adique $\sum_{0\leqslant i\leqslant h} a_i\, l^i$ avec $0\leqslant a_i\leqslant l-1$. On a alors, si $l\mid q-1$ et $l^2\nmid q-1$ :

PROPOSITION 2. — *Les éléments suivants ne sont pas, au sens précisé plus haut, dans* $\operatorname{Im}(\psi^q-I)$ :

$$u^n.C_X^{(a-j)\,l^h}\qquad pour\quad 0<j<a_h\quad (a_h\neq 0),$$

$$u^n.C_X^{a_h}\, l^h+a_{h-1}\, l^{h-1}+\ldots+(a_j-1)\, l^j+(l-1)(l^{j-1}+\ldots+l^{i+1})+\lambda\, l^i,$$

*où :*

— *$a_j\neq 0$ et $a_k=0$ pour $i\leqslant k<j$, c'est-à-dire que $j$ est le plus petit indice supérieur à $i$ tel que $a_j\neq 0$;*

— *$a_i-l+2\leqslant\lambda\leqslant a_i-1$;*

— *l'exposant est positif.*

La démonstration est un raffinement du lemme 10, nous la laissons au lecteur.

Dans le cas où $q$ engendre les unités $(\mathbb{Z}/l^2)^*$, on considère dans $k_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 1 de $\psi^q$, soit $E_n$, et $F_n$ un supplémentaire de $\operatorname{Im}(\psi^{q^{l-1}}-I)$ dans $(k_0)_{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$.

Alors il est facile de voir que $E_n \cap F_n$ est un supplémentaire de Im $(\psi^q - I)$ dans $(k_0)_{2n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$. En particulier :

PROPOSITION 3. — *Les éléments de la proposition* 2 *ne sont pas dans* Im $(\psi^q - I)$ *dès que la différence entre n et leur degré (en tant que polynôme), est divisible par* $l-1$.

## 7. Remarques sur $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}/l)$

On se propose de déterminer l'image de $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}/l)$ dans $(\mathrm{Ad}_q)_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ par l'application induite par l'injection $i$ de $\mathbb{Z}/l^n$ dans $S^1$. Pour cela on rappelle [3] que $\mathrm{K}^0(\mathrm{B}\mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}/l)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_l[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^{l^n}=0)$ où $T$ est l'image de l'élément $T$ de $K^0(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ par $Bi_*$. Ceci implique immédiatement que $K_*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}/l)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $K_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ engendrée par les $C_X^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant l^n - 1$. *Donc* $(\mathrm{Ad}_q)_{\mathrm{pair}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/l^n, \mathbb{Z}/l)$ *est isomorphe à la sous-algèbre de* $(\mathrm{Ad}_q)_{\mathrm{pair}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{Z}/l)$ *engendrée par les* $X_i$ *(resp. les* $Y_i$*) pour* $i \leqslant n-1$. On en déduit des résultats analogues pour les théories connexes associées.

## Appendice 1

Étant donnée une théorie cohomologique multiplicative $h^*(-)$, de spectre $\{R_i, i \geqslant 0\}$, on définit la théorie à coefficients par :

$$\tilde{h}^i(X, \mathbb{Z}/l) = \tilde{h}^{i+2}(X \wedge M_l),$$

où $M_l$ est l'espace de Moore, cofibre de l'application : $S^1 \to S^1$. On peut alors y définir une multiplication compatible pourvu que $l \neq 2\ (4)$ [10]. La théorie à coefficients est donc alors définie par le spectre, multiplicatif, dont le $i$-ième terme $S_i$ est : $(R_{i+2})^{M_l}$ espace des fonctions pointées de $M_l$ dans $R_{i+2}$.

La théorie homologique à coefficients est définie par :

$$\tilde{h}_i(X, \mathbb{Z}/l) = \tilde{h}_{i+1}(X \wedge M_l).$$

Son spectre associé a pour $i$-ième terme $T_i = M_l \wedge R_{i-1}$, $i \geqslant 1$. Si on montre que les spectres $\{S_i, i \geqslant 0\}$ et $\{T_i, i \geqslant 1\}$ sont équivalents on aura une structure multiplicative naturelle sur le spectre $\{T_i, i \geqslant 1\}$ ce qui nous est nécessaire à partir du 4. Or ceci résulte immédiatement du :

LEMME. — *L'espace* $M_l$ *est un* 3*-dual de Spanier-Whitehead pour lui même.*

*Démonstration.* — *Voir* SPANIER, *Algebraic Topology*, p. 403, exercice 6.

**Appendice 2**

Soit $\underline{F} \xrightarrow{i} \underline{E} \xrightarrow{p} \underline{B}$ une fibration de spectres. Dans le cas qui nous intéresse, $\underline{F}=\underline{\mathbb{K}\mathbb{F}_q}$, $\underline{E}=\underline{B}=\overline{\underline{K}}$, $i$ est le relèvement de Brauer Br et $p=\psi^q-I$. On considère aussi la réduction modulo $l$ de cette situation et son revêtement connexé. On veut montrer que c'est également une cofibration de spectres pour obtenir les suites du 4 et du 5. Soit $X$ un espace assimilé au spectre qu'il engendre, où un spectre. Soit $j$ une application de $\underline{E}$ dans $\underline{X}$ telle que $j.i$ soit homotope à zéro. On veut montrer qu'il existe une application $h$ de spectres telle que : $h.p \sim j$ :

$$\begin{tikzcd} \underline{F} \arrow[r, "i"] & \underline{E} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"] & \underline{B} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & \underline{X} & \end{tikzcd}$$

Puisque $j.i$ est homotope à zéro, $j.i$ se relève en une application $k$ de $\underline{F}$ dans $P\underline{X}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \underline{F} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"] & \underline{E} \arrow[d, "j"] \\ P\underline{X} \arrow[r, "\alpha"] & \underline{X} \end{tikzcd}$$

où $\alpha$ est l'application canonique (évaluation). On considère alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Omega\underline{X} \arrow[r, "\varepsilon"] & P\underline{X} \arrow[r, "\alpha"] & \underline{X} \\ \Omega\underline{B} \arrow[r, "e"] & \underline{F} \arrow[r, "i"] \arrow[u, "k"] & \underline{E} \arrow[u, "j"] \end{tikzcd}$$

où les deux lignes sont des fibrations, $e$ le bord de la fibration initiale, $\varepsilon$ l'application canonique. Le spectre $P\underline{X}$ étant homotopiquement trivial $k.e$ se relève en une application $l$ dans $\underline{B}$ rendant le diagramme commutatif. L'ensemble des applications de $\Omega\,\underline{X}$ dans $\Omega\,\underline{B}$ étant identique à l'ensemble des applications de $\underline{X}$ dans $\underline{B}$ ([1], (c), 7) on peut délacer $l$ ce qui donne l'application $h$ souhaitée.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ADAMS (J. F.). — *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago, (*a*) p. 93-102; (*b*) p. 46-55; (*c*) p. 146-158.

[2] ANDERSON (W.). — *Universal coefficient theorems for K-theory*, Preprint.

[3] ATIYAH (M. F.). — *K-theory*, Benjamin, p. 102-108.

[4] BROWDER (W.). — Algebraic $K$-theory with coefficient $\mathbb{Z}/p$, dans *Geometric applications of homotopy theory I, Lecture Notes*, n° 657, 1977, p. 40-85.

[5] GERSTERN (S. M.). — Higher $K$-theory of rings, dans *Algebraic K-theory I, Lecture Notes*, n° 341, 1972, p. 3-42.

[6] KNAPP (K.). — On the bi-stable $J$-homomorphism, dans *Algebraic topology, Aarhus, Lecture Notes*, n° 763, 1978, p. 13-22.

[7] MAY (P.). — $E_{\infty}$ Ring spaces and $E_{\infty}$ ring spectra, *Lecture Notes*, n° 577, p. 32-39 et 208-234.

[8] MOSHER (R. E.). — Some stable homotopy of complex projective space, *Topology*, vol. 7, 1968, p. 179-194.

[9] SNAITH (V.). — (*a*) Dyer-lashof operations in $K$-theory, *Lecture Notes*, n° 496, p. 198-207; (*b*) Algebraic cobordism and $K$-theory; *Mem. Am. Math. Soc.* vol. 221, 1979.

[10] ARAKI (S.) and TODA (H.). — Multiplicative structures in mod . $q$ cohomology theories, *Osaka J. Math.*, vol. 2, 1965, p. 71-115.

[11] TORNEHAVE (J.). — Delooping the Quillen map, *Thèse* M.I.T., 1971.

[12] ADAMS (J. F.) HARRIS (A. S.) and SWITZER (R. M.). — Hopf algebras of cooperations for real and complex $K$-theory, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 23, 1971, p. 385-408.