BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE RAMIS

Une remarque sur les complexes différentiels de fibrés holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 337-340
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__337_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 337-340.

UNE REMARQUE SUR LES COMPLEXES DIFFÉRENTIELS DE FIBRÉS HOLOMORPHES

PAR

J.-P. RAMIS

RÉSUMÉ. — On travaille sur un ouvert de C^n. Un complexe différentiel de fibrés holomorphes est un complexe dont les objets sont des faisceaux localement libres de type fini et les morphismes des opérateurs différentiels d'ordre fini, à coefficients holomorphes. Si un tel objet est borné et acyclique, il est localement homotope à zéro; les flèches de l'homotopie étant des opérateurs différentiels d'ordre fini.

ABSTRACT. — We work on an open subset of C^n. A differentiable complex of fiber bundles is a complex whose objets are locally free sheaves of finite type and whose morphisms are finite order differential operators. If such an objet is acyclic, then it is locally homotopic to zero; homotopy maps being finite order differential operators.

Dans toute la suite X désignera un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On notera O_X le faisceau structural de X, Ω_X le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré maximal sur X, et D_X le faisceau d'anneaux (non commutatifs) des opérateurs différentiels d'ordre fini à coefficients dans O_X. Pour les concepts « non classiques » introduits plus loin, on se reportera à RAMIS [1].

Nous appellerons complexe différentiel de fibrés holomorphes un complexe dont les objets sont des faisceaux *localement libres de type fini* sur O_X et les morphismes des *opérateurs différentiels d'ordre fini* (à coefficients holomorphes).

Le résultat essentiel établi ci-dessous est que si un complexe différentiel borné de fibrés holomorphes est *acyclique*, il est *différentiablement homotope à zéro* (localement); *cf.* théorème 2.

DÉFINITION 1. — *Soient $S^\cdot$ et $T^\cdot$ des complexes différentiels de fibrés holomorphes. Un morphisme de complexes $u^\cdot : S^\cdot \to T^\cdot$ est dit différentiel, si les u^i sont des opérateurs différentiels d'ordre fini. On dira que $u^\cdot$ est un quasi-*

(*) Texte reçu le 15 février 1979, révisé le 24 septembre 1979.

J.-P. RAMIS, Institut de Recherche mathématique avancée, Laboratoire associé au C.N.R.S., Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/337/$ 5.00

isomorphisme différentiel si c'est un morphisme différentiel et si c'est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels. Une homotopie* $k^{\cdot}$ $(k^i : S^i \to T^{i-1})$ *est dite différentielle si les* k^i *sont des opérateurs différentiels d'ordre fini. On dira que* $S^{\cdot}$ *et* $T^{\cdot}$ *sont différentiablement homotopes s'il existe des morphismes différentiels* $u^{\cdot} : S \to T^{\cdot}$ *et* $v^{\cdot} : T^{\cdot} \to S^{\cdot}$ *tels que* $v^{\cdot} u^{\cdot}$ (resp. $u^{\cdot} v^{\cdot}$) *soit différentiablement homotope à* $\mathrm{id}_{S^{\cdot}}$ (resp. $\mathrm{id}_{T^{\cdot}}$).

THÉORÈME 2. — *Soit* $S^{\cdot}$ *un complexe différentiel borné de fibrés holomorphes sur l'ouvert* X *de* $\mathbb{C}^n$. *On suppose* $S^{\cdot}$ *acyclique. Alors* (quitte à restreindre X) *il existe une homotopie différentielle* $k^{\cdot} : S^{\cdot} \to S^{\cdot}$ *entre* $\mathrm{id}_{S^{\cdot}}$ *et* 0.

COROLLAIRE 3. — *Soient* $S^{\cdot}$ *et* $T^{\cdot}$ *deux complexes différentiels bornés de fibrés holomorphes sur* X. *Soit* $u^{\cdot} : S^{\cdot} \to T^{\cdot}$ *un quasi-isomorphisme différentiel. Alors, quitte à restreindre* X, $u^{\cdot}$ *réalise une homotopie différentielle entre* $S^{\cdot}$ *et* $T^{\cdot}$.

Nous allons d'abord déduire ce corollaire du théorème 2 :

On note $C^{\cdot}$ le cylindre de $u^{\cdot}$. On a $C^n = S^n \oplus T^{n-1}$ et la différentielle de $C^{\cdot}$ s'écrit $\delta^{\cdot} : (s, t) \to (T(d_S^{\cdot})(s), T(u^{\cdot})(s) + d_{T^{\cdot}}^{\cdot}(t))$. Soit $k^{\cdot}$ un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de degré -1 du faisceau gradué $C^{\cdot}$; il s'écrit

$$k^{\cdot} : \quad (s, t) \to (T(k_{S^{\cdot}}^{\cdot})(s) + v^{\cdot}(t),\ T(w^{\cdot})(s) + k_{T^{\cdot}}^{\cdot}(t)),$$

avec $k_{S^{\cdot}}^{\cdot} : S^{\cdot} \to S^{\cdot}$ de degré -1, $k_{T^{\cdot}}^{\cdot} : T^{\cdot} \to T^{\cdot}$ de degré -1, $v^{\cdot} : T^{\cdot} \to S^{\cdot}$ de degré 0 et $w^{\cdot} : S^{\cdot} \to T^{\cdot}$ de degré -2. Si $k^{\cdot}$ est formé d'opérateurs différentiels d'ordre fini, il en est évidemment de même pour $k_{S^{\cdot}}^{\cdot}$, $k_{T^{\cdot}}^{\cdot}$, $v^{\cdot}$ et $w^{\cdot}$. Si $k^{\cdot}$ réalise une homotopie entre $\mathrm{id}_{C^{\cdot}}$ et 0, on a donc

$$T(k^{\cdot})\delta^{\cdot} + T^{-1}(\delta^{\cdot})k^{\cdot} = \mathrm{id}_{C^{\cdot}}$$

d'où l'on déduit

$$T(k_{S^{\cdot}}^{\cdot})d_{S^{\cdot}} + T^{-1}(d_{S^{\cdot}})k^{\cdot}_{S^{\cdot}} = \mathrm{id}_{S^{\cdot}} - v^{\cdot} u^{\cdot},$$

$$T(k_{T^{\cdot}}^{\cdot})d_{T^{\cdot}} + T^{-1}(d_{T^{\cdot}})d_{T^{\cdot}} = \mathrm{id}_{T^{\cdot}} - u^{\cdot} v^{\cdot},$$

et

$$T(v^{\cdot})d_{T^{\cdot}} + d_{S^{\cdot}} v^{\cdot} = 0.$$

On a ainsi établi le :

LEMME 4. — *Avec les notations ci-dessus, si* $k^{\cdot}$ *réalise une homotopie différentielle entre* $\mathrm{id}_{C^{\cdot}}$ *et* 0, $v^{\cdot}$ *est un morphisme de complexes de* $T^{\cdot}$ *dans* $S^{\cdot}$ *et* $k_{S^{\cdot}}^{\cdot}$ *et* $k_{T^{\cdot}}^{\cdot}$ *réalisent respectivement des homotopies différentielles entre* $v^{\cdot} u^{\cdot}$ *et* $\mathrm{id}_{S^{\cdot}}$ *d'une part, et* $u^{\cdot} v^{\cdot}$ *et* $\mathrm{id}_{T^{\cdot}}$ *d'autre part.*

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le corollaire 3 :

Si $u^{\cdot}$ est un quasi-isomorphisme différentiel, le cylindre $C^{\cdot}$ est acyclique, et, d'après le théorème 2, il existe une homotopie différentielle $k^{\cdot}$ entre $\mathrm{id}_{C^{\cdot}}$ et 0. On conclut en utilisant le lemme 4.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.

On suppose $S^{\cdot}$ de la forme

$$O_X^{m_0} \xrightarrow{D_0} O_X^{m_1} \xrightarrow{D_1} \ldots \xrightarrow{D_{r-1}} O_X^{m_r}.$$

A partir de $S^{\cdot}$ on fabrique les complexes

$$S^{*\cdot} : \ \Omega_X^{m_r} \xrightarrow{D^*_{r-1}} \ldots \xrightarrow{D^*_0} \Omega_X^{m_0}; \qquad L^{\cdot} : \ D_X^{m_r} \xrightarrow{D^*_{r-1}} \ldots \xrightarrow{D^*_0} D_X^{m_0}$$

et $L^{\cdot\infty} : D_X^{\infty} \bigotimes_{D_X} L^{\cdot}$ (les D_i opèrent à droite).

Remarque 5 (due à Z. Mebkhout). — On a $L^{\cdot\infty} = \mathit{Homtop}_{\mathbf{C}}(S^{\cdot}; O_X)$ (la théorie de ce foncteur restant à faire).

Le théorème 2 résultera immédiatement de la :

PROPOSITION 6. — *Si $S^{\cdot}$ est acyclique, $L^{\cdot}$ est aussi acyclique.*

En effet, si $L^{\cdot}$ est acyclique, comme c'est un complexe parfait de D_X-modules, il est homotope à zéro par une homotopie D_X linéaire. On a $S^{\cdot} = \mathit{Hom}_{D_X}(L^{\cdot}, O_X)$, ce qui permet de fabriquer l'homotopie cherchée $k^{\cdot}$.

Il reste à établir la proposition 6. Le D_X-module D_X^{∞} étant fidèlement plat [3], il suffit d'établir le :

LEMME 7. — *Si $S^{\cdot}$ est acyclique, $L^{\cdot\infty}$ est aussi acyclique.*

Or, il y a un processus « transcendant » *exact* qui conduit de $S^{\cdot}$ à $L^{\cdot\infty}$: $L^{\cdot\infty} \approx H^n_{\Delta}(O_{X_1} \hat{\bigotimes}_{\mathbf{C}} S^{*\cdot}_{X_2})$. (On prend deux exemplaires X_1 et X_2 de X; Δ est la diagonale de $X_1 \times X_2$. On transporte $S^{*\cdot}$ sur X_2; H^n_{Δ} signifie que l'on prend les H^n_{Δ} des objets du complexe $O_{X_1} \hat{\bigotimes}_{\mathbf{C}} S^{*\cdot}_{X_2}$ et que l'on met les flèches par fonctorialité.) Plus précisément, on a le :

LEMME 8. — *Soit D un opérateur différentiel d'ordre fini, opérant à droite, de Ω^p_X dans Ω^q_X. Les diagrammes* (*ou D_i*, 1, 2, *transformé de D par l'isomorphisme $D_X \to D_{X_i}$, opère à droite*).

(i)
$$\begin{array}{ccc} H^n_{[\Delta]}(O_{X_1} \hat{\bigotimes}_{\mathbf{C}} \Omega^p_{X_2}) & \xrightarrow{D_2} & H^n_{[\Delta]}(O_{X_1} \hat{\bigotimes}_{\mathbf{C}} \Omega^q_{X_2}) \\ \psi^p \big\downarrow \wr & & \wr \big\downarrow \psi^q \\ D^p_{X_1} & \xrightarrow{D_1} & D^q_{X_1} \end{array}$$

et

$$\text{(ii)}\qquad \begin{array}{ccc} H^n_\Delta(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}}\Omega^p_{X_2}) & \xrightarrow{D_2} & H^n_\Delta(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}}\Omega^q_{X_2}) \\ {\scriptstyle\varphi^p}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle\varphi^q} \\ (D^\infty_{X_1})^p & \xrightarrow{D_1} & (D^\infty_{X_1})^q \end{array}$$

sont commutatifs.

L'assertion (ii) est le lemme Additif II.5 de [2]; l'assertion (i) s'établit de façon analogue.

La proposition 6 résulte des trois lemmes suivants :

LEMME 9. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $S^\bullet$ *est acyclique;*
(ii) *son transposé* $S^{*\bullet}$ *est acyclique.*

C'est un résultat classique, *cf.* par exemple [1].

LEMME 10. — *Si* $S^{*\bullet}$ *est acyclique,* $O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2}$ *est acyclique.*

Pour un ouvert de Stein U_2 *de* X_2, *la suite*

$$\ldots \to 0 \to \Gamma(U_2; \Omega^{m_r}_{X_2}) \to \ldots \to \Gamma(U_2; \Omega^{m_s}_{X_2}) \to 0 \to \ldots$$

est une suite exacte de **FN***; par tensorisation par le* **FN** $O(U_1)$, *on obtient encore une suite exacte. On passe ensuite à la limite inductive.*

LEMME 11. — *Si* $O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2}$ *est exacte,* $H^n_\Delta(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2})$ *(et donc* $\varphi^\bullet(H^n(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2}))$ *est exacte.*

La diagonale Δ est lisse de codimension n dans $X_1 \times X_2$. On a donc, pour tout fibré holomorphe F, $H^i_\Delta(F)=0$ pour $i \neq n$. Il en résulte que $\mathrm{H}^n(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2}) = \mathcal{T}^n\mathbf{R}\Gamma_\Delta(O_{X_1}\hat{\otimes}_{\mathbf{C}} S^{*\bullet}_{X_2})$ est exacte.

Remarque 12. — Dans le calcul de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}(S^\bullet)$ et $S^\bullet_{X\hat{|}Y}$, on peut « localiser » $S^\bullet$ par les quasi-isomorphismes différentiels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] RAMIS (J. P.). — Variations sur le thème « GAGA », *Séminaire Lelong P.-Skoda H.*, *Lecture Notes* n° 694, (Springer-Verlag, 1978).

[2] RAMIS (J. P.). — Additif II à [1], Preprint I.R.M.A. Strasbourg, janvier 1978.

[3] SATO (M.), KASHIWARA, KAWAI (T.). — Hyperfunctions and pseudo differential equations, *Lecture Notes* 287, 1973, p. 265-529.