Bulletin de la S. M. F.

G. Maltsiniotis

Transvarsalité obtenue par éclatements permis

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 365-400
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__365_0>

Bull. Soc. math. France.
108, 1980, p. 365-400.

TRANSVERSALITÉ OBTENUE PAR ÉCLATEMENTS PERMIS

PAR

G. MALTSINIOTIS

(C.N.R.S., E.R.A. 589)

RÉSUMÉ. — On généralise un théorème de HIRONAKA pour pouvoir « rendre » un faisceau cohérent (et non seulement un sous-schéma) normalement plat le long d'un sous-schéma par des « éclatements permis » et on utilise ce résultat pour pouvoir « arranger » des faisceaux cohérents le long d'un diviseur a croisements normaux par des « éclatements permis » de centre contenu dans le diviseur.

ABSTRACT. — One of HIRONAKA'S Theorems is generalized in order to « render » a coherent sheaf (and not only a sub-scheme) normally flat along a sub-scheme by « permissible monoidal transformations »; and this is used in order to « arrange » a coherent sheaf along a divisor with only normal crossings by "permissible monoidal transformations" with center contained in the divisor.

Introduction

Étant donné un schéma (ou espace analytique) régulier X, un diviseur à croisements normaux Y de X et un O_X-module cohérent F, on peut se demander s'il existe un morphisme propre $p : X' \to X$ tel que X' soit régulier, $Y' = (p^{-1}(Y))_{\text{red}}$ un diviseur à croisements normaux de X' et $p \mid X' - Y' : (X' - Y') \to (X - Y)$ un isomorphisme et tel que, de plus, le « transformé strict » de F par p ($p^*(F)$ modulo Y'-torsion) soit « transverse » à Y' (*cf.* définition (2.1)). Dans cet article on répond presque par l'affirmative à cette question en utilisant la théorie de la résolution des singularités de HIRONAKA. Au lieu d'une modification propre $p : X' \to X$, on obtient une famille propre d'éclatements locaux (théorème (2.13) et corollaire (2.14)). Pour cela, on est amené à généraliser un théorème de HIRONAKA pour pouvoir

(*) Texte reçu le 20 juin 1979.

G. MALTSINIOTIS, 118, rue de Vaugirard, 75006 Paris.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/365/$ 5.00

« rendre » un faisceau cohérent (et non seulement un sous-schéma) normalement plat le long d'un sous-schéma par des « éclatements permis » (théorème (1.46)), généralisation qui présente d'ailleurs un intérêt indépendant.

Dans un prochain article on utilisera les résultats de ce travail pour démontrer un théorème de « privilège uniforme » qui sera utilisé dans un troisième article pour fonder une théorie de « sections à croissance modérée » des faisceaux analytiques cohérents, ainsi qu'une théorie de cohomologie modérée pour ces faisceaux.

Dans le paragraphe 0 on précise le cadre de ce travail, et on rappelle les résultats sur les éclatements et les suites finies d'éclatements utilisés dans cet article.

Dans le paragraphe 1, on généralise les définitions et les résultats de HIRONAKA utiles pour la suite en utilisant le principe d'idéalisation de Nagata.

Dans le paragraphe 2, on définit la notion de faisceau cohérent transverse à un diviseur, on démontre les propriétés essentielles de cette notion ainsi que le résultat principal de ce travail.

Dans un appendice, on indique que les résultats démontrés dans le cadre de la géométrie algébrique se transposent modulo des modifications mineures au cadre de la géométrie analytique.

Je remercie J. Giraud pour les conversations utiles que j'ai eues avec lui, ainsi que pour la lecture détaillée du texte et ses conseils.

0. Préliminaires

Dans ce travail on se fixe une fois pour toutes un corps k de caractéristique 0. Tous les schémas considérés seront des k-schémas séparés de type fini, et les morphismes de schémas des k-morphismes. On dira indifféremment « schéma » pour k-schéma séparé de type fini et « morphisme de schémas » pour k-morphisme. Si X désigne un schéma, tous les O_X-modules considérés seront des O_X-modules cohérents, et en particulier on dira O_X-module localement libre pour O_X-module localement libre de rang fini. Toutes les O_X-algèbres considérés seront des O_X-algèbres associatives, unitaires, commutatives, et on dira simplement O_X-algèbre pour O_X-algèbre associative, unitaire, commutative. Si $i : X' \to X$ désigne une immersion fermée, on identifiera parfois X' avec le sous-schéma fermé $i(X')$ de X. Si X' désigne un sous-schéma fermé de X et $i : X' \to X$, l'immersion fermée canonique de X' dans X on notera, quand aucune confusion n'en résulte, $O_{X'}$ le O_X-module $i_*(O_{X'})$.

Tous les diviseurs considérés seront des diviseurs positifs, et on dira simplement diviseur pour diviseur positif.

(0.1) Soient X un schéma, B un sous-schéma fermé de X, I l'idéal de définition de B dans X. On rappelle que le X-schéma obtenu en éclatant B dans X est le X-schéma $X'=\operatorname{Proj}(\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p)$, spectre homogène de la O_X-algèbre quasi cohérente graduée $\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p$ et si $f: X'\to X$ désigne le morphisme structural, on dit que f est le morphisme obtenu en éclatant B dans X ou, par abus de langage, que $f: X'\to X$ est l'éclatement de centre B. Alors f est un morphisme projectif, $IO_{X'}$ est un $O_{X'}$-module inversible très ample pour f, et le sous-schéma fermé $f^{-1}(B)=X'\times_X B$ de X' dont l'idéal de définition est $IO_{X'}$ est un diviseur de X' qui s'identifie canoniquement à $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p/I^{p+1})$. D'autre part, l'éclatement $f: X'\to X$ de centre B possède la propriété universelle suivante : Si $a: Z\to X$ est un morphisme de schémas tel que $a^{-1}(B)$ soit un diviseur de Z, il existe un morphisme de schémas unique $a': Z\to X'$ tel que $f\circ a'=a$. On déduit immédiatement que si U est un ouvert de X, le morphisme $f\,|\,f^{-1}(U): f^{-1}(U)\to U$ est obtenu en éclatant $U\cap B$ dans U, que si B est un diviseur de X (en particulier s'il est vide) f est un isomorphisme, et en particulier (B n'étant plus supposé un diviseur) que si U est un ouvert de $X-B$, le morphisme $f\,|\,f^{-1}(U): f^{-1}(U)\to U$ est un isomorphisme.

(0.2) Soient $f: X'\to X$ un éclatement de centre B, I l'idéal de définition de B dans X et F un O_X-module cohérent. On rappelle que le transformé strict de F par l'éclatement f est le $O_{X'}$-module cohérent $f^*(F)/T$ où T est le sous-$O_{X'}$-module de $f^*(F)$ des sections dont le support est contenu dans le diviseur $f^{-1}(B)$ (sous-module de $f^{-1}(B)$-torsion). Le transformé strict de F s'identifie au $O_{X'}$-module cohérent $\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p F$ associé au $\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p$-module quasi cohérent gradué $\bigoplus_{p\in\mathbb{N}} I^p F$. Si V est un sous-schéma fermé de X, le transformé strict du O_X-module cohérent O_V est le faisceau structural d'un sous-schéma fermé V' de X' appelé transformé strict de V par l'éclatement f, qui est le plus petit sous-schéma fermé de X' contenant le sous-schéma $f^{-1}(V-B)=X'\times_X(V-B)$ de X' (V' est l'adhérence schématique de $f^{-1}(V-B)$ dans X') et le morphisme $f\,|\,V': V'\to V$ est obtenu en éclatant $V\cap B=V\times_X B$ dans V.

(0.3) On appelle suite finie d'éclatements la donnée

$$\varphi=((X_i)_{0\leqslant i\leqslant m};\ (f_i)_{0\leqslant i<m};\ (B_i)_{0\leqslant i<m})$$

où :

(i) pour tout i, $0\leqslant i\leqslant m$, X_i est un schéma;

(ii) pour tout i, $0 \leqslant i < m$, B_i est un sous-schéma fermé de X_i;

(iii) pour tout i, $0 \leqslant i < m$, $f_i : X_{i+1} \to X_i$ est le morphisme obtenu en éclatant B_i dans X_i.

On dit que la suite finie d'éclatements φ est de longueur m, de base X_0 et de sommet X_m. On appelle morphisme composé, ou simplement composé de la suite finie d'éclatements φ le morphisme $f = f_0 \circ f_1 \circ \ldots \circ f_{m-1}$.

Pour tout m', $0 \leqslant m' \leqslant m$, on note $\varphi_{m'}$ la suite finie d'éclatements $((X_i)_{0 \leqslant i \leqslant m'}; (f_i)_{0 \leqslant i < m'}; (B_i)_{0 \leqslant i < m'})$ et on dit que la suite finie d'éclatements φ prolonge $\varphi_{m'}$ ou que φ est un prolongement de $\varphi_{m'}$. Pour tout m', $0 \leqslant m' \leqslant m$, on note $\varphi^{m'}$ la suite finie d'éclatements $((X'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-m'}; (f'_i)_{0 \leqslant i < m-m'}; (B'_i)_{0 \leqslant i < m-m'})$ où pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m-m'$, $X'_i = X_{m'+i}$ et pour tout i, $0 \leqslant i < m-m'$, $f'_i = f_{m'+i}$ et $B'_i = B_{m'+i}$, et on notera, par abus de notation,

$$\varphi^{m'} = ((X_i)_{m' \leqslant i \leqslant m}; (f_i)_{m' \leqslant i < m}; (B_i)_{m' \leqslant i < m}).$$

(0.4) Soient

$$\varphi = ((X_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}; (f_i)_{0 \leqslant i < m}; (B_i)_{0 \leqslant i < m})$$

et

$$\varphi' = ((X'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}; (f'_i)_{0 \leqslant i < m}); (B'_i)_{0 \leqslant i < m})$$

deux suites finies d'éclatements de même longueur m. On appelle morphisme de φ' dans φ la donnée $\alpha = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ où :

(i) pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m$, $a_i : X'_i \to X_i$ est un morphisme de schémas;

(ii) pour tout i, $0 \leqslant i < m$, $f_i \circ a_{i+1} = a_i \circ f'_i$;

(iii) pour tout i, $0 \leqslant i < m$, $a_i^{-1}(B_i) = B'_i$.

On dit que α est une immersion fermée (resp. ouverte) si pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m$, a_i l'est (pour cela il suffit que a_0 le soit).

On dit que a_0 est la base du morphisme α et que a_m en est le sommet.

Pour tout m', $0 \leqslant m' \leqslant m$, on note $\alpha_{m'}$ la famille $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant m'}$; $\alpha_{m'}$ est un morphisme de $\varphi'_{m'}$ dans $\varphi_{m'}$, et on dit que le morphisme α prolonge $\alpha_{m'}$ ou que α est un prolongement de $\alpha_{m'}$. Pour tout m', $0 \leqslant m' \leqslant m$, on note $\alpha^{m'}$ la famille $(a'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-m'}$ où pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m-m'$, $a'_i = a_{m'+i}$ et on notera parfois, par abus de notation, $\alpha^{m'} = (a_i)_{m' \leqslant i \leqslant m}$; $\alpha^{m'}$ est un morphisme de $\varphi'^{m'}$ dans $\varphi^{m'}$.

(0.5) Soient

$$\alpha = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant m} : \varphi' \to \varphi \qquad \text{et} \qquad \alpha' = (a'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m} : \varphi'' \to \varphi'$$

deux morphismes de suites finies d'éclatements. Alors $\alpha'' = (a_i \circ a'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ est un morphisme de φ'' dans φ' appelé morphisme composé et noté $\alpha \circ \alpha'$.

(0.6) Soient φ une suite finie d'éclatements de base X et $a : X' \to X$ un morphisme de schémas; alors il existe une suite finie d'éclatements φ' de base X' et un morphisme $\alpha : \varphi' \to \varphi$ de base a et si φ'' est une suite finie d'éclatements de base X' et $\alpha' : \varphi'' \to \varphi$ un morphisme de base a, alors il existe un isomorphisme unique $\beta : \varphi' \to \varphi''$ de base $\mathrm{id}_{X'}$ tel que $\alpha' \circ \beta = \alpha$.

On dit que φ' est la suite finie d'éclatements image réciproque de φ par a et que α est le morphisme de φ' dans φ déduit de a. Si φ est de longueur m et m' est un entier tel que $0 \leqslant m' \leqslant m$, $\varphi'_{m'}$ est la suite finie d'éclatements image réciproque de $\varphi_{m'}$ par a et $\alpha_{m'}$, est le morphisme de $\varphi'_{m'}$ dans $\varphi_{m'}$ déduit de a, et si $a_{m'}$ désigne le sommet de $\alpha_{m'}$, $\varphi'^{m'}$ est la suite finie d'éclatements image réciproque de $\varphi^{m'}$ par $a_{m'}$ et $\alpha^{m'}$ est le morphisme de $\varphi'^{m'}$ dans $\varphi^{m'}$ déduit de $a_{m'}$. Si X' est un sous-schéma fermé (resp. ouvert) de X et a l'immersion canonique, on dit simplement que φ' est la suite finie d'éclatements induite sur le sous-schéma fermé (resp. ouvert) X' par φ (et alors α est une immersion fermée (resp. ouverte) appelée immersion canonique). Dans le cas où X' est un sous-schéma ouvert de X, le sommet de φ' s'identifie à $f^{-1}(X')$ où f désigne le morphisme composé de φ. Dans le cas où X' est un sous-schéma fermé de X tel que $X'_{\mathrm{red}} = X_{\mathrm{red}}$, si a_m désigne le sommet de α, $(a_m)_{\mathrm{red}}$ est un isomorphisme.

(0.7) Soient

$$\varphi = ((X_i)_{1 \leqslant i \leqslant m};\ (f_i)_{1 \leqslant i < m};\ (B_i)_{1 \leqslant i < m})$$

une suite finie d'éclatements et $a : X_0 \to X'_0$ une immersion fermée; alors il existe une suite finie d'éclatements φ', de longueur m et de base X'_0,

$$\varphi' = ((X'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m};\ (f'_i)_{1 \leqslant i < m};\ (B'_i)_{1 \leqslant i < m})$$

et un morphisme $\alpha = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant m} : \varphi \to \varphi'$ tel que $a_0 = a$ (nécessairement une immersion fermée) et tel que pour tout i, $0 \leqslant i < m$, a_i induit un isomorphisme de B_i sur B'_i et si

$$\varphi'' = ((X''_i)_{0 \leqslant i \leqslant m};\ (f''_i)_{0 \leqslant i < m};\ (B''_i)_{0 \leqslant i < m})$$

est une suite finie d'éclatements de longueur m et de base X'_0 et $\alpha' = (a'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$: $\varphi \to \varphi''$ un morphisme tel que $a'_0 = a$ et tel que pour tout i, $0 \leqslant i < m$, a'_i induit un isomorphisme de B_i sur B''_i, alors il existe un isomorphisme unique $\beta : \varphi' \to \varphi''$, de base $\mathrm{id}_{X'_0}$ tel que $\beta \circ \alpha = \alpha'$.

On dit que φ' est la suite finie d'éclatements de base X'_0 déduite de φ (par a) et que α est l'immersion canonique de φ dans φ' (de base a) et alors φ est la suite finie d'éclatements image réciproque de φ' par a et α est le morphisme de φ dans φ' déduit de a. Si m' est un entier tel que $0 \leqslant m' \leqslant m$, alors $\varphi'_{m'}$ est la suite finie d'éclatements de base X'_0 déduite de $\varphi_{m'}$ et $\alpha_{m'}$ est l'immersion canonique de $\varphi_{m'}$ dans $\varphi'_{m'}$, et $\varphi'^{m'}$ est la suite finie d'éclatements de base $X'_{m'}$ déduite de $\varphi^{m'}$ (par $a_{m'}$) et $\alpha^{m'}$ l'immersion canonique de $\varphi^{m'}$ dans $\varphi'^{m'}$ (de base $a_{m'}$).

(0.8) Soient

$$\varphi=((X_i)_{0\leqslant i\leqslant m};\ (f_i)_{0\leqslant i<m};\ (B_i)_{0\leqslant i<m})$$

une suite finie d'éclatements, F un O_{X_0}-module cohérent. Le transformé strict de F par la suite d'éclatements φ est un O_{X_m}-module cohérent défini par récurrence sur la longueur m de φ. Si φ est de longueur 0, le transformé strict de F par φ est F lui-même. Sinon, le transformé strict de F par φ est le O_{X_m}-module cohérent, transformé strict du O_{X_1}-module cohérent F_1 par la suite finie d'éclatements

$$\varphi^1=((X_i)_{1\leqslant i\leqslant m};\ (f_i)_{1\leqslant i<m};\ (B_i)_{1\leqslant i<m})$$

(de longueur $m-1$) où F_1 désigne le transformé strict de F par l'éclatement f_0.

Si X'_0 est un sous-schéma fermé de X_0 et si φ' désigne la suite finie d'éclatements induite par φ sur X'_0, de sommet X'_m et $\alpha=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant m}:\varphi'\rightarrow\varphi$ l'immersion canonique, alors le transformé strict du O_{X_0}-module $O_{X'_0}$, par la suite finie d'éclatements φ est le O_{X_m}-module $a_{m*}(O_{X'_m})$ faisceau structural du sous-schéma fermé $a_m(X'_m)$ de X_m, qu'on appelle transformé strict du sous-schéma fermé X'_0 de X_0 par φ, et si F' est un $O_{X'_0}$-module cohérent, F le O_{X_0}-module cohérent $a_{0*}(F')$, F'_m (resp. F_m) le transformé strict de F' (resp. F) par la suite finie d'éclatements φ' (resp. φ) alors $F_m=a_{m*}(F'_m)$.

(0.9) Soit φ une suite finie d'éclatements de base X et de sommet X'. Si F est un O_X-module cohérent et L un O_X-module localement libre, le transformé strict du O_X-module cohérent $F\bigotimes_{O_X}L$ par la suite finie d'éclatements φ est isomorphe à $F'\bigotimes_{O_{X'}}f^*(L)$ où F' désigne le transformé strict de F par φ et f le morphisme composé de φ. Si α est un entier, $\alpha\geqslant 0$, et pour tout j, $1\leqslant j\leqslant\alpha$, F_j un O_X-module cohérent, le transformé strict du O_X-module cohérent $\bigoplus_{j=1}^{\alpha}F_j$ par la suite finie d'éclatements φ est isomorphe à $\bigoplus_{j=1}^{\alpha}F'_j$ où pour tout j, $1\leqslant j\leqslant\alpha$, F'_j désigne le transformé strict de F_j par φ.

1. Généralisation d'un théorème d'Hironaka

DÉFINITION (1.1). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, x un point de X. On dira que Y est un diviseur à croisements normaux de X en x, s'il existe un système régulier de paramètres $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ de $O_{X,x}$ et un entier

$\alpha \geqslant 0$ tel que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x. On dira que Y est un diviseur à croisements normaux de X s'il l'est en tout point de X.

DÉFINITION (1.2). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, W un sous-schéma fermé de X, x un point de W. On dira que W n'a que des croisements normaux avec Y en x (dans X, si cela n'est pas évident par le contexte), s'il existe un système régulier de paramètres $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ de $O_{X,x}$, un entier $\alpha \geqslant 0$, tel que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x et une partie $I \subset [1, N]$ telle que l'idéal de définition de W soit engendré par $(z_i)_{i \in I}$ en x. On dira que W n'a que des croisements normaux avec Y (dans X) s'il en est ainsi en tout point de W.

Remarque (1.3). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, W un sous-schéma fermé de X et x un point de W. Si W n'a que des croisements normaux avec Y en x, alors W est régulier en x et Y est un diviseur à croisements normaux de X en x. D'autre part, X n'a que des croisements normaux avec Y en x si, et seulement si Y est un diviseur à croisements normaux de X en x.

Remarque (1.4). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X, W un sous-schéma fermé réduit de X. Alors l'ensemble des points de W où W n'a que des croisements normaux avec Y est un ouvert dense de W.

Remarque (1.5). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, W un sous-schéma fermé de X qui n'a que des croisements normaux avec Y, W' un sous-schéma fermé de W et x un point de W'. Alors Y est un diviseur à croisements normaux de X en tout point de W (remarque 1.3), W est régulier (remarque 1.3). Si W n'a pas de composantes irréductibles contenues dans Y, $W \cap Y$ est un diviseur à croisements normaux de W et W' n'a que des croisements normaux avec Y en x dans X si, et seulement si W' n'a que des croisements normaux avec $W \cap Y$ en x dans W.

DÉFINITION (1.6). — Soient X un schéma, W un sous-schéma fermé de X, $i : W \to X$ l'immersion fermée canonique de W dans X, I l'idéal de définition de W dans X et F un O_X-module cohérent. Pour tout entier p, $p \geqslant 0$, on note $\mathrm{gr}_W^p(F)$ le O_W-module cohérent $i^*(I^p F)$. Si x est un point de W, on dira que F est normalement plat le long de W en x si pour tout entier p, $p \geqslant 0$, $(\mathrm{gr}_W^p(F))_x$ est un $O_{W,x}$-module libre. On dira que F est normalement plat le long de W, s'il est en tout point de W. Si V est un sous-schéma fermée de X, on dira que V est normalement plat le long de W en x (resp. normalement plat le long de W) si le O_X-module cohérent O_V l'est.

Remarque (1.7). — En gardant les notations de la définition (1.6), $i_*(\mathrm{gr}^p_W(F)) = I^p F / I^{p+1} F$ pour tout entier p, $p \geqslant 0$.

Remarque (1.8). — Soient X un schéma, W un sous-schéma fermé de X, x un point de W. Alors :

(i) si α est un entier, $\alpha \geqslant 0$, et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j un O_X-module cohérent, le O_X-module cohérent $\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j$ est normalement plat le long de W en x si, et seulement si pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant a$, F_j l'est;

(ii) si F est un O_X-module cohérent et L un O_X-module localement libre non nul, le O_X-module cohérent $F \bigotimes_{O_X} L$ est normalement plat le long de W en x si, et seulement si F l'est;

(iii) si $i : X \to X'$ est une immersion fermée et F un O_X-module cohérent, le $O_{X'}$-module cohérent $i_*(F)$ est normalement plat le long de $i(W)$ en $i(x)$ si, et seulement si F est normalement plat le long de W en x;

(iv) si les schémas X et W sont réguliers au point x, alors le O_X-module cohérent O_X est normalement plat le long de W en x.

Remarque (1.9). — Soient X un schéma, W un sous-schéma fermé réduit de X, F un O_X-module cohérent. Alors l'ensemble des points de W où F est normalement plat le long de W est un ouvert dense de W.

DÉFINITION (1.10). — Soit X un schéma tel que X_{red} soit régulier. On dira que $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est une donnée de résolution de type R_I sur X si :

(i) Y est un diviseur à croisements normaux de X_{red};

(ii) $\alpha \in \mathbb{N}$, et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j est un O_X-module cohérent;

(iii) W est un sous-schéma fermé réduit de X (donc W est un sous-schéma fermé réduit de X_{red}).

DÉFINITION (1.11). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ une donnée de résolution de type R_I sur X, x un point de W. On dira que cette donnée de résolution est résolue au point x si :

(i) pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j est normalement plat le long de W en x;

(ii) X est normalement plat le long de W en x;

(iii) W n'a que des croisements normaux avec Y en x dans X_{red} (ce qui entraîne en particulier que x est un point régulier de W (remarque (1.3))).

Si A est une partie de W, on dira que cette donnée est résolue sur A si elle est résolue en tout point de A. On dira que cette donnée de résolution est résolue si elle est résolue sur W.

Exemple (1.12). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ une donnée de résolution de type R_I sur X. Si $\dim(W) = 0$ alors la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue.

Remarque (1.13). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier et $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ une donnée de résolution de type R_I sur X; alors l'ensemble des points de W où cette donnée de résolution est résolue est un ouvert dense de W (remarque (1.4) et (1.9)).

DÉFINITION (1.14). — Soit X un schéma tel que X_{red} soit régulier. On dira que $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ est une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X si :

(i) $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est une donnée de résolution de type R_I sur X;

(ii) U est un ouvert dense de W;

(iii) $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue sur U.

Exemple (1.15). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ une donnée de résolution de type R_I sur X, U l'ensemble des points de W où cette donnée de résolution est résolue. Alors $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ est une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X (remarque (1.13)) et pour toute donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U')$ de type $(R_I; 0)$ sur X, $U' \subset U$.

DÉFINITION (1.16). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X, $f : X' \to X$ un éclatement de centre B. On dira que l'éclatement f est permis pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ si :

(i) $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; B)$ est une donnée de résolution de type R_I sur X résolue (c'est-à-dire B est un sous-schéma régulier de X n'ayant que des croisements normaux avec Y dans X_{red} le long duquel $F_1, \ldots, F_\alpha, W, X$ sont normalement plats);

(ii) B est connexe (donc irréductible);

(iii) $B \subset W - U$.

DÉFINITION (1.17). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_I (resp. $(R_I; O)$) sur X, $f : X' \to X$ un éclatement de centre B. On appellera transformé de la donnée de résolution de type R_I, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. de la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) par l'éclatement f et on notera $f^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $f^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ le symbole $(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W')$ (resp. $(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U')$) oú :

(i) Y' est le sous-schéma réduit de X' dont l'ensemble sous-jacent est égal à la réunion du transformé strict de Y et du diviseur exceptionnel $f^{-1}(B)$;

(ii) pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F'_j est le transformé strict de F_j;

(iii) W' est le transformé strict de W;

(iv) $U' = f^{-1}(U)$.

Remarque (1.18). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X, $f : X' \to X$ un éclatement de centre B permis pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$. Alors B étant régulier (définition (1.16)) B est un sous-schéma régulier de X_{red} et le morphisme $f_{\text{red}} : X'_{\text{red}} \to X_{\text{red}}$ est obtenu en éclatant B dans X_{red} et en particulier X'_{red} est régulier. En plus, sous ces hypothèses, $f^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $f^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) est une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$) sur X' ([1], remarque 1, p. 168).

Définition (1.19). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier et $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X. On définit la notion de suite finie d'éclatements φ de base X, permise pour cette donnée de résolution, par récurrence sur la longueur de φ. Si φ est de longueur 0, φ est permise. Sinon soit :

$$\varphi = ((X_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}; (f_i)_{0 \leqslant i < m}; (B_i)_{0 \leqslant i < m})$$

une suite finie d'éclatement de base $X_0 = X$ et de longueur $m \geqslant 1$; on dira que φ est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ si l'éclatement f_0 est permis pour cette donnée de résolution et si la suite finie d'éclatements

$$\varphi^1 = ((X_i)_{1 \leqq i \leqq m}; (f_i)_{1 \leqq i < m}; (B_i)_{1 \leqq i < m})$$

(de longueur $m-1$) est permise pour la donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X_1, $f_0^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ (remarque (1.18)).

Définition (1.20). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$ sur X et

$$\varphi = ((X_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}; (f_i)_{0 \leqslant i < m}; (B_i)_{0 \leqslant i < m})$$

une suite finie d'éclatements de base $X_0 = X$ et de longueur m. Le transformé de $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) par φ, noté $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) est défini par récurrence sur la longueur m de φ. Si φ est de longueur 0

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) = (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$$

(resp. $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$).

Sinon

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) = \varphi^{1*} (f_0^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W))$$

$$(\text{resp. } \varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = \varphi^{1*} (f_0^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)))$$

(où $\varphi^1 = ((X_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}; (f_i)_{1 \leqslant i < m}; (B_i)_{1 \leqslant i < m})$ est une suite finie d'éclatements de longueur $m-1$).

Remarque (1.21). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X et φ une suite finie d'éclatements de base X. Alors :

(i) si φ est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et si X' désigne le sommet de φ, X'_{red} est un schéma régulier (en particulier si X est réduit (donc régulier), ce qui entraîne que X' est réduit, alors X' est régulier) et

$$(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W') = \varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$$
$$(\text{resp. } (Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U') = \varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U))$$

est une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$ sur X' (remarque (1.18)). En plus W' (resp. pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F'_j) est le transformé strict de W (resp. F_j) par φ, la dimension de W' est égale à celle de W et si W est irréductible W' l'est. D'autre part, si on désigne par f le morphisme composé de la suite finie d'éclatements φ, f induit un isomorphisme de $f^{-1}(X-(W-U))$ sur $X-(W-U)$, $U' = f^{-1}(U)$ et le morphisme de U' dans U induit par f est un isomorphisme de U' sur U. Si on suppose en plus que $W - Y \subset U$, alors $Y' = (f^{-1}(Y))_{\text{red}}$, et on déduit en particulier que si $U = W - Y$, alors $U' = W' - Y'$;

(ii) si U' est un ouvert de W contenant U tel que $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U')$ soit encore une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X, alors si φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U')$ elle l'est pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, et cela s'applique en particulier dans le cas où U' est l'ensemble des points de W où la donnée de résolution de type R_l, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue (remarque (1.13) et exemple (1.15));

(iii) si m désigne la longueur de φ et si m' est un entier, $0 \leqslant m' \leqslant m$, alors φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ si, et seulement si $\varphi_{m'}$ l'est et $\varphi^{m'}$ est permise pour

$$\varphi^*_{m'}(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$$

et on a

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) = \varphi^{m'*}(\varphi^*_{m'} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W))$$

et

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = \varphi^{m'*}(\varphi^*_{m'} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U));$$

(iv) si α' est un entier, $0 \leqslant \alpha' \leqslant \alpha$, alors $(Y; F_1, \ldots, F_{\alpha'}; W; U)$ est une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X, si φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ elle l'est pour $(Y; F_1, \ldots, F_{\alpha'}; W; U)$ et si

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = (Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U'),$$

alors

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W ; U)=(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U');$$

(v) si W_1 est un sous-schéma fermé réduit de W et U_1 un ouvert de W_1 tel que $W_1 - U_1 \subset W - U$, et tel que $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; W_1; U_1)$ soit une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X et si φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; W_1; U_1)$ alors φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, et si

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)=(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'),$$

alors

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; W_1)=(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha, O_{W'}; W'_1)$$

où W'_1 est le transformé strict de W_1 par φ.

Remarque (1.22). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier et $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$) sur X. Alors $(Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W; U)$) est une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$) sur X et si x est un point de W, $(Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W)$ est résolue au point x si, et seulement si $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ l'est (remarque (1.8), (i)). En plus, si φ est une suite finie d'éclatements de base X, φ est permise pour $(Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W; U)$ si, et seulement si elle l'est pour $(Y; F_1, \ldots, F\ ; W; U)$ (0.9), et si on pose

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)=(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W')$$

(resp. $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)=(Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U')$)
alors

$$\varphi^* (Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W)=(Y'; F'_1 \oplus \ldots \oplus F'_\alpha; W')$$

$$(\text{resp. } \varphi^* (Y; F_1 \oplus \ldots \oplus F_\alpha; W; U)=(Y'; F'_1 \oplus \ldots \oplus F'_\alpha; W'; U')$$

((0.9) et remarque (1.21), (i)).

Remarque (1.23). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$) sur X et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, L_j un O_X-module localement libre non nul. Alors $(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots, F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots, F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha; W; U)$) est une donnée de résolution de type R_l (resp. $(R_l; 0)$) sur X et si x est un point de W $(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots, F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha; W)$ est résolue au point x si, et seulement si $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ l'est (remarque (1.8), (ii)). En plus, si φ est une suite finie d'éclatements de base X, φ est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots,$

$F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha$; W; U) si, et seulement si elle l'est pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et si on pose

$$\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) = (Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W')$$

(resp. $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = (Y'; F'_1, \ldots, F'_\alpha; W'; U')$)
alors

$$\varphi^*(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots, F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha; W) = (Y'; F'_1 \otimes_{O_{X'}} f^* (L_1), \ldots, F'_\alpha \otimes_{O_{X'}} f^*(L_\alpha); W')$$

(resp.

$$\varphi^*(Y; F_1 \otimes_{O_X} L_1, \ldots, F_\alpha \otimes_{O_X} L_\alpha; W; U) = (Y'; F'_1 \otimes_{O_{X'}} f^*(L_1), \ldots, F'_\alpha \otimes_{O_{X'}} f^*(L_\alpha); W'; U'))$$

où X' désigne le sommet de φ et f le morphisme composé de la suite finie d'éclatements φ ((0.9) et remarque (1.21), (i)).

Remarque (1.24). — Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $i : X' \to X$ une immersion ouverte, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_I (resp. $(R_I; 0)$) sur X. Alors :

$$(i^{-1} (Y); i^*(F_1), \ldots, i^*(F_\alpha); i^{-1}(W))$$
$$\text{(resp. } (i^{-1} (Y); i^* (F_1), \ldots, i^* (F_\alpha); i^{-1} (W); i^{-1} (U)))$$

est une donnée de résolution de type R_I (resp. $(R_I; 0)$) sur X' qu'on appellera image réciproque de $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) par i (ou simplement donnée de résolution induite par $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) sur l'ouvert X', si X' est un ouvert de X et i l'immersion canonique) et qu'on notera $i^{-1} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $i^{-1} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) (ou $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) | X'$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) | X'$) si X' est un ouvert de X et i l'immersion canonique) et si x est un point de $i^{-1} (W)$ la donnée de résolution $i^{-1} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue en ce point si, et seulement si $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue au point $i(x)$. En plus, si φ est une suite finie d'éclatements de base X, permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, alors la suite finie d'éclatements φ' de base X', image réciproque de φ par l'immersion i, est une suite finie d'éclatements qui est permise pour la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X', $i^{-1} (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et si $\eta = (i_k)_{0 \leqslant k \leqslant m} : \varphi' \to \varphi$ (où m est la longueur de φ et $i_0 = i$) désigne l'immersion de φ' dans φ déduite de i, alors

$$\varphi'^*(i^{-1}(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)) = i_m^{-1}(\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W))$$

et

$$\varphi'^*(i^{-1}(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)) = i_m^{-1}(\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U))$$

En particulier si X' est un ouvert de X tel que $X' \cap W \subset U$, i l'immersion canonique de X' dans X et f le morphisme composé de la suite finie d'éclatements φ, ce qui implique que $g = f \mid f^{-1}(X') : f^{-1}(X') \to X'$ est un isomorphisme ((1.21), (i)) et en particulier une immersion ouverte, alors

$$(\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)) \mid f^{-1}(X') = g^{-1}((Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) \mid X')$$

et

$$(\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)) \mid f^{-1}(X') = g^{-1}((Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) \mid X').$$

Remarque (1.25). — *Soient* X' un schéma régulier, Y' un diviseur à croisements normaux de X', X un sous-schéma fermé de X' tel que X_{red} n'a que des croisements normaux avec Y' dans X' (donc X_{red} est régulier (remarque (1.13))) et tel que X_{red} n'ait pas de composantes irréductibles contenues dans Y', $Y = X_{\text{red}} \cap Y'$ (qui est un diviseur à croisements normaux de X_{red} (remarque (1.5))), $i : X \to X'$ l'immersion canonique, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) une donnée de résolution de type R_I (resp. $(R_I; 0)$) sur X. Alors $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W)$ (resp. $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W; U)$) est une donnée de résolution de type R_I (resp. $(R_I; 0)$) sur X', et si x est un point de W, la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ est résolue au point x si, et seulement si $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W)$ l'est (remarque (1.5) et (1.8), (iii), (iv)). Soient φ une suite finie d'éclatements de base X et de sommet $\tilde{X}$, qui est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, φ' la suite finie d'éclatements, de base X' et de sommet $\tilde{X}'$, déduite de φ, $\eta : \varphi \to \varphi'$ l'immersion canonique, $\tilde{\imath}$ le sommet de η. Alors φ' est une suite finie d'éclatements qui est permise pour $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W; U)$ et si

$$\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = (\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{U}),$$

alors

$$\varphi'^*(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W; U) = (\tilde{Y}'; \tilde{\imath}_*(\tilde{F}_1), \ldots, \tilde{\imath}_*(\tilde{F}_\alpha), \tilde{\imath}_*(O_{\tilde{X}});$$

$\tilde{W}; \tilde{U})$ où $\tilde{Y}'$ est un diviseur à croisements normaux de $\tilde{X}'$ tel que $\tilde{\imath}((\tilde{X})_{\text{red}})$ n'a que des croisements normaux avec $\tilde{Y}'$ dans $\tilde{X}'$ et $\tilde{\imath}(\tilde{Y}) = \tilde{\imath}(\tilde{X}_{\text{red}}) \cap \tilde{Y}'$ ((0.7), (0.8) et remarque (1.21), (i)). Réciproquement si φ' est une suite finie d'éclatements, de base X', qui est permise pour la donnée de résolution $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); W; U)$ et si φ désigne la suite finie d'éclatements induite par φ' sur X, alors φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et φ' est la suite finie d'éclatements de base X' déduite de φ.

THÉORÈME (1.26). — *Soient X un schéma régulier irréductible, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X telle que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, il existe un sous-schéma fermé V_j de X tel que $F_j = O_{V_j}$, et telle que*

$W \subset \bigcap_{j=1}^{\alpha} V_j$. Alors il existe une suite finie d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, et telle que la donnée de résolution $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ soit résolue.

Ce théorème est un des théorèmes centraux du mémoire d'HIRONAKA sur la résolution des singularités ([1], th. $I_2^{N,n}$, p. 170).

COROLLAIRE (1.27). — *Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier et $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X telle que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, il existe un sous-schéma fermé V_j de X tel que $F_j = O_{V_j}$ et telle que $W \subset \bigcap_{j=1}^{\alpha} V_j$. S'il existe une immersion fermée $i : X \to X'$ de X dans un schéma régulier irréductible X' et un diviseur à croisements normaux Y' de X' tel que $i(X_{red})$ n'a que des croisements normaux avec Y' dans X' et $i(Y) = i(X_{red}) \cap Y'$, alors il existe une suite finie d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et telle que la donnée de résolution $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ soit résolue.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la remarque (1.25) et du théorème (1.26) appliqué au schéma régulier irréductible X' et à la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X' (remarque (1.25)) $(Y'; i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X); i(W); i(U))$.

LEMME (1.28). — *Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X_{red} et x un point de X. Alors il existe un ouvert X' de X contenant le point x, une immersion fermée $i : X' \to X''$, où X'' est un schéma régulier irréductible et un diviseur à croisements normaux Y'' de X'' tel que $i(X'_{red})$ n'a que des croisements normaux avec Y'' dans X'' et tel que $i(Y \cap X') = i(X'_{red}) \cap Y''$.*

Démonstration. — Il existe un ouvert X'_0 de X contenant le point x et une immersion fermée $i_0 : X'_0 \to X''_0$ où X''_0 est un schéma régulier. Or Y est un diviseur à croisements normaux de X_{red} donc il existe un système régulier de paramètres $z_1, \ldots, z_N$ de $O_{X_{red}, x}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{j=1}^{\alpha} z_j$ en x. Soit $z''_1, \ldots, z''_{N''}$ un système régulier de paramètres de $O_{X'', i_0(x)}$ $(N'' \geqslant N)$ tel que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant N$, l'image de z''_j dans $O_{X_{red}, x}$ soit z_j. Alors il existe un ouvert irréductible X'' de X''_0 contenant $i_0(x)$ et un diviseur à croisements normaux Y'' de X'' dont l'idéal de définition en $i_0(x)$ est engendré par $\prod_{j=1}^{\alpha} z''_j$ qui vérifie la conclusion du lemme en prenant $X' = i_0^{-1}(X'')$ et $i : X' \to X''$ l'immersion induite par i_0.

LEMME (1.29). — *Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X, φ une suite finie d'éclatements, de base X et de sommet $\tilde{X}$, qui est permise pour la* *donnée de résolution* $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$, $(\tilde{Y};\ \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha;\ \tilde{W};\ \tilde{U}) = \varphi^*(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$. *S'il existe une immersion fermée* $i : X \to X'$ *de* X *dans un schéma régulier irréductible* X' *et un diviseur à croisements normaux* Y' *de* X' *tel que* $i(X_{red})$ *n'a que des croisements normaux avec* Y' *dans* X' *et* $i(Y) = i(X_{red}) \cap Y'$, *alors il existe une immersion fermée* $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ *de* $\tilde{X}$ *dans un schéma régulier irréductible* $\tilde{X}'$ *et un diviseur à croisements normaux* $\tilde{Y}'$ *de* $\tilde{X}'$ *tel que* $\tilde{i}(\tilde{X}_{red})$ *n'a que des croisements normaux avec* $\tilde{Y}'$ *dans* $\tilde{X}'$ *et* $\tilde{i}(\tilde{Y}) = \tilde{i}(\tilde{X}_{red}) \cap \tilde{Y}'$.

Démonstration. — Soient φ' la suite finie d'éclatements déduite de φ sur X', $\tilde{X}'$ le sommet de φ', $\eta : \varphi \to \varphi'$ l'immersion canonique, $\tilde{i}$ le sommet de η. Alors $\tilde{X}'$ est un schéma régulier irréductible (remarque (1.21), (i)), $(Y';\ i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X);\ i(W);\ i(U))$ est une donnée de résolution de type $(R_I;\ 0)$ sur X' et

$$\varphi'^*(Y';\ i_*(F_1), \ldots, i_*(F_\alpha), i_*(O_X);\ i(W);\ i(U)) = (\tilde{Y}';\ \tilde{i}_*(\tilde{F}_1), \ldots, \tilde{i}_*(\tilde{F}_\alpha), \tilde{i}_*(O_{\tilde{X}});\ \tilde{i}(\tilde{W});\ \tilde{i}(\tilde{U}))$$

où $\tilde{Y}'$ vérifie la conclusion du lemme (remarque (1.25)).

PROPOSITION (1.30). — *Soient* X *un schéma tel que* X_{red} *soit régulier,* $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$ *une donnée de résolution de type* $(R_I;\ 0)$ *sur* X *telle que pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, *il existe un sous-schéma fermé* V_j *de* X *tel que* $F_j = O_{V_j}$ *et telle que* $W \subset \bigcap_{j=1}^{\alpha} V_j$. *Alors il existe une suite finie d'éclatements* φ, *de base* X, *qui est permise pour* $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$ *et telle que la donnée de résolution* $\varphi^*(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W)$ *soit résolue.*

Démonstration. — Sous les hypothèses de la proposition, on considère les assertions suivantes :

(An) Si $\dim(W) \leqslant n$, il existe une suite finie d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$ et telle que la donnée de résolution $\varphi^*(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W)$ soit résolue.

(Bn) Si $\dim(W) \leqslant n$, et si X' est un ouvert de X et φ' une suite finie d'éclatements, de base X', permise pour $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U) \mid X'$ telle que la donnée de résolution $\varphi'^*((Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W) \mid X')$ soit résolue, alors il existe une suite finie d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ U)$ et telle que la donnée de résolution $\varphi^*(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W)$ soit résolue sur $f^{-1}(X') \cap \tilde{W}$ où f désigne le morphisme composé de la suite finie d'éclatements φ et $\tilde{W}$ le transformé strict de W par φ.

On remarque que les assertions (A_0) et (B_0) sont évidentes (on peut prendre, dans les deux cas, pour φ la suite de longueur 0 car alors

$(Y; F_1, \ldots, F_\gamma; W)$ est déjà résolue (exemple (1.12)). On démontrera que pour $n \geqslant 1$ (An-1) implique (Bn) et que (Bn) implique (An), ce qui établira (An) et (Bn) pour tout n, et en particulier la proposition.

(i) (An-1) $\Rightarrow$ (Bn). On raisonne par récurrence sur la longueur de φ'. Si φ' est de longueur 0, il suffit de prendre pour φ la suite finie d'éclatements de base X et de longueur 0. Sinon, si

$$\varphi' = ((X'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m'}; (f'_i)_{0 \leqslant i < m'}; (B'_i)_{0 \leqslant i < m'})$$

où $m' \geqslant 1$ et $X'_0 = X'$, soit $\overline{B}'_0$ l'adhérence schématique de B_0 dans X. Alors B'_0 étant régulier (définition (1.16)) (donc réduit) $\overline{B}'_0$ est réduit et $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0)$ est une donnée de résolution de type R_l sur X; B'_0 étant irréductible (définition (1.16)) $\overline{B}'_0$ l'est; et B'_0 étant contenu dans le fermé $W - U$ (définition (1.16)) $\overline{B}'_0$ l'est aussi. On distingue deux cas :

(*a*) La donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0)$ est résolue. Alors l'éclatement $f_0 : X_1 \to X$ de centre $\overline{B}'_0$ est permis pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et comme $\overline{B}'_0 = \overline{B}'_0 \cap X'$ la suite finie d'éclatements

$$\varphi_1 = ((X_i)_{0 \leqslant i \leqslant 1}; f_0; \overline{B}'_0)$$

(où $X_0 = X$) de longueur un induit la suite φ'_1 sur X' ((0.3), (0.4) et (0.6)) et

$$\varphi_1'^*((Y; F_1, \ldots, F_\gamma; W; U) | X') = (\varphi_1^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)) | X'_1$$

(remarque (1.24)). On en déduit l'assertion (Bn) en appliquant l'hypothèse de récurrence au schéma X_1, la donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X_1, $\varphi_1^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ l'ouvert X'_1 de X_1 et la suite finie d'éclatements φ'^1 (définitions (1.19), (1.20)) de base X'_1 et de longueur $m' - 1$.

(*b*) Cas général. La donnée de résolution de type R_l sur X, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0)$ étant résolue sur l'ouvert dense $B'_0 = \overline{B}'_0 \cap X'$ de $\overline{B}'_0$ (définitions (1.16), (1.19) et remarque (1.24)), $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0; B'_0)$ est une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X. Or, l'inclusion $\overline{B}'_0 \subset W - U$ implique l'inégalité $\dim(\overline{B}_0) \leqslant n - 1$ car U est un ouvert dense de W qui est de dimension inférieure ou égale à n. En appliquant donc (An-1) on déduit l'existence d'une suite finie d'éclatements ψ, de base X et de sommet $\tilde{X}$, qui est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0; B'_0)$ (ce qui entraîne en particulier que ψ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$

(remarque (1.21), (v))) telle que $\psi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0)$ soit résolue. Soit $g : \tilde{X} \to X$ le morphisme composé de la suite finie d'éclatements ψ. Alors g induit un isomorphisme $h = g \mid g^{-1}(X') : g^{-1}(X') \to X'$ (remarque (1.21), (i)). Soit $\tilde{\varphi}'$ l'image réciproque de φ' par l'isomorphisme h. Alors $\tilde{\varphi}'$ est une suite finie d'éclatements de base $g^{-1}(X')$ qui est permise pour la donnée de résolution $h^{-1}((Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) \mid X') = (\psi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)) \mid g^{-1}(X')$ (remarque (1.24)) et la donnée de résolution $\tilde{\varphi}'^*(h^{-1}((Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) \mid X'))$ est résolue (remarque (1.24)). Or l'adhérence schématique de $h^{-1}(B_0)$ s'identifie au transformé strict de $\overline{B}_0$ par ψ et comme la donnée de résolution $\psi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; \overline{B}'_0)$ est résolue on déduit l'assertion (Bn) en appliquant (*a*) au schéma $\tilde{X}$, la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur $\tilde{X}$, $\psi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, l'ouvert $g^{-1}(X')$ de $\tilde{X}$ et la suite finie d'éclatements $\tilde{\varphi}'$ (remarque (1.21), (i) et (iii)).

(ii) (Bn) $\Rightarrow$ (An). Nous allons démontrer que (Bn) implique que si φ est une suite finie d'éclatements, de base X, qui est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, il existe une suite finie d'éclatements $\bar{\varphi}$ qui prolonge φ et qui est permise pour la donnée de résolution $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, telle que si S_1 (resp. S_2) désigne l'ensemble des points où $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $\bar{\varphi}^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$) n'est pas résolue (qui est un fermé) (remarque (1.13)) et S_1^0 (resp. S_2^0) l'image de S_1 (resp. S_2) dans X (qui est un fermé, les éclatements étant des morphismes propres) S_2^0 soit strictement inclus dans S_1^0, pourvu que S_1^0 soit non vide, ce qui établira l'assertion (An) par récurrence noethérienne. Supposons donc que S_1^0 soit non vide et soit $x \in S_1^0$. Alors (lemme (1.28)), il existe un ouvert X' de X contenant le point x, une immersion fermée $i : X' \to X''$, où X'' est un schéma régulier irréductible, et un diviseur à croisements normaux Y'' de X'' tel que $i(X'_{\text{red}})$ n'a que des croisements normaux avec Y'' dans X'' et $i(Y \cap X') = i(X'_{\text{red}}) \cap Y''$. En appliquant le lemme (1.29) au schéma X', la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X', $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) \mid X'$ et la suite finie d'éclatements φ' induite par φ sur X' (remarque (1.24)) et si on désigne par f le morphisme composé de φ et si on pose

$$(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{U}) = \varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U),$$

on déduit l'existence d'une immersion fermée $\tilde{i} : f^{-1}(\tilde{X}') \to \tilde{X}''$ de $f^{-1}(X')$ dans un schéma régulier irréductible $\tilde{X}''$, et d'un diviseur à croisements normaux $\tilde{Y}''$ de $\tilde{X}''$ tel que $\tilde{i}((f^{-1}(X'))_{\text{red}})$ n'a que des croisements normaux avec $\tilde{Y}''$ dans $\tilde{X}''$ et $\tilde{i}(\tilde{Y} \cap f^{-1}(X')) = \tilde{i}((f^{-1}(X'))_{\text{red}}) \cap \tilde{Y}''$ ((0.6) et remarque (1.24)). Or, $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{W} - S_1)$ est une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur $\tilde{X}$, où $\tilde{X}$ désigne le sommet de φ, (exemple (1.15)) et $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{W}-S_1) \mid f^{-1}(X')$ une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur $f^{-1}(X')$ (remarque (1.24)) vérifiant les hypothèses du corollaire (1.27). On déduit l'existence d'une suite finie d'éclatements ψ' de base $f^{-1}(X')$ permise pour $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{W}-S_1) \mid f^{-1}(X')$ telle que

$$\psi'^*((\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}) \mid f^{-1}(X'))$$

soit résolue. Alors la dimension de $\tilde{W}$ étant égale à celle de W (remarque (1.21), (i)) l'assertion Bn implique l'existence d'une suite finie d'éclatements ψ de base $\tilde{X}$ permise pour $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}-S_1)$ telle que $\psi^*(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W})$ soit résolue sur $g^{-1} f^{-1}(X') \cap \tilde{\tilde{W}}$, où g désigne le morphisme composé de la suite finie d'éclatements ψ et $\tilde{\tilde{W}}$ le transformé strict de $\tilde{W}$ par ψ. Si S_2 désigne l'ensemble des points de $\tilde{\tilde{W}}$ où $\psi^*(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W})$ n'est pas résolue $S_2 \cap g^{-1} f^{-1}(X') = \emptyset$ et $g(S_2) \subset S_1$ donc $f(g(S_2)) \subsetneqq S_1^0$ (car $S_1^0 \cap X' \neq \emptyset$) et la suite finie d'éclatements ψ est permise pour $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{U})$ (remarque (1.21), (ii)), ce qui termine la démonstration (remarque (1.21), (iii)).

Définition (1.31). — Soit X un schéma. On appelle épaississement direct de X un triplet $(X'; i; r)$ où :

(i) X' est un schéma;

(ii) $i : X \to X'$ est une immersion fermée telle que $i_{\text{red}} : X_{\text{red}} \to X'_{\text{red}}$ soit un isomorphisme;

(iii) $r : X' \to X$ est un morphisme de schémas tel que $r \circ i = \text{id}_X$.

Remarque (1.32). — Soient X un schéma, $(X'; i; r)$ un épaississement direct de X. Tous les schémas, dans ce travail, étant supposés séparés et de type fini sur un corps k et les morphismes des k-morphismes, le morphisme r est séparé et de type fini. Or $r \circ i = \text{id}_X$ implique que $r_{\text{red}} \circ i_{\text{red}} = \text{id}_{X_{\text{red}}}$ et i_{red} étant un isomorphisme, on déduit que r_{red} est un isomorphisme, ce qui entraîne que r est propre (E.G.A. II, 5.4.6) et quasi fini, donc fini (E.G.A. III, 4.4.11).

Définition (1.33). — Soient X un schéma, $(X_1; i_1; r_1)$ et $(X_2; i_2; r_2)$ deux épaississements directs de X. On appelle morphisme de l'épaississement direct $(X_1; i_1; r_1)$ dans l'épaississement direct $(X_2; i_2; r_2)$ un morphisme de schémas $f : X_1 \to X_2$ tel que :

(i) $f \circ i_1 = i_2$.

(ii) $r_2 \circ f = r_1$.

Définition (1.34). — Soient X un schéma, F un O_X-module cohérent. On note $A(F)$ la O_X-algèbre cohérente dont le O_X-module sous-jacent est $O_X \oplus F$

et dont la multiplication induit l'application bi-linéaire nulle sur F, munie de la première projection $\varepsilon_F : A(F) \to O_X$. Soit $u : F_1 \to F_2$ un morphisme de O_X-modules cohérents. On note $A(u)$ le morphisme $\mathrm{id}_{O_X} \oplus u : A(F_1) \to A(F_2)$.

Remarque (1.35). — Il est immédiat de vérifier que A est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des O_X-modules cohérents dans celle des O_X-algèbres cohérentes augmentées dont les objets sont les couples (B, ε) où B est une O_X-algèbre cohérente et $\varepsilon : B \to O_X$ un morphisme de O_X-algèbres et dont les flèches d'un objet (B_1, ε_1) dans un objet (B_2, ε_2) sont les morphismes $\alpha : B_1 \to B_2$ de O_X-algèbres tels que $\varepsilon_2 \circ \alpha = \varepsilon_1$, et qu'une O_X-algèbre cohérente augmentée (B, ε) est isomorphe à une O_X-algèbre augmentée de la forme $A(F)$, où F est un O_X-module cohérent, si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est un idéal de carré nul de B.

DÉFINITION (1.36). — Soient X un schéma, F un O_X-module cohérent. On note $E(F)$ le triplet $(X'; i; r)$ où X' est le spectre de l'algèbre cohérente $A(F)$, $r : X' \to X$ est le morphisme structural et $i : X \to X'$ est l'immersion fermée déduite du morphisme surjectif de O_X-algèbres $\varepsilon_F : A(F) \to O_X$. Soient $u : F_1 \to F_2$ un morphisme de O_X-modules cohérents, $E(F_1) = (X_1; i_1; r_1)$, $E(F_2) = (X_2; i_2; r_2)$. On note $E(u)$ le morphisme de schémas, de X_2 dans X_1, associé au morphisme de O_X-algèbres $A(u) : A(F_1) \to A(F_2)$.

Remarque (1.37). — Il est immédiat de vérifier que E est un foncteur contravariant de la catégorie de O_X-modules cohérents dans celle des épaississements directs de X et il résulte aussitôt des remarques (1.35), (1.32) et de l'équivalence de catégories de la catégorie opposée à la catégorie de O_X-algèbres cohérentes à celle de X-schémas finis que E est un foncteur pleinement fidèle et qu'un épaississement direct $(X'; i; r)$ de X est isomorphe à un épaississement direct de la forme $E(F)$, où F est un O_X-module cohérent, si et seulement si le noyau de la surjection $O_{X'} \to i_*(O_X)$ associée à l'immersion fermée i est un idéal de carré nul de $O_{X'}$, et plus précisément si I désigne ce noyau, l'épaississement direct $(X'; i; r)$ est alors isomorphe à $E(r_*(I))$.

PROPOSITION (1.38). — *Soient X un schéma, F un O_X-module cohérent, $(X'; i; r) = E(F)$, W un sous-schéma fermé de X, I l'idéal de définition de W dans X, J l'idéal de définition de $i(W)$ dans X'. Alors pour tout entier p, $p \geqslant 1$, $r_*(J^p) = I^p \oplus I^{p-1} F$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur p. Il est clair que $r_*(J^p)$ est le O_X-module sous-jacent à l'idéal J^p de l'O_X-algèbre cohérente $A(F)$, dont le O_X-module sous-jacent est $O_X \oplus F$ et que le O_X-module sous-jacent à J est $I \oplus F$. Supposons que

$$r_*(J^p) = I^p \oplus I^{p-1} F.$$

Alors

$$r_*(J^{p+1}) = (I^p \oplus I^{p-1} F).(I \oplus F) = I^{p+1} \oplus I^p F$$

(car F est un idéal de carré nul de $A(F)$), ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE (1.39). — *En gardant les notations de la proposition* (1.38), $\mathrm{gr}^0_{i(W)}(O_{X'}) = \mathrm{gr}^0_W(O_X)$ *et pour tout entier* p, $p \geqslant 1$,

$$\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'}) = \mathrm{gr}^p_W(O_X) \oplus \mathrm{gr}^{p-1}_W(F).$$

Démonstration. — Pour démontrer le corollaire, il suffit de démontrer que

$$j_*(\mathrm{gr}^0_{i(W)}(O_{X'})) = j_*(\mathrm{gr}^0_W(O_X))$$

et que pour tout entier p, $p \geqslant 1$,

$$j_*(\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'})) = j_*(\mathrm{gr}^p_W(O_X)) \oplus j_*(\mathrm{gr}^{p-1}_W(F)),$$

où j désigne l'immersion fermée canonique de W dans X. Or, l'égalité $r \circ i = \mathrm{id}_X$ implique que pour tout entier p, $p \geqslant 0$,

$$j_*(\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'})) = r_* i_* j_* (\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'}))$$

et la remarque (1.7) que

$$i_* j_*(\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'})) = J^p / J^{p+1}.$$

Le morphisme r étant affine on déduit que

$$j_*(\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'})) = r_*(J^p) / r_*(J^{p+1}).$$

D'autre part, pour tout entier p, $p \geqslant 0$,

$$j_*(\mathrm{gr}^p_W(O_X)) = I^p / I^{p+1}$$

et pour tout entier p, $p \geqslant 1$,

$$j_*(\mathrm{gr}^{p-1}_W(F)) = I^{p-1} F / I^p F$$

(remarque (1.7)). Or $r_*(J^0) = r_*(A(F)) = O_X \oplus F$ et la proposition (1.38) implique que pour tout entier p, $p \geqslant 1$, $r_*(J^p) = I^p \oplus I^{p-1} F$. On déduit que

$$j_*(\mathrm{gr}^0_{i(W)}(O_{X'})) = (O_X \oplus F)/(I \oplus F) = O_X / I = j_*(\mathrm{gr}^0_W(O_X))$$

et que pour tout entier p, $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} j_*(\mathrm{gr}^p_{i(W)}(O_{X'})) &= (I^p \oplus I^{p-1} F)/(I^{p+1} \oplus I^p F) \\ &= (I^p / I^{p+1}) \oplus (I^{p-1} F / I^p F) = j_*(\mathrm{gr}^p_W(O_X)) \oplus j_*(\mathrm{gr}^{p-1}_W(F)), \end{aligned}$$

ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE (1.40). — *En gardant les notations de la proposition* (1.38) *si* x *est un point de* W, X' *est normalement plat le long de* $i(W)$ *en* $i(x)$ *si, et seulement si* X *et* F *sont normalement plats le long de* W *en* x.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire (1.39).

COROLLAIRE (1.41). — *Soient* X *un schéma tel que* X_{red} *soit régulier,* $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ *(resp.* $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$*) une donnée de résolution de type* R_I *(resp.* $(R_I; 0)$*) sur* X *telle que* $\alpha \geqslant 1$, $(X'; i; r) = E(F_\alpha)$. *Alors :*

(i) $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W))$ *(resp.* $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$*) est une donnée de résolution de type* R_I *(resp.* $(R_I; 0)$*) sur* X';

(ii) *si* x *est un point de* W, *la donnée de résolution* $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ *est résolue au point* x *si, et seulement si la donnée de résolution* $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W))$ *est résolue au point* $i(x)$.

Démonstration. — Il est immédiat que $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W))$; est une donnée de résolution de type R_I sur X' (car i_{red} est un isomorphisme), l'assertion (ii) résulte du fait que i_{red} est un isomorphisme, du corollaire (1.40) et de la remarque (1.8), (iii), et on en déduit que $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$ est une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X'.

LEMME (1.42). — *Soient* $r : X' \to X$ *un morphisme affine de schémas,* S' *une* $O_{X'}$ *algèbre quasi cohérente graduée en degrés positifs,* $S = r_*(S')$ *(qui est une* O_X*-algèbre quasi cohérente (le morphisme* r *étant affine), graduée en degrés positifs),*

$$\tilde{X}' = \operatorname{Proj}(S') \ (resp.\ \tilde{X} = \operatorname{Proj}(S)),$$

$$f' : \ \tilde{X}' \to X' \ (resp.\ f : \tilde{X} \to X)$$

le morphisme structural. Alors il existe un isomorphisme canonique $\rho : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ *tel que* $r \circ f' = f \circ \rho$.

Démonstration. — En effet, soit $S'' = r^*(S) = r^* r_*(S')$ qui est une $O_{X'}$-algèbre quasi cohérente graduée en degrés positifs. Alors le morphisme r étant affine, le morphisme canonique $\varphi : S'' \to S'$ est surjectif, donc Proj (φ) est défini dans $\tilde{X}' = \operatorname{Proj}(S')$ tout entier, et est une immersion fermée de $\tilde{X}'$ dans $\operatorname{Proj}(S'')$ telle que si f'' désigne le morphisme structural de $\operatorname{Proj}(S'')$, $f'' \circ \operatorname{Proj}(\varphi) = f'$ (E.G.A. II, 3.6.2). Or $\operatorname{Proj}(S'')$ s'identifie canoniquement à $\operatorname{Proj}(S) \times_X X' = \tilde{X} \times_X X'$, f'' s'identifiant à la deuxième projection (E.G.A. II, 3.5.3). Soit $\rho : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ le composé de $\operatorname{Proj}(\varphi)$ et de la première projection $q : \tilde{X} \times_X X' \to \tilde{X}$. Alors

$$f \circ \rho = f \circ q \circ \operatorname{Proj}(\varphi) = r \circ f'' \circ \operatorname{Proj}(\varphi) = r \circ f'.$$

Il reste à démontrer que ρ est un isomorphisme. Mais pour cela on peut supposer X et par suite X' affine, et dans ce cas la vérification est immédiate.

PROPOSITION (1.43). — *Soient X un schéma, B un sous-schéma fermé de X, F un O_X-module cohérent, $(X'; i; r) = E(F)$, $f : \tilde{X} \to X$ (resp. $f' : \tilde{X}' \to X'$) le morphisme obtenu en éclatant B (resp. $i(B)$) dans X (resp. X'). Alors il existe un morphisme de schémas unique $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ (resp. $\tilde{r} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$) tel que $f' \circ \tilde{i} = i \circ f$ (resp. $f \circ \tilde{r} = r \circ f'$). En plus, $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ est un épaississement direct de $\tilde{X}$ et il existe un $O_{\tilde{X}}$-module inversible L tel que $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ soit isomorphe à $E(\tilde{F} \bigotimes_{O_{\tilde{X}}} L)$ où $\tilde{F}$ désigne le transformé strict de F par l'éclatement f.*

Démonstration. — L'unicité de $\tilde{i}$ et $\tilde{r}$ résulte de la propriété universelle des éclatements et l'existence de $\tilde{i}$ est évidente car $\tilde{X}$ s'identifie au transformé strict de $i(X)$ par l'éclatement f' (en particulier $\tilde{i}$ est une immersion fermée). Soient I (resp. J) l'idéal de définition de B (resp. $i(B)$) dans X (resp. X'), S (resp. S') la O_X-algèbre (resp. $O_{X'}$-algèbre) quasi cohérente graduée $\bigoplus_{p=0}^{\infty} I^p$ (resp. $\bigoplus_{p=0}^{\infty} J^p$), Φ le S-module quasi cohérent gradué $\bigoplus_{p=0}^{\infty} I^p F$. Alors par définition $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{X}'$) est le X-schéma Prof (S) (resp. le X'-schéma Proj (S')), f (resp. f') le morphisme structural et le transformé strict $\tilde{F}$ de F par l'éclatement f est le $O_{\tilde{X}}$-module cohérent associé au S-module quasi cohérent gradué Φ. Or (lemme 1.42) le morphisme r étant affine, le X-schéma $r \circ f'$: $\tilde{X}' \to X$ s'identifie au X-schéma Proj $(r_*(S'))$. D'autre part, (proposition (1.38)) $r_*(S') = S \oplus \Phi(-1)$ et $\Phi(-1)$ est un idéal de carré nul de $S \oplus \Phi(-1)$. Soient $\rho : S \to S \oplus \Phi(-1)$ l'injection canonique et $\varepsilon : S \oplus \Phi(-1) \to S$ la première projection. Alors ρ et ε sont des morphismes de O_X-algèbres graduées tels que $\varepsilon \circ \rho = \mathrm{id}_S$. Démontrons que le X-morphisme $\tilde{r} = \mathrm{Proj}(\rho)$ est défini dans $\tilde{X}' = \mathrm{Prof}(r_*(S'))$ tout entier. Pour cela, il suffit de démontrer que si U est un ouvert affine de X, tout idéal premier gradué de $\Gamma(U, r_*(S'))$ qui contient $\rho(\Gamma(U, S_+)) = \rho(\Gamma(U, \bigoplus_{p=1}^{\infty} I^p))$ contient également $\Gamma(U, r_*(S')_+) = \Gamma(U, (\bigoplus_{p=1}^{\infty} I^p) \oplus \Phi(-1))$ (E.G.A. II, 2.8.1, 2.8.2, 3.5.1) ce qui est immédiat car $\Phi(-1)$ étant un idéal de carré nul de $r_*(S')$, $\Gamma(U, \Phi(-1))$ est formé d'éléments nilpotents. En plus, $\tilde{r}$ étant un X-morphisme $r \circ f' = f \circ \tilde{r}$, ce qui démontre l'existence de $\tilde{r}$. D'autre part ε étant surjective, Proj (ε) est un X-morphisme défini dans $\tilde{X} = \mathrm{Proj}(S)$ tout entier, est une immersion fermée de $\tilde{X}$ dans $\tilde{X}' = \mathrm{Proj}(r_*(S'))$, qui s'identifie à $\tilde{i}$, qui vérifie $\tilde{r} \circ \tilde{i} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ (car $\varepsilon \circ \rho = \mathrm{id}_S$), et le noyau N de la surjection $O_{\tilde{X}'} \to \tilde{i}_*(O_{\tilde{X}})$ associée à l'immersion fermée $\tilde{i}$ est l'idéal de $O_{\tilde{X}'}$ associé à l'idéal quasi cohérent gradué $\Phi(-1)$ de l'algèbre graduée $r_*(S')$ (E.G.A. II, 3.6.2) et par conséquent est un idéal de carré nul de $O_{\tilde{X}'}$. On déduit d'une part que $\tilde{i}_{\mathrm{red}}$ est un isomorphisme, ce qui implique que $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ est un épaississement direct de $\tilde{X}$, et d'autre part que cet épaississement direct est isomorphe à $E(\tilde{r}_*(N))$ (remarque (1.37)). Mais $\tilde{r}_*(N)$ est le $O_{\tilde{X}}$-module cohérent associé au S-module quasi cohérent gradué $\Phi(-1)$ (E.G.A. II, 3.5.2 (i)) et le $O_{\tilde{X}}$-module cohérent associé à Φ étant le transformé strict $\tilde{F}$ de F par l'éclatement f, on déduit que $\tilde{r}_*(N) = \tilde{F}(-1) = \tilde{F} \otimes_{O_{\tilde{X}}} O_{\tilde{X}}(-1)$ où $O_{\tilde{X}}(-1)$ est un $O_{\tilde{X}}$-module inversible, ce qui démontre la proposition en posant $L = O_{\tilde{X}}(-1)$.

COROLLAIRE (1.44). — *Soient X un schéma, F un O_X-module cohérent, $(X'; i; r) = E(F)$, φ une suite finie d'éclatements de base X, $\tilde{X}$ le sommet de φ, φ' la suite finie d'éclatements de base X' déduite de φ (par i), $\tilde{X}'$ le sommet de φ', $\eta : \varphi \to \varphi'$ l'immersion canonique (de base i), $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ le sommet de η. Alors il existe un morphisme de schémas $\tilde{r} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ est un $O_{\tilde{X}}$-module inversible L tels que $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ soit un épaississement direct de $\tilde{X}$ isomorphe à $E(\tilde{F} \otimes_{O_{\tilde{X}}} L)$ où $\tilde{F}$ désigne le transformé strict de F par la suite finie d'éclatements φ.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la longueur de φ. Si φ est de longueur 0, il suffit de poser $\tilde{r} = r$ et $L = O_X$. Sinon, supposons que φ soit de longueur m, $m \geqslant 1$. Soient X_1 (resp. X'_1) le sommet de φ_1 (resp. φ'_1) et i_1 le sommet de η_1. Alors la proposition (1.43) implique l'existence d'un morphisme de schémas $r_1 : X'_1 \to X_1$ et d'un O_{X_1}-module inversible L_1 tels que $(X'_1; i_1; r_1)$ soit un épaississement direct de X_1 isomorphe à $E(F_1 \otimes_{O_{X_1}} L_1)$ où F_1 désigne le transformé strict de F par φ_1. En appliquant l'hypothèse de récurrence au schéma X_1, le O_{X_1}-module cohérent $F_1 \otimes_{O_{X_1}} L_1$ et la suite finie d'éclatements φ^1 de longueur $m-1$ de base X_1 et de sommet $\tilde{X}$, φ'^1 étant la suite finie d'éclatements de base X'_1 déduite de φ^1 (par i_1) et η^1 l'immersion canonique de φ^1 dans φ'^1 (de base i_1), (0.7) on déduit l'existence d'un morphisme de schémas $\tilde{r} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ et d'un $O_{\tilde{X}}$-module inversible L_2 tels que $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ soit un épaississement direct de $\tilde{X}$ isomorphe à $E(H \otimes_{O_{\tilde{X}}} L_2)$ où H désigne le transformé strict de $F_1 \otimes_{O_{X_1}} L_1$ par φ^1. Or, H est isomorphe à $\tilde{F} \otimes_{O_{\tilde{X}}} f^{1*}(L_1)$ où f^1 désigne le morphisme composé de φ^1 ((0.9) et (0.8)) ce qui démontre le corollaire en posant $L = f^{1*}(L_1) \otimes_{O_{\tilde{X}}} L_2$.

PROPOSITION (1.45). — *Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X telle que $\alpha \geqslant 1$, $(X'; i; r) = E(F_\alpha)$, φ' une suite finie d'éclatements, de base X', qui est permise pour la donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X', $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$ (cf. corollaire (1.41)), φ la suite finie d'éclatements induite par φ'*

sur X (*X étant considéré comme sous-schéma fermé de* X' *par l'immersion fermée* i), $\eta : \varphi \to \varphi'$ *l'immersion canonique. Alors :*

(i) φ' *est la suite finie d'éclatements de base* X' *déduite de* φ (*par* i);

(ii) φ *est permise pour la donnée de résolution* $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$;

(iii) *si*

$$\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W) = (\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W})$$

$$(\textit{resp.}\ \varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U) = (\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}; \tilde{U})),$$

alors

$$\varphi'^*(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W)) = (\tilde{i}(\tilde{Y}); \tilde{i}_*(\tilde{F}_1), \ldots, \tilde{i}_*(\tilde{F}_{\alpha-1}); \tilde{i}(\tilde{W}))$$

$$(\textit{resp.}\ \varphi'^*(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U)) = (\tilde{i}(\tilde{Y}); \tilde{i}_*(\tilde{F}_1), \ldots, \tilde{i}_*(\tilde{F}_{\alpha-1}); \tilde{i}(\tilde{W}); \tilde{i}(\tilde{U})))$$

où $\tilde{i}$ *désigne le sommet de* η.

Démonstration. — L'assertion (i) est évidente et l'assertion (iii) résulte immédiatement de (0.8) et du fait que $\tilde{i}_{\text{red}}$ est un isomorphisme (0.6). Pour démontrer l'assertion (ii) on raisonne par récurrence sur la longueur de φ'. Si φ' est de longueur 0, le résultat est immédiat. Supposons donc que φ' soit de longueur $m \geqslant 1$. Posons

$$\varphi_1 = ((X_j)_{0 \leqslant j \leqslant 1}; f_0; B_0) \qquad \text{où} \quad X_0 = X.$$

Alors

$$\varphi'_1 = ((X'_j)_{0 \leqslant j \leqslant 1}; f'_0; i(B_0)) \qquad \text{où} \quad X'_0 = X'.$$

Par hypothèse $i(B_0)$ est connexe, donc il en est de même pour B_0. $i(B_0)$ est inclus dans $i(W) - i(U)$, donc B_0 est inclus dans $W - U$ et $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}), i_*(O_W); i(B_0))$ est une donnée de résolution de type R_l sur X' résolue, donc $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha, O_W; B_0)$ est résolue (corollaire (1.41)). On déduit que φ_1 est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$. Soient $(Y_1; F_{11}, \ldots, F_{1\alpha}; W_1; U_1) = \varphi_1^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et $i_1 : X_1 \to X'_1$ le sommet de η_1. La proposition (1.43) implique l'existence d'un morphisme de schémas $r_1 : X'_1 \to X_1$ et d'un O_{X_1}-module inversible L tels que $(X'_1; i_1; r_1)$ soit un épaississement direct de X_1 isomorphe à $E(F_{1\alpha} \otimes_{O_{X_1}} L)$. Alors $(Y_1; F_{11}, \ldots, F_{1\alpha-1}, F_{1\alpha} \otimes_{O_{X_1}} L; W_1; U_1)$ étant une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X (remarque (1.21), (i) et (1.23)), φ^1 la suite finie d'éclatements image réciproque de φ'^1 par l'immersion i_1 (0.6), φ'^1 une suite finie d'éclatements de longueur $m-1$ permise pour $\varphi_1'^*(i(Y);$

$i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$ (remarque (1.21), (iii)) et l'assertion (iii) impliquant que

$$\varphi_1'^*(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U)) \\ =(i_1(Y_1); i_{1*}(F_{11}), \ldots, i_{1*}(F_{1\alpha-1}); i_1(W_1); i_1(U_1))$$

on déduit de l'hypothèse de récurrence que φ^1 est permise pour $(Y_1; F_{11}, \ldots, F_{1\alpha-1}, F_{1\alpha} \otimes_{O_{X_1}} L; W_1; U_1)$, donc pour $\varphi_1^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ (remarque (1.23)) ce qui entraîne que φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ (remarque (1.21), (iii)).

THÉORÈME (1.46). — *Soient X un schéma tel que X_{red} soit régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X. Alors il existe une suite finie d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et telle que la donnée de résolution $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ soit résolue.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur α. Pour $\alpha=0$ c'est un cas particulier de la proposition (1.30). Supposons donc que $\alpha \geqslant 1$ et soit $(X'; i; r)=E(F_\alpha)$. Alors $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$ est une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X' (corollaire (1.41)). L'hypothèse de récurrence implique l'existence d'une suite finie d'éclatements φ', de base X', qui est permise pour $(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W); i(U))$ et telle que la donnée de résolution $\varphi'^*(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W))$ soit résolue. Soient φ la suite finie d'éclatements induite par φ' sur X (X étant considéré comme sous-schéma fermé de X' par l'immersion fermée i), $\eta : \varphi \to \varphi'$ l'immersion canonique, $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ le sommet de η. Alors φ' est la suite finie d'éclatements déduite de φ sur X' (par i), φ est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ et si

$$\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)=(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W}),$$

alors

$$\varphi'^*(i(Y); i_*(F_1), \ldots, i_*(F_{\alpha-1}); i(W)) =(\tilde{i}(\tilde{Y}); \tilde{i}_*(\tilde{F}_1), \ldots, \tilde{i}_*(\tilde{F}_{\alpha-1}); \tilde{i}(\tilde{W}))$$

(proposition (1.45)). Alors le corollaire (1.44) implique l'existence d'un morphisme de schémas $\tilde{r} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ et d'un $O_{\tilde{X}}$-module inversible L tels que $(\tilde{X}'; \tilde{i}; \tilde{r})$ soit un épaississement direct de $\tilde{X}$ isomorphe à $E(\tilde{F}_\alpha \otimes_{O_{\tilde{X}}} L)$. On déduit que la donnée de résolution $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_{\alpha-1}, \tilde{F}_\alpha \otimes_{O_{\tilde{X}}} L; \tilde{W})$ est résolue (corollaire (1.41)) ce qui implique que $(\tilde{Y}; \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha; \tilde{W})$ l'est (remarque (1.23)) ce qui démontre le théorème.

2. Modules transverses à un diviseur

DÉFINITION (2.1). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, F un O_X-module cohérent, x un point de X. On dira que F est transverse à Y en x, s'il existe un système régulier de paramètres $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ de $O_{X,x}$ et un entier α, $\alpha \geqslant 0$, tel que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x, et tel que $(z_1, \ldots, z_\alpha)$ soit une F_x-suite régulière. On dira que F est transverse à Y s'il l'est en tout point de X.

Remarque (2.2). — En gardant les notations de la définition (2.1), F est transverse à Y en x implique que Y est un diviseur à croisements normaux de X en x.

Remarque (2.3). — En gardant les notations de la définition (2.1), supposons que Y soit un diviseur à croisements normaux en x. Soient $(z_1, \ldots, z_N)$ un système régulier de paramètres de $O_{X,x}$ et α un entier, $\alpha \geqslant 0$, tels que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x. Alors on vérifie immédiatement que F est transverse à Y en x si, et seulement si $(z_1, \ldots, z_\alpha)$ est une F_x-suite régulière. D'autre part, soient U un ouvert de X contenant x et $Z_1, \ldots, Z_\alpha \in \Gamma(U, O_X)$ tels que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant \alpha$, $z_i = Z_{i,x}$. Alors les sections $Z_1, \ldots, Z_\alpha$ définissent un morphisme $\Pi : U \to \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_\alpha])$ et on constate facilement que F est transverse à Y en x si, et seulement si $F \mid U$ est Π-plat en x.

Remarque (2.4). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X, α un entier, $\alpha \geqslant 0$, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j un O_X-module cohérent et x un point de X. Alors le O_X-module cohérent $\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j$ est transverse à Y en x si, et seulement si pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j l'est.

PROPOSITION (2.5). — *Soient X un schéma régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X, F un O_X-module cohérent. Alors l'ensemble des points où F est transverse à Y est un ouvert de X.*

Démonstration. — La proposition résulte immédiatement de la remarque (2.3) et de l'ouverture de la platitude.

PROPOSITION (2.6). — *Soient X un schéma régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X, F un O_X-module cohérent, U l'ensemble des points de X où F est transverse à Y, T le sous-O_X-module de F des sections dont le support est contenu dans le diviseur Y (sous-O_X-module de Y-torsion). Alors $U \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset$.*

Démonstration. — Soit x un point de X; alors il existe un ouvert U_0 de X contenant x, des sections $Z_1, \ldots, Z_N \in \Gamma(U_0, O_X)$ tels que $(Z_{1,x}, \ldots, Z_{N,x})$ soit un système régulier de paramètres de $O_{X,x}$ et un entier α, $0 \leqslant \alpha \leqslant N$, tel que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} Z_{i,x}$ en x. Soit $\Pi : U_0 \to \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_\alpha])$ le morphisme défini par les sections $Z_1, \ldots, Z_\alpha$ et considérons F_x comme $k[T_1, \ldots, T_\alpha]$-module par π. Si S désigne le sous-$k[T_1, \ldots, T_\alpha]$-module de torsion de F_x, alors $T_x \subset S$ car si $s \in T_x$ alors il existe un entier l, $l \geqslant 0$, tel que $(\prod_{i=1}^{\alpha} Z_{i,x})^l s = 0$, ce qui implique que $(\prod_{i=1}^{\alpha} T_i)^l s = 0$, donc $s \in S$. On déduit que si $x \in U$, ce qui implique que $F \mid U$ est un module Π-plat en x (remarque (2.3)) et en particulier que F_x est un $k[T_1, \ldots, T_\alpha]$-module sans torsion. Alors $T_x = 0$, donc $x \notin \operatorname{supp}(T)$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION (2.7). — *Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, W un sous-schéma fermé de X, x un point de W. Si W n'a que des croisements normaux avec Y en x et si l'intérieur de $W \cap Y$ dans W ne contient pas x, alors O_W est transverse à Y en x.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un système régulier de paramètres $(z_1, \ldots, z_N)$ de $O_{X,x}$ et un entier α, $\alpha \geqslant 0$, tels que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x, et celui de W par certains z_i, soit $z_{i_1}, \ldots, z_{i_\beta}$. Or l'hypothèse que x n'est pas dans l'intérieur de $W \cap Y$ dans W entraîne que pour tout l, $1 \leqslant l \leqslant \beta$, i_l est strictement supérieur à α. On déduit que $(z\ , \ldots, z_\alpha)$ est une suite $O_{W,x}$-régulière car $O_{W,x} = O_{X,x}/(z_{i_1}, \ldots, z_{i_\beta})$ ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION (2.8). — *Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X, W un sous-schéma fermé de X, F un O_X-module cohérent et x un point de W. Si O_W est transverse à Y en x, et si F est normalement plat le long de W en x, alors F est transverse à Y en x.*

Démonstration. — Le O_X-module cohérent O_W étant transverse à Y en x, Y est un diviseur à croisements normaux de X en x (remarque (2.2)) et si $(z_1, \ldots, z_N)$ désigne un système régulier de paramètres de $O_{X,x}$, α un entier, $0 \leqslant \alpha \leqslant N$, tels que l'idéal de définition de Y soit engendré par $\prod_{i=1}^{\alpha} z_i$ en x, U un ouvert de X contenant x, $Z_1, \ldots, Z_\alpha \in \Gamma(U, O_X)$ tels que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant \alpha$, $z_i = Z_{i,x}$ et $\Pi : U \to \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_\alpha])$ le morphisme défini par $Z_1, \ldots, Z_\alpha$, alors O_W est Π-plat en x (remarque (2.3)). D'autre part F étant normalement plat le long de W en x, $(\bigoplus_{p \geqslant 0} \operatorname{gr}_W^p F)_x$ est $O_{W,x}$-plat. On déduit que $\bigoplus_{p \geqslant 0} \operatorname{gr}_W^p F$ est Π-plat en x, ce qui entraîne que F est Π-plat en x (E.G.A. IV, 11.3.4), donc que F est transverse à Y en x (remarque (2.3)).

DÉFINITION (2.9). — Soient X un schéma régulier, Y un diviseur de X et F un O_X-module cohérent. Pour tout entier i, $i \geqslant 0$, on définit inductivement un sous-schéma fermé $W_i(F;\ Y)$ de X de la manière suivante :

(i) $W_0(F;\ Y) = X$;

(ii) pour tout entier i, $i \geqslant 1$, $W_i(F;\ Y)$ est le sous-schéma réduit de X dont l'ensemble sous-jacent est égal à la réunion des composantes irréductibles de Sing $(W_{i-1}(F; Y))$ qui ne sont pas contenues dans Y et des composantes irréductibles du fermé de $W_{i-1}(F;\ Y)$ de non normale platitude de F le long de $W_{i-1}(F;\ Y)$ qui ne sont pas contenues dans Y.

Remarque (2.10). — En gardant les notations de la définition (2.9), la famille des sous-schémas fermés $W_i(F;\ Y)$, $i \in \mathbb{N}$, de X est une filtration décroissante de X, $W_1(F;\ Y)$ est le sous-schéma réduit de X dont l'ensemble sous-jacent est égal à la réunion des composantes irréductibles du fermé de non platitude de F qui ne sont pas contenues dans Y et si dim $X = N$, pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant N$, $\dim(W_i(F;\ Y)) \leqslant N - i$ et pour tout entier i, $i > N$, $W_i(F;\ \mathrm{Y}) = \emptyset$.

Remarque (2.11). — En gardant les notations de la définition (2.9), si U est un ouvert de X, pour tout entier i, $i \geqslant 0$, $W_i(F \mid U;\ Y \cap U) = W_i(F;\ Y) \cap U$, et si U contient $X - Y$ (en particulier si $U = X - Y$), $W_i(F;\ Y)$ est le plus petit sous-schéma fermé de X contenant $W_i(F \mid U;\ F \cap U)$ ($W_i(F;\ Y)$) est l'adhérence schématique de $W_i(F \mid U;\ Y \cap U)$ dans X). En particulier si F' est un O_X-module cohérent tel que $F' \mid (X - Y)$ soit isomorphe à $F \mid (X - Y)$, alors pour tout entier i, $i \geqslant 0$, $W_i(F';\ Y) = W_i(F;\ Y)$.

LEMME (2.12). — *Soient X un schéma régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ une donnée de résolution de type R_I sur X telle que $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ W - Y)$ soit une donnée de résolution de type $(R_I;\ 0)$ sur X, φ une suite finie d'éclatements, de base X, qui est permise pour $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W;\ W - Y)$, $(\tilde{Y};\ \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_\alpha;\ \tilde{W}) = \varphi^*(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W)$.*

Alors pour tout entier i, $i \geqslant 0$, $W_i(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} \tilde{F}_j;\ \tilde{Y})$ est le transformé strict de $W_i(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y)$ par φ.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des remarques (2.11) et (1.21), (i) et des (0.2) et (0.8).

THÉORÈME (2.13). — *Soient X un schéma régulier, Y un diviseur à croisements normaux de X, α un entier, $\alpha \geqslant 0$, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j un O_X-module cohérent, r le plus petit entier tel que $W_{r+1}(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y) = \emptyset$. Alors il existe un entier s, $0 \leqslant s \leqslant r + 1$, pour tout i, $0 \leqslant\ < s$, un morphisme de schémas* *réguliers* $f_i : X_{i+1} \to X_i$ *(où* $X_0 = X$*), pour tout* i, $0 \leqslant i \leqslant s$, *un diviseur à croisements normaux* Y_i *de* X_i *(où* $Y_0 = Y$*) et deux ouverts* U_i *et* U'_i *de* X_i *(où* $U'_0 = X_0 = X$ *et* $U_s = X_s$*) et pour tout* $i, 0 \leqslant i \leqslant s$, *et pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, *un* O_{X_i}-*module cohérent* F_{ij} *(où* $F_{0j} = F_j$*) tels que :*

(i) *pour tout* i, $0 \leqslant i \leqslant s$, $X_i = U_i \cup U'_i$;

(ii) *pour tout* $i, 0 \leqslant i \leqslant s$, *tout* j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, *et tout* x, $x \in U_i$, F_{ij} *est transverse à* Y_i *en* x;

(iii) *pour tout* i, $0 \leqslant i < s$, $Y_{i+1} = (f_i^{-1}(Y_i))_{\text{red}}$;

(iv) *pour tout* i, $0 \leqslant i < s$, *si* r_i *désigne le plus petit entier tel que*

$$W_{r_i+1}((\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{ij}) \mid U'_i;\ Y_i \cap U'_i) = \emptyset \qquad (\text{où } r_0 = r),$$

$$(Y_i \cap U'_i;\ F_{i1} \mid U'_i, \ldots, F_{i\alpha} \mid U'_i;$$

$$W_{r_i}((\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{ij}) \mid U'_i;\ Y_i \cap U'_i);\ W_{r_i}((\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{ij}) \mid U'_i;\ Y_i \cap U'_i) - Y_i)$$

est une donnée de résolution de type $(R_l;\ 0)$ *sur* U'_i, *et il existe une suite finie d'éclatements, de base* U'_i *et de sommet* X_{i+1}, *qui est permise pour cette donnée de résolution, telle que* $f_i : X_{i+1} \to X_i$ *soit le composé du morphisme composé de cette suite finie d'éclatements et de l'injection canonique de* U'_i *dans* X_i *et pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, $F_{i+1,j}$ *soit le transformé strict de* $F_{ij} \mid U'_i$ *par cette suite finie d'éclatements.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r. Soit $r \geqslant 0$, et supposons qu'on a établi le théorème pour tout r', $0 \leqslant r' < r$. L'hypothèse que $W_{r+1}(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y) = \emptyset$ implique que $(Y;\ \bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y))$ *est* une donnée de résolution de type R_l sur X, résolue sur l'ouvert dense $W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y) - Y$ de $W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y)$ (remarque (1.8), (iv)) donc $(Y;\ F_1, \ldots, F_\alpha;\ W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y);\ W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j;\ Y) - Y)$ est une donnée de résolution de type $(R_l;\ 0)$ sur X (remarque (1.22)). En appliquant le théorème (1.46) on déduit l'existence d'une suite finie d'éclatements, de base X, qui est permise pour cette donnée de résolution et telle que si $f_0 : X_1 \to X$ désigne le composé de cette suite finie d'éclatements, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{1j} le transformé strict de F_j par cette suite finie d'éclatements et Y_1 le sous-schéma fermé $(f_0^{-1}(Y))_{\text{red}}$ de X_1, $(Y_1;\ F_{11}, \ldots, F_{1\alpha};\ W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{1j};\ Y_1))$ soit une donnée de résolution de type R_l sur X_1 résolue (remarque (1.21), (i) et lemme (2.12)). On déduit que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{1j} est transverse à Y en tout point de $W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{1j};\ Y)$ (proposition (2.7) et (2.8)). Alors, si on note U_1 l'ensemble des points de X_1 où pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{1j} est transverse à Y_1 (qui est un ouvert de X_1 (proposition (2.5))) et U'_1 l'ouvert $X_1 - W_r(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{1j};\ Y_1)$ de X_1, $U_1 \cup U'_1 = X_1$. Si $r = 0$, alors $U_1 = X_1$ (car

$U_1 \supset W_0(\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{1j}; Y_1) = X_1$) et on déduit le théorème. Si $r > 0$ soit r_1 le plus petit entier tel que $W_{r_1+1}((\bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_{1j}) | U'_1; \quad Y \cap U'_1) = \emptyset$; alors $r_1 < r$(remarque (2.11)) et on déduit le théorème en appliquant l'hypothèse de récurrence au schéma régulier U'_1 le diviseur à croissements normaux $Y_1 \cap U'_1$ de U'_1 et les $O_{U'_1}$-m odules cohérents $F_{1j} | U'_1$ $(1 \leqslant j \leqslant \alpha)$.

COROLLAIRE (2.14). — *Soient X un schéma régulier de dimension N, Y un diviseur à croisements normaux de X, α un entier, $\alpha \geqslant 0$, et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j un O_X-module cohérent. Alors il existe un entier s, $0 \leqslant s \leqslant N+1$, et pour tout i, $0 \leqslant i < s$, un morphisme de schémas $f_i : X_{i+1} \to X_i$ (où $X_0 = X$) tels que si on note pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant s$, g_i le morphisme $f_0 \circ f_1 \circ \ldots \circ f_{i-1} : X_i \to X$ ($g_0 = \mathrm{id}_X$, $g_1 = f_0$), Y_i le sous-schéma fermé $(g^{-1}(Y))_{\mathrm{red}}$ de X_i (donc $Y_0 = Y$) et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{ij} le O_{X_i}-module cohérent $g_i^*(F_j)/T_{ij}$ où T_{ij} désigne le sous-O_{X_i}-module cohérent de $g_i^*(F_j)$ des sections dont le support est contenu dans le sous-schéma fermé Y_i de X_i*(1)*, on a :*

(i) *pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant s$, X_i est un schéma régulier;*

(ii) *pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant s$, Y_i est un diviseur à croisements normaux de X_i;*

(iii) *pour tout i, $0 \leqslant i < s$, l'image $f_i(X_{i+1})$ de f_i est un ouvert de X_i, f_i induit un morphisme propre de X_{i+1} sur $f_i(X_{i+1})$ et*

$$f_i | (X_{i+1} - Y_{i+1}) : (X_{i+1} - Y_{i+1}) \to (f_i(X_{i+1}) - Y_i)$$

est un isomorphisme;

(iv) *pour tout i, $0 \leqslant i < s$, si U_i désigne l'ensemble des points de X_i où pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{ij} est transverse à Y_i (qui est un ouvert de X_i* (cf. *proposition* (2.5))), *$X_i = U_i \cup f_i(X_{i+1})$;*

(v) *pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_{sj} est transverse à Y_s.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la remarque (1.21), (i) et du théorème (2.13) appliqué au schéma régulier X, au diviseur à croisements normaux Y de X et aux O_X-modules cohérents F_{0j} $(1 \leqslant j \leqslant \alpha)$ en remarquant, premièrement que l'entier r du théorème (2.13) est inférieur ou égal à la dimension de X (remarque (2.10)) et deuxièmement que si X est un schéma, Y un diviseur de X, B un sous -schéma fermé de Y, $f : \tilde{X} \to X$ le morphisme obtenu en éclatant B dans X, F un O_X-module cohérent, F', le O_X-module cohérent F/T où T désigne le sous-O_X-module cohérent de F des sections dont le support est contenu dans le diviseur Y de X, alors le transformé strict $\tilde{F}'$ de F' par l'éclatement f est isomorphe au $O_{\tilde{X}}$-module cohérent $f^*(F)/\tilde{T}$ où $\tilde{T}$ désigne le sous $O_{\tilde{X}}$-module de $f^*(F)$ des sections dont le support est contenu dans le fermé $f^{-1}(Y)$ de $\tilde{X}$.

(1) F_{0j} n'est pas nécessairement isomorphe à F_j si on ne suppose pas F_j sans Y-torsion.

Appendice

L'essentiel des résultats et des démonstrations de cet article reste valable dans le cadre de la géométrie analytique complexe, grâce à la théorie de résolution des singularités de HIRONAKA dans ce cadre ([2], [3], [4], [5], [6]), quitte à remplacer schéma par $\mathbb{C}$-espace analytique séparé dénombrable à l'infini, sous-schéma par sous-espace analytique et suite finie d'éclatements par suite propre d'éclatements.

Dans cet appendice, nous allons préciser cette dernière notion, et indiquer les modifications mineures à apporter au texte pour l'adapter au cadre de la géométrie analytique. Dans la suite, on dira simplement espace analytique pour $\mathbb{C}$-espace analytique séparé dénombrable à l'infini.

Les n^{os} (0.1) et (0.2) se transposent sans changements (pour la définition des éclatements dans ce cadre, *voir* aussi [1], chapitre 0, 2). Le n° (0.3) est remplacé par :

(0.'3) On appelle suite propre d'éclatements la donnée

$$\varphi=((X_i)_{i\in I};\ (f_{ij})_{i\leq j,\ i,\ j\in I};\ (B_i)_{i\in I-\{w\}}),$$

où (i) I est un ensemble d'indices bien ordonné possédant un plus grand élément w (on notera 0 le plus petit élément de I, et si $i\in I-\{w\}$ on notera $i+1$ le successeur de i);

(ii) $((X_i)_{i\in I};(f_{ij})_{i\leq j,\ i,\ j\in I})$ est un système projectif d'espaces analytiques et de morphismes propres, relatif à l'ensemble d'indices I;

(iii) pour tout i, $i\in I-\{w\}$, B_i est un sous-espace analytique fermé de X_i;

(iv) pour tout i, $i\in I-\{w\}$, $f_{i,\ i+1}: X_{i+1}\to X_i$ est le morphisme obtenu en éclatant B_i dans X_i;

(v) pour toute partie relativement compacte A de X_0 il n'y a qu'un nombre fini d'indices i, $i\in I$, tels que $B_i\cap f_{0i}^{-1}(A)\neq\emptyset$;

(vi) pour tout i, $i\in I-\{0\}$, qui n'est pas le successeur d'un élément de I on a $X_i=\varprojlim_{j<i} X_j$ (limite projective d'espaces analytiques qui existe grâce à (v)) et pour tout j, $j<i$, f_{ji} est le morphisme canonique.

On dit que X_0 (*resp.* X_w) est la base (resp. le sommet) de la suite propre d'éclatements φ et que le morphisme f_{0w} est le morphisme composé, ou simplement le composé de la suite propre d'éclatements φ.

Pour tout k, $k \in I$, on définit φ_k et φ^k d'une manière analogue à celle du n° (0.3) :

$$(\varphi_k = ((X_i)_{i \in I'}; (f_{ij})_{i \leqslant j,\, i, j \in I'}; (B_i)_{i \in I' - \{k\}}) \quad \text{où } I' = \{ i \in I : i \leqslant k \}$$

$$\text{et } \varphi^k = ((X_i)_{i \in I''}; (f_{ij})_{i \leqslant j,\, i, j \in I''}; (B_i)_{i \in I'' - \{w\}}) \quad \text{où } I'' = \{ i \in I : k \leqslant i \})$$

et on définit les morphismes d'une suite propre d'éclatements dans une autre de même ensemble d'indices et le composé de deux tels morphismes de manière analogue à celle des n^{os} (0.4) et (0.5), et les n^{os} (0.6) et (0.7) se transposent aussitôt.

La définition du transformé strict d'un module cohérent par une suite finie d'éclatements du n° (0.8) est remplacée par :

(0'.8) Soient

$$(\varphi_k = ((X_i)_{i \in I'} (f_{ij})_{i \leqslant j, i, j \in I'}; (B_i)_{i \in I' - \{k\}})$$

une suite propre d'éclatements, F un O_{X_0}-module cohérent. Alors il existe un système projectif unique $(X_i, F_i)_{i \in I}; (f_{ij}, u_{ij})_{i \leqslant j,\, i, j \in I}$ dans la catégorie dont les objets sont les couples d'un espace analytique X et d'un O_X-module cohérent F et les flèches sont les di-homomorphismes (un di-homomorphisme de (X', F') dans (X, F) est un couple d'un morphisme d'espaces analytiques f : $X' \to X$ et d'un morphisme de $O_{X'}$-modules $u : f^*(F) \to F'$) tel que :

(i) $F_0 = F$;

(ii) pour tout i, $i \in I - \{ w \}$, F_{i+1} est le transformé strict de F_i par l'éclatement $f_{i,\, i+1}$ et $u_{i,\, i+1} : f^*_{i,\, i+1}(F_i) \to F_{i+1}$ est la surjection canonique;

(iii) pour tout i, $i \in I - \{ 0 \}$, qui n'est pas le successeur d'un élément de I, $(X_i, F_i) = \varprojlim_{j<i} (X_j, F_j)$ (limite projective qui existe grâce à (0'.3), (v)) et pour tout j, $j < i$, (f_{ji}, u_{ji}) est le di-homomorphisme canonique.

On dit que F_w est le transformé strict de F par la suite propre d'éclatements φ.

Le reste du n° (0.8), ainsi que le n° (0.9) se transposent sans modification.

Les seules modifications à apporter dans les n^{os} (1.1) à (1.25) du paragraphe 1 sont de remplacer ouvert par ouvert de Zariski (complémentaire d'un fermé analytique) dans les n^{os} (1.4), (1.9), (1.13) et (1.14) et remplacer les n^{os} (1.19) et (1.20) par :

(1'.19) Soient X un espace analytique tel que X_{red} soit régulier et (Y;

$F_1, \ldots, F_\alpha$; W; U) une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X. On dira qu'une suite propre d'éclatements de base X :

$$\varphi = ((X_i)_{i\in I}; (f_{ij})_{i\leqslant j,\, i,\, j\in I}; (B_i)_{i\in I-\{w\}})$$
$$(\text{où } X_0 = X)$$

est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ s'il existe une famille des données $(Y_i; F_{i1}, \ldots, F_{i\alpha}; W_i; U_i)_{i\in I}$ telle que :

(i) pour tout $i, i\in I, (Y_i; F_{i1}, \ldots, F_{i\alpha}; W_i; U_i)$ est une donnée de résolution de type $(R_I; 0)$ sur X_i;

(ii) $(Y_0; F_{01}, \ldots, F_{0\alpha}; W_0; U_0) = (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$;

(iii) pour tout i, $i\in I-\{w\}$, $f_{i,\,i+1}$ est un éclatement permis pour $(Y_i; F_{i1}, \ldots, F_{i\alpha}; W_i; U_i)$ et

$$(Y_{i+1}; F_{i+1,\,1}, \ldots, F_{i+1,\,\alpha}; W_{i+1}; U_{i+1}) = f^*_{i,\,i+1}(Y_i; F_{i1}, \ldots, F_{i\alpha}; W_i; U_i);$$

(iv) pour tout $i, i\in I-\{0\}$, qui n'est pas le successeur d'un élément de I, W_i (resp. pour tout k, $1\leqslant k\leqslant\alpha$, F_{ik}) est le transformé strict de W (resp. F_k) par la suite propre d'éclatements φ_i, $U_i = f_{0i}^{-1}(U)$ et pour tout ouvert relativement compact A de X si j_0 désigne le plus grand élément de l'ensemble fini $\{j\in I :$ $j<i$ et $B_j \cap f_{0j}^{-1}(A) \neq \emptyset\}$ (*cf.* (0.3), (v)), alors

$$Y_i \cap f_{0i}^{-1}(A) = (f_{j_0+1,\,i}^{-1}(Y_{j_0+1})) \cap f_{0i}^{-1}(A).$$

(1'.20) En gardant les notations de (1'.19) la famille $(Y_i; F_{i1}, \ldots, F_{i\alpha}; W_i; U_i)_{i\in I}$ vérifiant les conditions (i) à (iv) est unique, et on dira que $(Y_w; F_{w1}, \ldots, F_{w\alpha}; W_w)$ resp. $(Y_w; F_{w1}, \ldots, F_{w\alpha}; W_w; U_w)$ est le transformé de $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$) par la suite propre d'éclatements φ qu'on notera $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ (resp. $\varphi^*(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$).

Le théorème (1.26) reste vrai ([2], [3], [4], [5], [6]) et le corollaire (1.27) et les lemmes (1.28) et (1.29) se transposent immédiatement. Par contre, la démonstration de la proposition (1.30) n'est plus valable car elle utilise l'existence de l'adhérence schématique. Il serait probablement possible de démontrer la proposition (1.30) dans le cadre de la géométrie analytique en utilisant des méthodes de jardinage analogues à celles de HIRONAKA pour la résolution des singularités des espaces analytiques, mais cela dépasse nettement le cadre de ce travail. Toutefois, grâce au corollaire (1.27), on pourra établir les résultats de ce travail qui en dépendent (théorèmes (1.46) et (2.13) et corollaire (2.14)) moyennant certaines hypothèses restrictives qu'on précisera par la suite.

Les n^{os} (1.31) à (1.45) se transposent aussitôt. Le lemme (1.42) n'a pas d'équivalent analytique évident, mais il sert uniquement à établir la proposition (1.43) qu'on peut, sans difficulté, soit démontrer directement dans le cadre analytique, soit déduire du cas algébrique (*cf.* [1], chapitre 0, §2). Les démonstrations du corollaire (1.44) et de la proposition (1.45) s'adaptent facilement pour les suites propres d'éclatements en raisonnant par récurrence transfinie.

Pour démontrer l'analogue du théorème (1.46) ne disposant que du corollaire (1.27) (au lieu de la proposition (1.30)) on voit immédiatement qu'il suffit de remplacer le théorème (1.46) par l'énoncé suivant :

(1'.46) Soient X un espace analytique régulier, $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$ une donnée de résolution de type $(R_l; 0)$ sur X. Si pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j est engendré par un nombre fini de ses sections globales, alors il existe une suite propre d'éclatements φ, de base X, qui est permise pour $(Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W; U)$, et telle que la donnée de résolution $\varphi^* (Y; F_1, \ldots, F_\alpha; W)$ soit résolue.

En effet alors le O_X-module cohérent $F = \bigoplus_{j=1}^{\alpha} F_j$ est engendré par un nombre fini $t_1, \ldots, t_p$ de ses sections globales qui définissent une immersion fermée de $E(F)$ dans $X \times \mathbb{C}^p$, ce qui permet d'appliquer le corollaire (1.27) à $E(F)$ en prenant $X' = X \times \mathbb{C}^p$ et $Y' = Y \times \mathbb{C}^p$, et terminer la démonstration comme dans le théorème (1.46) en tenant compte de la remarque (1.22).

Les n^{os} (2.1) à (2.12) se transposent aussitôt en remplaçant dans la proposition (2.5) ouvert par ouvert de Zariski, et on déduit de (1'.46) le théorème (2.13) et le corollaire (2.14) en supposant X de dimension finie et que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$, F_j soit engendré par un nombre fini de ses sections globales. En plus, on peut préciser qu'il est possible de choisir les ouverts U et U' du théorème (2.13) de telle sorte qu'ils soient des ouverts de Zariski.

BIBLIOGRAPHIE

E.G.A.I., GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — Éléments de Géométrie algébrique I, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 166, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag, 1971.

E.G.A. II, III, IV, GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — Éléments de Géométrie algébrique II, III, IV (*Publ. math. I.H.E.S.*, t. 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1961-1967).

[1] HIRONAKA (H.). — Résolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of math.*. t. 79, 1964, p. 109-326.

[2] HIRONAKA (H.). — Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space (Summary), *Math. Inst., Warwick Univ.*, England, 1971.

[3] HIRONAKA (H.). — Flattening theorem in complex analytic geometry, *Am. J. of Math.*, t. 97, 1975, p. 503-547.

[4] HIRONAKA (H.). — Introduction to the theory of infinitely near singular points, *Memorias de Matemàtica del Instituto Jorge Juan*, 28; Consejo Superior de Investigaciones Cientìficas, Madrid, 1974.

[5] HIRONAKA (H.) AROCA (J. M.) et VICENTE (J. L.). — The theory of the maximal contact, *Memorias de Matemàtica del Instituto Jorge Juan*, 29; Consejo Superior de Investigaciones Cientìficas, Madrid, 1975.

[6] AROCA (J. M.), HIRONAKA (H.) et VICENTE (J. L.). — Desingularization theorems, *Memorias de Matemàtica del Instituto Jorge Juan*, 30; Consejo Superior de Investigaciones Cientìficas, Madrid, 1977.