BULLETIN DE LA S. M. F.

JOËL BRIANÇON
J.P.G. HENRY

Équisingularité générique des familles de surfaces à singularité isolée

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 259-281
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__259_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 259-281.

ÉQUISINGULARITÉ GÉNÉRIQUE DES FAMILLES DE SURFACES A SINGULARITÉ ISOLÉE (*)

PAR

J. BRIANÇON et J. P. G. HENRY

RÉSUMÉ. — Nous caractérisons à l'aide d'invariants numériques l'« équisingularité générique » au sens de ZARISKI d'une famille de germes de surfaces à singularité isolée de $\mathbb{C}^3$.

Rappelons qu'une famille $X \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ de surfaces à singularité isolée est génériquement équisingulière au sens de ZARISKI si la famille formée par les contours apparents pour des directions de projection dans un ouvert dense est une famille de courbes planes à nombre de Milnor constant.

Nous prouvons que cette condition équivaut à la constance des nombres de Milnor des surfaces et de leurs sections planes génériques ainsi que du nombre de doubles plis évanescents et du nombre de fronces évanescentes. Nous montrons que ces deux derniers entiers sont des invariants analytiques.

ABSTRACT. — We show that the constancy of some numerical invariants is equivalent to the "generic equisingularity" in ZARISKI's sense for a family of isolated singularities of surfaces of $\mathbb{C}^3$. Let us recall the definition of ZARISKI's generic equisingularity for a family $X \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ of isolated singularities of surface: we ask if the family of discriminants for a generic projection on $\mathbb{C}^2 \times Y$ is an equisingular family of plane curves.

We show that this condition is equivalent to the constancy of four numbers: the Milnor number of the surface, the Milnor number of its generic plane section, and the number of vanishing double folds and vanishing cusp-folds of the surface. We prove that these last two are also analytic invariants thus getting that generic equisingularity is stronger than the Whitney conditions along the singular locus and weaker than analytic triviality.

Introduction

Nous nous proposons de caractériser « l'équisingularité générique » au sens de ZARISKI d'une famille de germes de surfaces à singularité isolée de $\mathbb{C}^3$ à l'aide d'invariants numériques.

(*) Texte reçu le 21 mai 1979.

J. BRIANÇON et J.-P. HENRY, Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice et Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, Plateau de Palaiseau, Laboratoire de Recherche associé au C.N.R.S. n° 169, 91128 Palaiseau Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/259/$ 5.00

Suivant O. Zariski [Z], rappelons quelques définitions dans le cas particulier d'un germe X_0 de surface à l'origine de $\mathbb{C}^3$, à singularité isolée, définie par l'équation $f(x, y, z)=0$; deux éléments

$$\mathbf{x}=\sum a_{i,j,k}\, x^i\, y^j\, z^k \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y}=\sum b_{i,j,k}\, x^i\, y^j\, z^k$$

de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}$ forment un système de paramètres lorsque :

(*a*) $(x, y, z)=0$ est une solution isolée des équations $\mathbf{x}(x, y, z)=\mathbf{y}(x, y, z)=f(x, y, z)=0$;

(*b*) les formes linéaires initiales de **x** et **y** sont indépendantes. Un système de paramètres $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définit une projection $\pi_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ de X_0 sur le plan $\mathbb{C}^2$: $\pi_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(x, y, z)=(\mathbf{x}(x, y, z), \mathbf{y}(x, y, z))$; la projection est linéaire si **x** et **y** sont des formes linéaires. Le contour apparent de X_0 pour le système de paramètres $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le lieu discriminant de $\pi_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$. La direction de la courbe lisse $\mathbf{x}=\mathbf{y}=0$ est la direction $d_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ de la projection $\pi_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$.

Nous savons qu'il existe un ouvert non vide de directions, U^1, tel que la famille des contours apparents de X_0 pour la direction linéaire d variant dans U^1 est une famille équisingulière de courbes planes à singularité isolée [BS_1]; le contour apparent de X_0 pour une direction linéaire d de U^1 est appelé le contour apparent linéaire générique.

De même, on démontre l'existence d'un nombre fini de polynômes $(g_i)_{i=1\ldots s}$ en les variables $a=(a_{i,j,k})$ et $b=(b_{i,j,k})$ tels que, lorsque a et b varient dans le complémentaire U^∞ des zéros des polynômes $(g_i)_{i=1\ldots s}$, la famille des contours apparents de la projection $\pi_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ est une famille équisingulière de courbes planes; cela permet de définir le contour apparent générique.

Nous dirons qu'une famille $X \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ de surfaces à singularité isolée est génériquement équisingulière si la famille formée par les contours apparents génériques est une famille équisingulière de courbes planes.

Rappelons maintenant que, pour une hypersurface à singularité isolée X_0 de $\mathbb{C}^n$, B. Teissier a introduit la suite

$$\mu^{(*)}(X_0)=(\mu^{(n)}(X_0), \mu^{(n-1)}(X_0), \ldots, \mu^{(j)}(X_0), \ldots, \mu^{(0)}(X_0)=1)$$

où $\mu^{(j)}(X_0)$ est le nombre de Milnor de la section de X_0 par un sous-espace linéaire général de dimension j; il a démontré [T_1] que si $\mu^{(*)}(X_t)$ est constant dans une famille $X \subset \mathbb{C}^n \times Y$ d'hypersurfaces à singularité isolée paramétrée par un espace lisse Y, le couple (X, Y) vérifie les conditions de Whitney. J. Briançon et J.-P. Speder ont montré dans [BS_2] l'implication réciproque.

On sait d'autre part, grâce au résultat de VARCHENKO dans [V] que pour une famille de surfaces $X \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ à singularité isolée, l'équisingularité de la famille des contours apparents pour une direction transverse à X_0 implique

$$\mu^{(*)}(X_t) = (\mu^{(3)}(X_t), \mu^{(2)}(X_t), \mu^{(1)}(X_t), \mu^{(0)}(X_t))$$

constant; on se demande donc naturellement quels invariants numériques ajouter à $\mu^{(*)}(X_t)$ pour obtenir l'équisingularité générique.

J. BRIANÇON et J.-P. SPEDER ont répondu à cette question dans le cas où on ne considère que les projections *linéaires* [BS_1]. Le contour apparent pour une projection linéaire générique de la fibre générique d'une déformation mini-verselle de X_0 n'a que des points doubles ordinaires en nombre $k(X_0)$ et des cusps en nombre $\varphi(X_0)$ appelés respectivement nombre de double-plis évanescents et nombre de fronces évanescentes de X_0; la famille des contours apparents de $X = (X_t)_{t \in Y}$ pour une projection linéaire générique est équisingulière si et seulement si les nombres $\mu^{(*)}(X_t)$, $\varphi(X_t)$ et $k(X_t)$ sont constants.

Après avoir rappelé ces résultats, nous démontrons que ces nombres $\varphi(X_0)$ et $k(X_0)$ sont en fait des *invariants analytiques* de la surface X_0; que les contours apparents de X_0 pour une projection linéaire générique et pour une projection générique ont même type topologique. L'équisingularité générique pour une famille de surfaces à singularité isolée équivaut donc à la constance des invariants $\mu^{(*)}(X_t)$, $\varphi(X_t)$ et $k(X_t)$. En conclusion, pour une famille de surfaces à singularité isolée, l'équisingularité générique est vraie sur un ouvert dense de l'espace des paramètres; c'est une notion strictement plus forte que les conditions de Whitney (« équisingularité différentiable » dans le langage de O. ZARISKI [Z]) d'après l'exemple de J. BRIANÇON et J.-P. SPEDER [BS_3], et strictement plus faible que la trivialité analytique. Ce passage du linéaire au non linéaire n'est qu'un petit pas, dans le cas des familles de surfaces, vers une réponse aux questions de O. ZARISKI : l'équisingularité de la famille des contours apparents pour une direction transverse implique-t-elle l'équisingularité générique?

Notations

X_0 désigne un germe de surface à singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^3$; si d est une direction de $\mathbb{C}^3$, nous notons π_d la restriction à X_0 de la projection linéaire de $\mathbb{C}^3$ parallèlement à d sur un plan transverse; le système linéaire de coordonnées (x, y, z) est adapté à d si l'axe des z a pour direction d. Lorsque cet axe n'est pas contenu dans X_0, la projection π_d est finie et X_0 peut être définie par son polynôme de Weierstrass $f(x, y, z)$.

Le lieu critique C_d de π_d est alors défini par les équations

$$f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

et le contour apparent Δ_d de X_0 pour la direction d est la courbe du plan $z=0$ définie par l'équation $D_d(x, y)=0$ où D_d est le discriminant du polynôme $f(x, y, z)$. D'autre part nous notons $\mu = \mu^{(3)}(X_0)$ le nombre de Milnor de X_0, $\mu^{(2)}(X_0)$ le nombre de Milnor d'une section plane générique de X_0, $\mu^{(1)}(X_0) = m-1$ (m est la multiplicité de X_0); B. TEISSIER a montré ([T_1], chap. I, prop. 2.10) que

$$\mu^{(*)}(X_0) = (\mu^{(3)}(X_0), \mu^{(2)}(X_0), \mu^{(1)}(X_0), \mu^{(0)}(X_0) = 1)$$

est un invariant analytique de X_0.

Dans le cas d'une famille de surfaces, nous supposons que la situation est la suivante : X est un germe d'hypersurface à l'origine de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^p$ contenant $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^p$ et tel que le lieu singulier relatif (à la projection canonique de X sur Y) soit Y; pour $t \in Y$ (assez petit), la fibre X_t de cette projection est alors un germe de surface à singularité isolée de $\mathbb{C}^3 \times \{t\}$. Nous utiliserons la notation $(X \rightleftarrows Y)$ pour une telle famille.

Étant donné un idéal I de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ primaire pour l'idéal maximal, nous notons $e(I)$ sa multiplicité, $\overline{I}$ sa clôture intégrale; si I est engendré par une suite régulière $f_1, \ldots, f_n$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, nous notons

$$e(I) = e(f_1, \ldots, f_n) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}}{I} \right).$$

Étant donné un idéal J de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0}$ définissant un germe de sous-ensemble analytique

$$Z = \operatorname{supp} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0}}{J} \right)$$

supposé fini sur $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^p$, nous notons Z_t la fibre au-dessus de t de la projection canonique de Z sur Y, J_t l'idéal qui définit Z_t dans un voisinage de 0 de $\mathbb{C}^n \times \{t\}$. Lorsque J est engendré par une suite régulière $(F_1, \ldots, F_n)$, Z est fini et plat sur Y, donc la colongueur de J_t est constante pour t assez petit

$$e(J_0) = e(J_t) = \sum_{z \in |Z_t|} e_z(J_t)$$

(où $e_z(J_t)$ est la multiplicité de l'idéal J_t dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z}$).

1. Projections linéaires génériques

Nous supposons la direction d transverse à X_0; cela implique que la multiplicité du contour apparent Δ_d est $\mu^{(2)}(X_0)+\mu^{(1)}(X_0)$ (cor. (3.2.4) [BS$_1$]). De plus nous supposons que ce contour apparent est réduit, ce qui est vrai lorsque d appartient à un ouvert dense de directions (prop. (3.3.4) [BS$_1$]). Construisons alors la déformation mini-verselle de X_0 : soient $(e_1, \ldots, e_\tau)$ des fonctions analytiques au voisinage de 0 dont les classes forment une base de l'espace vectoriel

$$T^1_{X_0}=\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}}{(f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)}.$$

Appelons Z l'hypersurface lisse de $\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^\tau$ définie, au voisinage de 0, par l'équation

$$F(x, y, z; a_1, a_2 \ldots a_\tau)\equiv f(x, y, z)+\textstyle\sum_{i=1}^{\tau} a_i\, e_i(x, y, z)=0$$

et $p : Z\to\mathbb{C}^\tau$ l'application induite par la projection canonique.

J. F. Mattei a démontré ([M], p. 5) qu'il existe un ouvert de Zariski dense de Ω_d dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^\tau$ tel que, pour $a\in\Omega_d$, le contour apparent pour la direction d de la fibre $X_a=p^{-1}(a)$ (qui est lisse) n'a pour singularités que des points doubles ordinaires et des cusps, en nombre constant dans Ω_d, tendant vers zéro lorsque a tend vers zéro : « évanescents ».

Nous notons $\varphi_d(X_0)$ le nombre de cusps : nous l'appelons le nombre de fronces évanescentes de X_0 pour la direction d; et nous notons $k_d(X_0)$ le nombre de points doubles : nous l'appelons le nombre de double-plis évanescents de X_0 pour la direction d.

Ces nombres ne dépendent pas du choix de $(e_1, e_2, \ldots, e_\tau)$ fait pour construire la déformation mini-verselle; en effet J. Briançon et J.-P. Speder ont montré dans [BS$_1$] :

Proposition 1.1. — *Soit d une direction transverse à X_0, pour laquelle le contour apparent Δ_d de X_0 pour la direction d soit réduit;*

(*a*) *la multiplicité de Δ_d est $\mu^{(2)}(X_0)+\mu^{(1)}(X_0)$;*

(*b*) *le nombre de Milnor de Δ_d est*

$$\mu(\Delta_d)=\mu^{(3)}(X_0)-\mu^{(1)}(X_0)+2\,k_d(X_0)+3\,\varphi_d(X_0)+1;$$

(*c*) *soit $f(x, y, z)=0$ une équation de X_0 dans un système linéaire de coordonnées adapté à d; le nombre de fronces évanescentes de X_0 pour la direction d est donné par*

$$\varphi_d(X_0)=e\left(f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right).$$

Preuve. — Donnons une idée de la démonstration de la proposition (1.1). Soit $X \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ une déformation « générique » de X_0, c'est-à-dire telle que pour t non nul assez petit, la fibre X_t soit lisse, et telle que son contour apparent pour la direction d ait $\varphi_d(X_0)$ cusps et $k_d(X_0)$ points doubles ordinaires; notons encore $F(x, y, z; t)$ le polynôme (en z) de Weierstrass définissant X, $D_d(x, y; t)$ le discriminant de F définissant le contour apparent de X pour la direction d de l'axe des z. Nous allons calculer la multiplicité d'intersection N à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de $D_d(x, y; 0)$ et $\partial D_d/\partial y\,(x, y; 0)$ lorsque l'axe des y est transverse au contour apparent Δ_d de X_0 :

(1) $N=\mu(\Delta_d)+\nu(\Delta_d)-1$ où $\mu(\Delta_d)$ est le nombre de Milnor de Δ_d et $\nu(\Delta_d)=\mu^{(2)}(X_0)+\mu^{(1)}(X_0)$ sa multiplicité ([T$_1$] chap. II, prop. 1.2);

(2) Pour t non nul assez petit, N est le nombre de points d'intersection de $D_d(x, y; t)=0$ et $\partial D_d/\partial y\,(x, y; t)=0$ comptés avec multiplicité; en un point double ordinaire cette multiplicité est 2, et elle est égale à 3 dans le cas d'un cusp, pourvu qu'une tangente en un tel point ne soit pas parallèle à l'axe des y (ce que nous pouvons supposer en choisissant l'axe des y non limite de telles tangentes). Enfin, un calcul élémentaire montre que la contribution à N des points lisses du contour apparent de X_t où la tangente est parallèle à l'axe des y est égale à

$$e\left(F, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_t = e\left(f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0)$$

([T$_1$] chap. II, prop. 1.2). La comparaison entre les évaluations (1) et (2) de N donne la formule (b) de la proposition.

La formule (c) résulte de ce qu'un cusp du contour apparent de X_t ne peut provenir que d'un point de X_t où la projection est du type « fronce de Whitney »; et cela a lieu si et seulement si en ce point la multiplicité d'intersection de $(F, \partial F/\partial z, \partial^2 F/\partial z^2)$ est égale à 1. Donc

$$\varphi_d(X_0) = e\left(F, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_t = e\left(f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right). \quad \blacksquare$$

Il résulte de la proposition (1.1) et de la semi-continuité supérieure des multiplicités, que pour d appartenant à un ouvert dense $\mathscr{V}$ de directions, $\varphi_d(X_0)$ est constant minimal ($\varphi_d(X_0)=\varphi(X_0)$ nombre de fronces évanescentes) et $k_d(X_0)$ est constant ($k_d(X_0)=k(X_0)$ nombre de double-plis évanescents); lorsque d varie dans $\mathscr{V}$, le nombre de Milnor du contour apparent Δ_d est constant, et donc son type topologique [L$_1$].

Dans le cas d'une famille de surfaces à singularité isolée on a (prop. (3.5.1) et th. (3.5.3) de [BS_1]) :

PROPOSITION 1.2. — *Si* ($X \rightleftarrows Y$) *est une famille de surfaces à singularité isolée, le nombre* $\varphi(X_t)$ *de fronces évanescentes de* X_t *est une fonction semi-continue supérieurement de* $t \in Y$.

THÉORÈME 1.3. — *Soit* ($X \rightleftarrows Y$) *une famille de surfaces à singularité isolée; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un ouvert dense* $\mathscr{V}$ *de direction de* $\mathbb{C}^3$ *tel que, pour toute direction* d *de* $\mathscr{V}$, *la famille formée par les contours apparents de* X_t *pour la direction* d *soit une famille équisingulière de courbes planes à singularité isolée, au voisinage de* $0 \in Y$.

(ii) $(\mu^{(*)}(X_t), \varphi(X_t), k(X_t))$ *sont constants au voisinage de* $0 \in Y$.

2. Le nombre de fronces évanescentes

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que le nombre $\varphi(X_0)$ de fronces évanescentes est un invariant analytique. Faisons tout d'abord quelques remarques :

Remarque 2.1. — On suppose la direction d de l'axe des z générique; pour montrer que $\varphi_d(X_0)=\varphi(X_0)$ et $k_d(X_0)=k(X_0)$ sont minimaux pour tous les changements de coordonnées possibles, il suffit de le montrer pour les changements de coordonnées de la forme (A) :

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(x, y, z); \qquad \mathbf{y}=\mathbf{y}(x, y, z); \qquad \mathbf{z}=z.$$

En effet, un changement de coordonnées quelconque s'obtient en composant un changement de coordonnées de la forme (A) avec un changement de la forme : $\mathbf{x}=x$; $\mathbf{y}=y$; $\mathbf{z}=\mathbf{z}(x, y, z)$ qui, lui, ne change pas $\varphi(X_0)$ ni le contour apparent.

De plus, dans (A), on peut supposer que les paramètres $\mathbf{x}(x, y, z)$ et $\mathbf{y}(x, y, z)$ sont des polynômes, car un changement de coordonnées tangent à l'identité à un ordre assez grand donne la même colongueur $\varphi(X_0)$ et le même nombre de Milnor du contour apparent.

Remarque 2.2. — Il suffit de même de considérer seulement les changements de coordonnées de la forme (B) :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}=x+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_r z^r, \\ \mathbf{y}=y+b_1 z+b_2 z^2+\ldots+b_r z^r, \\ \qquad\qquad \mathbf{z}=z, \end{array}\right.$$

où $(a_1, a_2 \ldots a_r; b_1, b_2 \ldots b_r)$ sont des constantes.

En effet, un changement de coordonnées de la forme (A) s'obtient en composant un changement : $\mathbf{x}=\mathbf{x}(x, y)$; $\mathbf{y}=\mathbf{y}(x, y)$; $\mathbf{z}=z$ (qui donne un changement de coordonnées pour le contour apparent) et un autre de type (B') :

$$\begin{cases} \mathbf{x}=x+A_1(x, y)z+A_2(x, y)z+\ldots+A_r(x, y)z^r, \\ \mathbf{y}=y+B_1(x, y)z+B_2(x, y)z+\ldots+B_r(x, y)z^r, \\ \mathbf{z}=z. \end{cases}$$

Or, si l'on sait que le discriminant $D(x, y; a_1\ldots a_r; b_1\ldots b_r)$ définit une famille équisingulière de courbes planes au voisinage de $a_1=\ldots=a_r=b_1=\ldots=b_r=0$, on en déduit la même propriété pour

$$D(x, y; A_1(x, y)\ldots A_r(x, y); B_1(x, y)\ldots B_r(x, y))$$

qui définit une famille de courbes planes paramétrée par les coefficients des polynômes ($A_1\ldots A_r$; $\mathrm{B}_1\ldots\mathrm{B}_r$).

LEMME 2.3. — *Si $f(x, y, z)=0$ définit X_0 dans un système linéaire générique de coordonnées on a*

$$\varphi(X_0)+\mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0)=e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right)$$

et nous noterons

$$\psi(X_0)=e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right).$$

Preuve. — Considérons un disque d'épreuve $\tau : (\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}^3, 0)$; sur ce disque on a

$$\frac{d(f\circ\tau)}{dv}=(f'_x\circ\tau)\frac{dx}{dv}+(f'_y\circ\tau)\frac{dy}{dv}+(f'_z\circ\tau)\frac{dz}{dv},$$

$$\frac{d(f'_z\circ\tau)}{dv}=(f''_{xz}\circ\tau)\frac{dx}{dv}+(f''_{yz}\circ\tau)\frac{dy}{dv}+(f''_{z^2}\circ\tau)\frac{dz}{dv}.$$

Cela donne, lorsque le disque d'épreuve est à valeurs dans le lieu critique C_d défini par $f=f'_z=0$

$$(f'_x\circ\tau)\frac{dx}{dv}+(f'_y\circ\tau)\frac{dy}{dv}=0,$$

$$(f''_{xz}\circ\tau)\frac{dx}{dv}+(f''_{yz}\circ\tau)\frac{dy}{dv}=-(f''_{z^2}\circ\tau)\frac{dz}{dv},$$

d'où

$$\begin{vmatrix} f'_x\circ\tau & f'_y\circ\tau \\ f''_{xz}\circ\tau & f''_{yz}\circ\tau \end{vmatrix}\times\frac{dx}{dv}=(f'_y\circ\tau)(f''_{z^2}\circ\tau)\frac{dz}{dv}.$$

Appelons v la valuation associée au disque d'épreuve

$$v\left(\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right)+v(x)=v(f''_{z^2})+v(f'_y)+v(z).$$

Cela étant vrai pour tout disque d'épreuve sur la courbe C_d on a égalité des multiplicités

$$e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right)+e(f, f'_z, x)=e(f, f'_z, f''_{z^2})+e(f, f'_z, f'_y)+e(f, f'_z, z).$$

Pour un choix générique du système de coordonnées linéaires, l'axe des z est transverse à la surface X_0, donc au lieu critique C_d, ainsi que les plans $z=0$ et $x=0$. Les deux nombres $e(f, f'_z, z)$ et $e(f, f'_z, x)$ sont tous les deux égaux à la multiplicité de C_d. Le lemme 2.3 s'en déduit puisque $e(f, f'_z, f'_y)=\mu^{(3)}+\mu^{(2)}$ ([T_1], cor. 1.5, p. 320).

Remarque 2.4. — Il peut être intéressant de relier $\varphi(X_0)$ et $\psi(X_0)$ au nombre de Milnor du lieu critique. On a en effet, d'après les formules de Lê Dũng Tráng et G. M. Greuel ([L_2], th. (3.7.1)) :

$$\mu(f, f'_z)+\mu(f, f'_z, z)=e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right)=\psi(X_0),$$

où $\mu(f, f'_z)=\mu(C_d)$ est le nombre de Milnor du lieu critique et

$$\mu(f, f'_z, z)=e(f, f'_z, z)-1=\mu^{(2)}(X_0)+\mu^{(1)}(X_0)-1.$$

Donc

$$\mu(C_d)=\psi(X_0)-\mu^{(2)}(X_0)-\mu^{(1)}(X_0)+1=\varphi(X_0)+\mu^{(3)}(X_0)-\mu^{(1)}(X_0)+1.$$

Et montrer que $\varphi(X_0)$ est un invariant analytique équivaut à montrer que le nombre de Milnor du lieu critique de la surface pour une direction linéaire générique est un invariant analytique.

Proposition 2.5. — Le nombre de fronces évanescentes $\varphi(X_0)$ est un invariant analytique du germe de surface à singularité isolée X_0.

Preuve. — $\mu^{(3)}(X_0)$ et $\mu^{(2)}(X_0)$ étant des invariants analytiques ([T_1], p. 316), il nous suffit de montrer l'invariance analytique de

$$\psi(X_0)=e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right)$$

(où (x, y, z) est un système linéaire générique de coordonnées).

Faisons le changement linéaire de coordonnées : $x=\mathbf{x}+a_1\mathbf{z}$; $y=\mathbf{y}+b_1\mathbf{z}$; $z=\mathbf{z}$; notons $\psi_{a_1, b_1}=e(I_{a_1, b_1})$ où I_{a_1, b_1} est l'idéal

$$I_{a_1, b_1}=\left(f, f'_z+a_1 f'_x+b_1 f'_y, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{x^2} & f''_{xy} \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix}\right).$$

Par hypothèse, cette famille d'idéaux a une multiplicité constante $e(I_{a_1, b_1})=\psi(X_0)$ au voisinage de (0,0).

Pour des changements de coordonnées du type (B) :

$$\lambda\begin{cases} x=\mathbf{x}+a_1\mathbf{z}+a_2\mathbf{z}^2+\ldots+a_r\mathbf{z}^r, \\ y=\mathbf{y}+b_1\mathbf{z}+b_2\mathbf{z}^2+\ldots+b_r\mathbf{z}^r, \\ z=\mathbf{z}, \end{cases}$$

défini par $a=(a_1, \ldots, a_r)$ et $b=(b_1, \ldots, b_r)$; nous avons aussi à étudier la famille des idéaux

$$I_{a, b}=\left(f, f'_z+\left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f'_x+\left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f'_y, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{x^2} & f''_{xy} \end{vmatrix}+\left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix}\right)$$

c'est-à-dire la famille I_{a_1, b_1} où on a substitué $\partial x/\partial\mathbf{z}\circ\lambda^{-1}$ à a_1 et $\partial y/\partial\mathbf{z}\circ\lambda^{-1}$ à b_1.

Comme la famille I_{a_1, b_1} est une intersection complète, sa colongueur à l'origine de $\mathbb{C}^3$ est constante, ce qui équivaut à dire que l'idéal I_{a_1, b_1} est primaire pour l'idéal (x, y, z) dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^2, 0}$; on en déduit alors la même propriété pour l'idéal $I_{a, b}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^{2r}, 0}$ et par conséquent $e(I_{a, b})=\psi(X_0)$.

Démontrons maintenant l'inégalité :

LEMME 2.6 :

$$\varphi(X_0)\leqslant\mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0).$$

Preuve. — D'après ce que nous venons de voir, les familles d'idéaux

$$J_{a_1, b_1}=(f, f'_z+a_1 f'_x+b_1 f'_y, f''_{z^2}+2a_1 f''_{xz}$$
$$+2b_1 f''_{yz}+a_1^2 f''_{x^2}+b_1^2 f''_{y^2}+2a_1 b_1 f''_{xy})$$

(correspondant au changement de coordonnées $x=\mathbf{x}+a_1\mathbf{z}$; $y=\mathbf{x}+b_1\mathbf{z}$; $z=\mathbf{z}$) et

$$J_{a_2,b_2}=(f, f'_z+2a_2zf'_x+2b_2zf'_y, f''_{z^2}+4a_2zf''_{xz}+4b_2zf''_{yz}+(2a_2z)^2f''_{x^2}+(2b_2z)^2f''_{y^2}+(2a_2z)(2b_2z)f''_{xy}+2a_2f'_x+2b_2f'_y)$$

(correspondant au changement $x=\mathbf{x}+a_2\mathbf{z}^2$; $y=\mathbf{y}+b_2\mathbf{z}^2$; $z=\mathbf{z}$) sont à multiplicité constante dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3,0}$, $\varphi(X_0)$.

Enfin, par substitution dans la famille J_{a_1,b_1} de $2a_2z$ à a_1 et $2b_2z$ à b_1, il en est de même de la famille

$$J'_{a_2,b_2}=(f, f'_z+2a_2zf'_x+2b_2zf'_y, f''_{z^2}+4a_2zf''_{xz}+4b_2zf''_{yz}+(2a_2z)^2f''_{x^2}+(2b_2z)^2f''_{y^2}+(2a_2z)(2b_2z)f''_{xy}).$$

La comparaison des deux familles J_{a_2,b_2} et J'_{a_2,b_2} montre que la multiplicité du terme différent $2a_2f'_x+2b_2f'_y$ dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^3,0}/(f, f'_z+2a_2zf'_x+2b_2zf'_y)$ est au moins égal à $\varphi(X_0)$, c'est-à-dire :

$$e(f, f'_z, 2a_2f'_x+2b_2f'_y)\geqslant\varphi(X_0).$$

Cela démontre le lemme 2.6 si l'on choisit a_2 et b_2 génériques : plus précisément si le plan $a_2y-b_2x=0$ n'est pas limite de plans tangents à X_0 ([T$_1$], chap. 2, remarque 1.6).

Fin de la preuve de la proposition 2.5. — Faisons un changement de coordonnées du type (A) :

$$\lambda\begin{cases} x=x(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\\ y=y(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\\ z=\mathbf{z}.\end{cases}$$

Le nombre de fronces évanescentes est donné par la multiplicité de l'idéal

$$J=\Bigg(f, f'_z+\left(\frac{\partial x}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f'_x+\left(\frac{\partial y}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f'_y, f''_{z^2}+2\left(\frac{\partial x}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{xz}+2\left(\frac{\partial y}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{yz}+\left(\frac{\partial x}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)^2f''_{x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)^2f''_{y^2}+2\left(\frac{\partial x}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}.\frac{\partial y}{\partial\mathbf{z}}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{xy}+\frac{\partial^2x}{\partial\mathbf{z}^2}\circ\lambda^{-1}.f'_x+\frac{\partial^2y}{\partial\mathbf{z}^2}\circ\lambda^{-1}.f'_y\Bigg).$$

Par substitution dans J_{a_1,b_1} de $\partial x/\partial z\circ\lambda^{-1}$ à a_1 et $\partial y/\partial z\circ\lambda^{-1}$ à b_1 nous savons que l'idéal suivant est de multiplicité constante égale à $\varphi(X_0)$:

$$\begin{aligned}J'=\Bigg(f, f'_z+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f'_x+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f'_y, f''_{z^2}\\
+2\left(\frac{\partial x}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{xz}+2\left(\frac{\partial y}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{yz}\\
+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)^2 f''_{x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)^2 f''_{y^2}\\
+2\left(\frac{\partial x}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f''_{xy}\Bigg).\end{aligned}$$

Comparons ces deux familles :

$$\begin{aligned}e\Bigg(f, f'_z+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f'_x\\
+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\circ\lambda^{-1}\right)f'_y, \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\circ\lambda^{-1}\right)f'_x+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\circ\lambda^{-1}\right)f'_y\Bigg)\\
\geqslant\mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0)\geqslant e(J')=\varphi(X_0)\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.6. Donc $e(J)=e(J')=\varphi(X_0)$.

Remarquons que nous aurions pu éviter la fin de la démonstration en utilisant la remarque 2.2, et le fait que le nombre $k(X_t)$ de double-plis évanescents dans une famille de surfaces est semi-continu, ce qui sera démontré au paragraphe suivant.

Remarque 2.7. — La formule (*b*) de la proposition 1.1 peut aussi être démontrée en utilisant la proposition suivante :

PROPOSITION 2.8 (LÊ-LEJEUNE-TEISSIER). — Soit $\pi:(W, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ un germe de morphisme plat dont la fibre $(W_0, 0)$ est une courbe réduite. Soit $n:\overline{W}\to W$ une normalisation de la surface W et $p=\pi\circ n:(\overline{W}, n^{-1}(0))\to(\mathbf{C}, 0)$. Notons $(\overline{W})_0=p^{-1}(0)$. On a :

1° p est plat;

2° $\delta((\overline{W})_0)=\delta(W_0)-\delta(W_t)$ où $t\in\mathbf{C}-\{0\}$.

Pour la preuve, *voir* par exemple [T 3].

A l'aide de cette proposition on peut calculer $\mu(\Delta_d)$. En effet Δ_d et C_d ont même nombre de composantes irréductibles que nous noterons r. On a

$\mu(\Delta_d)=2\delta(\Delta_d)-(r-1)$. De même pour la courbe gauche C_d on a la formule de M. GIUSTI ([G], Appendice 1, prop. 2) :

$$\mu(C_d)=2\delta(C_d)-(r-1).$$

Enfin, on peut appliquer 2.8 à la famille de courbes $D_d(x, y; t)=0$ de 1.1. La famille des contours apparents de X_t est lisse sauf en (0, 0, 0), c'est une normalisation de la famille de courbes $D_d(x, y; t)=0$, et la courbe spéciale de la normalisation n'est autre que C_d. Enfin le δ de $D_d(x, y; t_0)=0$ est évidemment $k+\varphi$, on a donc :

$$\delta(C_d)=\delta(\Delta_d)-(k+\varphi),$$

d'où finalement,

$$\mu(C_d)=\mu(\Delta_d)-2(k+\varphi),$$

et comme d'après la remarque 2.4 :

$$\mu(C_d)=\mu^{(3)}(X_0)-\mu^{(1)}(X_0)+1+\varphi$$

on retrouve la formule (*b*) de la proposition 1.1.

3. Le nombre de double-plis évanescents

Nous commençons par établir un résultat sur la projection plane générique d'un germe de courbe C à l'origine de $\mathbb{C}^3$, intersection complète à singularité isolée, définie par les équations

$$f(x, y, z)=g(x, y, z)=0.$$

Nous supposons l'axe des z transverse à C et nous notons $\pi_d(C)=\Delta$ la projection de C sur le plan $z=0$ parallèlement à la direction d de l'axe des z; Δ est défini par $R(x, y)=0$ où R est le résultant de f et g par rapport à z.

Soit $Z\subset\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}$ une déformation à un paramètre de C définie par les équations $F(x, y, z; t)=G(x, y, z; t)=0$; nous supposons que la fibre générique Z_t est lisse et que sa projection $\pi_d(Z_t)$ n'a pour points singuliers que des points doubles ordinaires (qui tendent vers zéro lorsque t tend vers zéro).

Pour montrer l'existence d'une telle déformation, on peut opérer comme pour l'existence des fronces et des doubles-plis évanescents en construisant la déformation miniverselle de C, *voir* par exemple [BGG].

Si on admet la propriété bien connue (*cf.* [T_2], p. 612) que la projection plane linéaire générique d'une courbe lisse n'a comme singularités que des points doubles ordinaires, on peut aussi procéder comme suit :

Soit $F_1(x, y, z, t)=G_1(x, y, z, t)=0$ une déformation de C dont la fibre générique est lisse. Alors

$$F_1(x+atz, y+btz, z, t)=G_1(x+atz, y+btz, z, t)=0$$

est telle que la projection suivant l'axe des z de sa fibre générique n'a que des points doubles ordinaires pour presque tout a et b. On choisit de tels (a, b) et par le développement de Taylor on obtient une déformation de C ayant la propriété voulue. Le nombre $l_d(C)$ de points doubles ordinaires qui apparaissent dans $\pi_d(Z_t)$ ne dépend pas de la déformation Z choisie, comme le montre le lemme :

LEMME 3.1. — *Si l'axe des y appartient à un ouvert dense de directions du plan $z=0$ on a*

$$\mu(\Delta)+m(\Delta)-1=2\,l_d(C)+e\left(f, g, \begin{vmatrix} f'_y & g'_y \\ f'_z & g'_z \end{vmatrix}\right),$$

où $\mu(\Delta)$ et $m(\Delta)$ désignent respectivement le nombre de Milnor et la multiplicité de la projection Δ de C.

Remarque 3.2. — $e\left(f, g, \begin{vmatrix} f'_y & g'_y \\ f'_z & g'_z \end{vmatrix}\right)$ ne dépend pas du choix des générateurs de l'idéal (f, g). En effet, un changement de générateurs est nécessairement du type

$$\tilde{f}=Af+Bg,$$
$$\tilde{g}=Cf+Dg,$$

avec $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ localement une unité. Ce qui se vérifie en écrivant :

$$f=A'\tilde{f}+B'\tilde{g},$$
$$g=C'\tilde{f}+D'\tilde{g},$$

d'où $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ et comme (f, g) forment une suite régulière, le produit des matrices est nécessairement de la forme

$\begin{pmatrix} 1+Ug & -Uf \\ -Vg & 1+Vf \end{pmatrix}$ dont le déterminant est une unité. Alors modulo (f, g) on vérifie que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} & \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial y} & \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

et comme $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ est une unité,

$$\left(f, g, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\tilde{f}, \tilde{g}, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} & \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial y} & \dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial z} \end{vmatrix}\right)$$

ont même multiplicité. ■

Preuve du lemme 3.1. — Soit $D(x, y; t)$ le résultant par rapport à z de F et G, calculons comme dans la démonstration de la proposition 1.1 la multiplicité d'intersection $M=e(D(x, y, 0), \partial D/\partial y(x, y, 0))$: si l'axe des y est transverse à Δ on a

(1) $$M=\mu(\Delta)+m(\Delta)-1.$$

(2) Supposons l'axe des y non limite d'une tangente en un point double évanescent; pour t non nul assez petit, la multiplicité d'intersection de $D(x, y; t)$ et $\partial D/\partial y(x, y; t)$ en un point double ordinaire est 2. Il reste à calculer la contribution à M d'un point (x_0, y_0) lisse de $\pi_d(Z_t)$ où la tangente est parallèle à l'axe des y : soit (x_0, y_0, z_0) le point de Z_t au-dessus de (x_0, y_0); dans les coordonnées locales $x_1=x-x_0, y_1=y-y_0, z_1=z-z_0$ les équations de Z_t au voisinage de ce point sont

$$x_1=\alpha(y_1), \qquad z_1=\beta(y_1),$$

où α appartient au carré de l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x_1, y_1, z_1)$ et β à l'idéal maximal. Une équation de $\pi_d(Z_t)$ au voisinage de (x_0, y_0) est alors $x_1-\alpha(y_1)=0$. La multiplicité d'intersection en (x_0, y_0) de $D(x, y; t)$ et $\partial D/\partial y(x, y; t)$ est

$$e_{(x_0, y_0)}\left(D, \frac{\partial D}{\partial y}\right)=e\left(x_1-\alpha(y_1), \left(\frac{\partial \alpha(y_1)}{\partial y_1}\right)\right),$$

c'est-à-dire l'ordre de $\alpha(y_1)$ moins 1. C'est donc la même que

$$e_{(x_0, y_0, z_0)}\left(F, G, \begin{vmatrix} F'_y & G'_y \\ F'_z & G'_z \end{vmatrix}\right) = e\left(x_1-\alpha(y_1), z_1-\beta(y_1), \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial\alpha}{\partial y_1} & -\dfrac{\partial\beta}{\partial y_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right).$$

En faisant la somme sur tous les points, nous trouvons que la contribution à M des points à tangente parallèle à l'axe des y est

$$e\left(F, G, \begin{vmatrix} F'_y & G'_y \\ F'_z & G'_z \end{vmatrix}\right) = e\left(f, g, \begin{vmatrix} f'_y & g'_y \\ f'_z & g'_z \end{vmatrix}\right).$$

La comparaison avec la formule (1) montre le lemme 3.1.

Remarque 3.3. — On peut donner une autre démonstration de la formule de 3.1 en utilisant encore une fois la proposition de Lê, Lejeune, Teissier donnée en 2.8.

En effet, Z est une normalisation de la famille des $\pi_d(Z_t)$ et C a même nombre r de composantes irréductibles que Δ. On a donc en procédant comme en 2.7 :

$$\mu(\Delta)-\mu(C)=2[\delta(\Delta)-\delta(C)]=2\delta(\pi_d(Z_t))=2\, l_d(C),$$

d'autre part, la formule de Lê-Greuel ([L 2], th. (3.7.1)) permet de calculer le nombre de Milnor de C :

$$\mu(C)+\mu(f, g, x)=e\left(f, g, \begin{vmatrix} f'_y & g'_y \\ f'_z & g'_z \end{vmatrix}\right).$$

Mais $\mu(f, g, x)=e(f, g, x)-1$. La formule de projection donne $e(f, g, x)$ comme la multiplicité d'intersection de Δ avec $x=0$, qui est la multiplicité de Δ si l'axe des y est générique dans le plan $z=0$. On a donc bien

$$\mu(\Delta)+m(\Delta)-1=2\, l_d(C)+e\left(f, g, \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}\right).$$

Lemme 3.4 :

$$2\, l_d(C)=e\left(f(x, y, z_1), g(x, y, z_1), \frac{f(x, y, z_2)-f(x, y, z_1)}{z_2-z_1}, \frac{g(x, y, z_2)-g(x, y, z_1)}{z_2-z_1}\right)$$

multiplicité calculée dans $\mathbb{C}\{x, y, z_1, z_2\}$.

Preuve. — Soit :

$$J=\left(F(x, y, z_1, t), G(x, y, z_1, t), \frac{F(x, y, z_2, t)-F(x, y, z_1, t)}{z_2-z_1}, \frac{G(x, y, z_2, t)-G(x, y, z_1, t)}{z_2-z_1}\right),$$

l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^4\times\mathbf{C},0}$ définissant un germe d'espace analytique K fini sur $\{0\}\times\mathbf{C}$ par la projection canonique. Soit $P=(x_0, y_0, z_{1,0}, z_{2,0})$ un point de la fibre K_t où t est fixé non nul assez petit; nous ne pouvons avoir $z_{1,0}=z_{2,0}$ car sinon, en posant $z_0=z_{1,0}=z_{2,0}$ nous aurions

$$F(x_0, y_0, z_0, t)=G(x_0, y_0, z_0, t)=F'_z(x_0, y_0, z_0, t)=G'_z(x_0, y_0, z_0, t),$$

et la courbe lisse Z_t aurait au point (x_0, y_0, z_0) une tangente parallèle à l'axe des z; sa projection aurait alors au point (x_0, y_0) une composante irréductible singulière, ce qui est impossible.

Par conséquent, $z_{1,0}\neq z_{2,0}$, et au voisinage de P l'idéal J_t est engendré par $(F(x, y, z_1, t), G(x, y, z_1, t), F(x, y, z_2, t), G(x, y, z_2, t))$. De plus, puisque le point (x_0, y_0) est un point double ordinaire de la projection de Z_t, les tangentes à Z_t aux points $(x_0, y_0, z_{1,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0})$ ne sont pas dans un même plan passant par l'axe des z. Il en résulte que les plans tangents aux quatre hypersurfaces $F(x, y, z_1, t)=0$, $G(x, y, z_1, t)=0$, $F(x, y, z_2, t)=0$, $G(x, y, z_2, t)=0$ au point P dans $\mathbf{C}^4$ sont transverses et la multiplicité de J_t au point P est donc égale à 1.

Au-dessus d'un point double de $\pi_d(Z_t)$ se trouvent exactement deux points $(x_0, y_0, z_{1,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0})$ de Z_t, donc deux points $(x_0, y_0, z_{1,0}, z_{2,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0}, z_{1,0})$ de K_t; on a donc $e(J_t)=2\,l_d(C)$, d'où le lemme. ■

Revenons maintenant à la situation d'une surface à singularité isolée X_0, et exprimons le nombre de double-plis évanescents comme une multiplicité :

LEMME 3.5. — *Si $f(x, y, z)=0$ est une équation de X_0 dans un système linéaire générique de coordonnées*

$$2k(X_0)=e\left(f(x, y, z_1), f'_z(x, y, z_1), \frac{f'_z(x, y, z_2)-f'_z(x, y, z_1)}{z_2-z_1}, \frac{\left\{\begin{array}{l} f(x, y, z_2)-f(x, y, z_1) \\ -(z_2-z_1)/2(f'_z(x, y, z_1)+f'_z(x, y, z_2)) \end{array}\right\}}{(z_2-z_1)^3}\right),$$

multiplicité calculée dans $\mathbf{C}\{x, y, z_1, z_2\}$.

Preuve. — Soit $X \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ une déformation générique de X_0 définie par $F(x, y, z, t)=0$, et J l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}, 0}$ défini par

$$J=\left(\begin{array}{l} F(x, y, z_1; t),\ F'_z(x, y, z_1; t), \\ \qquad \dfrac{F'_z(x, y, z_2; t)-F'_z(x, y, z_1; t)}{z_2-z_1}, \\ \qquad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} F(x, y, z_2; t)-F(x, y, z_1; t) \\ \quad -(z_2-z_1)/2(F'_z(x, y, z_1; t)+F'_z(x, y, z_2; t)) \end{array}\right\}}{(z_2-z_1)^3} \end{array}\right).$$

J définit un sous-espace K de $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}$ fini sur $\{0\} \times \mathbb{C}$; déterminons la multiplicité de J_t en un point $P=(x_0, y_0, z_{1,0}, z_{2,0})$ de K_t pour t non nul assez petit.

On ne peut avoir $z_{1,0}=z_{2,0}=z_0$ car sinon

$$F(x_0, y_0, z_0; t)=F'_z(x_0, y_0, z_0; t) = F''_{z^2}(x_0, y_0, z_0; t)=F'''_{z^3}(x_0, y_0, z_0; t)=0$$

et alors, au point (x_0, y_0), le contour apparent de X_t aurait une singularité de multiplicité au moins 3, ce qui est contraire à l'hypothèse (que le contour apparent de X_t a $\varphi(X_0)$ cups et $k(X_0)$ points doubles ordinaires).

Donc, au point P de K_t, l'idéal J_t est engendré par

$$(F(x, y, z_1; t),\ F'_z(x, y, z_1; t),\ F'_z(x, y, z_2; t),\ F(x, y, z_2; t)).$$

Posons $x=x_0+\mathbf{x}$, $y=y_0+\mathbf{y}$; dans l'anneau hensélien $\mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}[z]$, F s'écrit comme un produit $F=UF_1F_2$ avec $F_1(0, 0, z)=(z-z_{1,0})^2$, $F_2(0, 0, z)=(z-z_{2,0})^2$, et U ne s'annulant ni en $(0, 0, z_{1,0})$ ni en $(0, 0, z_{2,0})$. La multiplicité de J_t au point P est donc la multiplicité dans $\mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ de l'idéal :

$$(F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z_{1,0}+\mathbf{z}_1),\ F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z_{2,0}+\mathbf{z}_2),\ F'_{1z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z_{1,0}+\mathbf{z}_1),\ F'_{2z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z_{2,0}+\mathbf{z}_2)).$$

Les plans tangents à Z_t aux points $(x_0, y_0, z_{1,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0})$ sont transverses parallèles à l'axe des z; on en déduit que la multiplicité en P de J_t est égale à 1.

Au-dessus d'un point double (x_0, y_0) du contour apparent de Z_t il y a exactement deux points $(x_0, y_0, z_{1,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0})$ du lieu critique, donc deux points $(x_0, y_0, z_{1,0}, z_{2,0})$ et $(x_0, y_0, z_{2,0}, z_{1,0})$ de K_t.

Par conséquent $e(J_t)=2k(X_0)=e(J_0)$. ■

On déduit du lemme précédent :

PROPOSITION 3.6. — *Si* $(X \rightleftarrows Y)$ *est une famille de surfaces à singularité isolée, le nombre* $k(X_t)$ *de double-plis évanescents est une fonction semi-continue du paramètre* $t \in Y$.

Nous allons maintenant montrer un lemme fondamental : si C_d est le lieu critique de la surface à singularité isolée X_0 pour une direction linéaire générique d, la famille des projections $\pi_{d'}(C_d)$ de C_d parallèlement à la direction d' variant dans un voisinage de d est une famille équisingulière de courbes planes. Cela signifie qu'aucune limite de sécante à C_d n'a pour direction d.

LEMME 3.7. — *Soit* $C_{a,b}$ *le lieu critique de la projection linéaire* $\pi_{a,b}$ *de* X_0 *parallèlement à la direction du vecteur* $(a, b, 1)$ *sur le plan des* (x, y), $\Delta_{a,b} = \pi_{a,b}(C_{a,b})$ *le contour apparent. On suppose que la famille de courbes planes* $\Delta_{a,b}$ *est équisingulière lorsque* (a, b) *varie dans un voisinage de* $(0, 0)$. *Alors la famille* $\pi_{a,b}(C_{0,0})$ *est une famille équisingulière de courbes planes au voisinage de* $(0, 0)$.

Preuve. — Il résulte de la remarque 2.4 que le nombre de Milnor de $C_{a,b}$ est constant; or son nombre de composantes irréductibles étant égal à celui de $\Delta_{a,b}$ est aussi constant. On en déduit grâce à la formule de M. GIUSTI ([G], Appendice 1, prop. 2) et à B. TEISSIER ([T$_2$], § 3, cor. 1) que la famille $C_{a,b}$ est « équinormalisée ».

Pour $i=1, \ldots, r$, notons $(\mathbf{x}_i(u, a, b)=u^{m_i}, \mathbf{y}_i(u, a, b), \mathbf{z}_i(u, a, b))$ la normalisation en famille de chaque branche de $C_{a,b}$ (nous supposons le plan $x=0$ transverse à $C_{a,b}$, ce qui permet de choisir $\mathbf{x}_i(u, a, b)=u^{m_i}$ où m_i est la multiplicité constante de la i-ième branche). On a identiquement

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)\equiv 0, \\ af'_x(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) \\ \qquad +bf'_y(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)+f'_z(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)\equiv 0. \end{cases}$$

Dérivons la première identité par rapport à b et tenons compte de la seconde

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial b} f'_x(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)+\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial b} f'_y(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, y_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)$$

d'où

$$+\mathbf{z}_i f'_y(\mathbf{x}_i+a z_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)=0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial b}+\mathbf{z}_i\right) f'_y(\mathbf{x}_i+a\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i+b\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)=0.$$

Or f'_y n'est pas identique à 0 le long d'une branche de $C_{a,b}$, dès que l'axe des y est transverse à $C_{0,0}$ par exemple, et on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial b} = -\mathbf{z}_i.$$

Par hypothèse, la famille $\Delta_{a,b}$ est équisingulière, donc équisaturée donc le saturé lipschitzien $\tilde{\mathcal{O}}_{\Delta_{a,b}} \subset \overline{\mathcal{O}}_{\Delta_{a,b}}$ est stable par la dérivation $\partial/\partial b$ et donc $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta_{a,b}}$.

Il en résulte que la famille de courbes planes $\pi_{\alpha,\beta}(C_{a,b})$, paramétrée par (a, b, α, β), et dont les branches sont paramétrées par

$$\begin{cases} x_i = \mathbf{x}_i(u, a, b) + \alpha \mathbf{z}_i(u, a, b), \\ y_i = \mathbf{y}_i(u, a, b) + \beta \mathbf{z}_i(u, a, b), \end{cases}$$

pour $i = 1 \ldots r$, est équisaturée. (La famille d'idéaux de $\mathbb{C}\{u, u'\}$ dépendant des paramètres

$$(a, b, \alpha, \beta) = \left(\frac{x_i(u) - x_i(u')}{u - u'}, \frac{y_i(u) - y_i(u')}{u - u'} \right)$$

a même clôture intégrale que

$$\left(\frac{\mathbf{x}_i(u) - \mathbf{x}_i(u')}{u - u'}, \frac{\mathbf{y}_i(u) - \mathbf{y}_i(u')}{u - u'} \right).\Big) \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 3.8. — *Si (x, y, z) est un système linéaire générique de coordonnées, C le lieu critique de la projection linéaire de X_0 sur le plan (x, y), on a*

$$\begin{aligned} 2\,l(C) &= 2(\varphi(X_0) + k(X_0)) \\ &= e\Bigg(f(x, y_1, z), f'_z(x, y_1, z), \\ &\qquad \frac{f(x, y_2, z) - f(x, y_1, z)}{y_2 - y_1}, \frac{f'_z(x, y_2, z) - f'_z(x, y_1, z)}{y_2 - y_1} \Bigg) \end{aligned}$$

(*multiplicité calculée dans* $\mathbb{C}\{x, y_1, y_2, z\}$).

Preuve. — Si Δ' est la projection de C sur le plan des (x, z), on a en appliquant le lemme 3.1 :

$$\mu(\Delta') + m(\Delta') - 1 = 2\,l(C) + e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f''_{xz} \\ f'_y & f''_{yz} \end{vmatrix} \right).$$

Or, d'après le lemme 3.7 Δ' et Δ ont même type topologique, et la proposition 1.1 donne

$$\begin{aligned}\mu(\Delta')+m(\Delta')-1&=\mu(\Delta)+m(\Delta)-1\\&=\mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0)+2k(X_0)+3\varphi(X_0).\end{aligned}$$

Enfin du lemme 2.3 on tire

$$\varphi(X_0)+\mu^{(3)}(X_0)+\mu^{(2)}(X_0)=e\left(f, f'_z, \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xz} & f''_{yz}\end{vmatrix}\right).$$

La comparaison entre ces trois formules donne

$$l(C)=\varphi(X_0)+k(X_0).$$

Enfin le lemme 3.4 appliqué à C et à la direction de l'axe des y termine la démonstration.

LEMME 3.9. — *Soit (x, y, z) un système linéaire générique de coordonnées; l'idéal J engendre par*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}),\ g'_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}),\ \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})-g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{z})}{\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1},\ \frac{g'_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2, \mathbf{z})-g'_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{z})}{\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1},$$

où

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})=f(\mathbf{x}+a_1\mathbf{z}+\ldots+a_r\mathbf{z}^r, \mathbf{y}+b_1\mathbf{z}+\ldots+b_r\mathbf{z}^r, \mathbf{z}),$$

est équimultiple lorsque $(a_1, \ldots, a_r;\ b_1, \ldots, b_r)$ varient dans un voisinage de 0.

Preuve. — D'après la proposition 3.8, la multiplicité de J_0 est égale à $2(\varphi(X_0)+k(X_0))$ et l'hypothèse de généricité implique que la famille d'idéaux de $\mathbb{C}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, a, b\}$ suivante est équimultiple : $J_{(a, 0\ldots 0;\, b, 0\ldots 0)}$ puisqu'elle correspond au changement linéaire de coordonnées ($x=\mathbf{x}+a\mathbf{z}$, $y=\mathbf{y}+b\mathbf{z}$, $z=\mathbf{z}$).

Or, en substituant $\partial x/\partial\mathbf{z}$ à a et $\partial y/\partial \mathbf{z}$ à b (où $x=\mathbf{x}+a_1\mathbf{z}+\ldots+a_r\mathbf{z}^r$ et $y=\mathbf{y}+b_1\mathbf{z}+\ldots+b_r\mathbf{z}^r$) dans la famille $J_{(a, 0\ldots 0;\, b, 0\ldots 0)}$ on obtient exactement la famille $J_{(a_1\ldots a_r;\, b_1\ldots b_r)}$ qui est donc équimultiple.

PROPOSITION 3.10. — *$k(X_0)$ est un invariant analytique.*

Preuve. — Il résulte de la remarque 2.2, de la proposition 3.8 et du lemme 3.9 que $l(C)=\varphi(X_0)+k(X_0)$ est un invariant analytique. Or, comme nous savons déjà que $\varphi(X_0)$ est un invariant analytique (prop. 2.5), il en est de même de $k(X_0)$.

Remarque 3.11. — Dans un système linéaire générique de coordonnées, notons $R(\mathbf{x}, \mathbf{z}, a, b)$ le résultant par rapport à y de $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x} + a\,\mathbf{z}, \mathbf{y} + b\mathbf{z}, \mathbf{z})$ et $g'_{\mathbf{z}}$. Il résulte du lemme 3.7 et de l'hypothèse de généricité que la famille des courbes planes définie par $R(\mathbf{x}, \mathbf{z}, a, b) = 0$ est équisingulière et a même nombre de Milnor, $\mu(\Delta)$, que le contour apparent générique. On en déduit que le résultant par rapport à y de $f(x, y, z)$ et

$$f'_z + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{z}} f'_x + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{z}} f'_y$$

$$(\text{où } x = \mathbf{x} + a_1 \mathbf{z} + \ldots + a_r \mathbf{z}^r,\ y = \mathbf{y} + b_1 \mathbf{z} + \ldots + b_r \mathbf{z}^r \text{ et } z = \mathbf{z}),$$

qui n'est autre que $R(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial x/\partial \mathbf{z}, \partial y/\partial \mathbf{z})$ est une famille équisingulière de courbes planes. En utilisant la remarque 2.2, on obtient alors directement l'invariance analytique du nombre de Milnor du contour apparent générique $\mu(\Delta)$.

Lê Dung Tráng nous a fait remarquer qu'au cours de la démonstration du lemme 3.7 nous obtenions en fait le :

Théorème 3.12. — *Si (x, y, z) est un système linéaire générique de coordonnées, et C le lieu critique pour la projection de direction l'axe des z, Δ le discriminant correspondant, C et Δ ont même saturé.*

Preuve. — Dans la démonstration de 3.7 on prouve que $z \in \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}$.

IV. L'équisingularité générique

Soit $(X \rightleftarrows Y) \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ une famille de surfaces à singularité isolée; on dit qu'une famille X est génériquement équisingulière s'il existe un ouvert dense $\mathscr{V}$ de directions de $\mathbb{C}^3$ tel que, pour toute direction $d \in \mathscr{V}$, la famille formée par les contours apparents de X_t pour la direction d est une famille équisingulière de courbes planes. On déduit facilement de la proposition 1.1 ([BS$_1$], th. 3.5.3) :

Théorème 4.1. — *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la famille $(X \rightleftarrows Y) \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ est génériquement équisingulière;*

(ii) *les nombres $\mu^{(*)}(X_t)$, $\varphi(X_t)$, $k(X_t)$ sont constants pour $t \in Y$.*

Corollaire 4.2. — *Si la famille $(X \rightleftarrows Y)$ est analytiquement triviale, elle est génériquement équisingulière.*

Corollaire 4.3. — *Si $(X \rightleftarrows Y) \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ est une famille de surfaces à singularité isolée, elle est génériquement équisingulière sur un ouvert dense de Y.*

Remarque 4.4. — L'équisingularité générique est une notion strictement plus faible que la trivialité analytique : par exemple, si le cône tangent à X_0 est à singularité isolée et si la famille est équimultiple, elle est génériquement équisingulière.

D'autre part cette notion est strictement plus forte que l'équisingularité différentiable (c'est-à-dire les conditions de Whitney de X le long de Y) comme le prouve l'exemple de J. Briançon et J.-P. Speder [BS_3].

Proposition 4.5. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *la famille* $X \subset \mathbb{C}^3 \times Y$ *est génériquement équisingulière;*

(ii) *pour un ouvert dense de projections la famille des lieux critiques est équisaturée.*

Preuve. — D'après le théorème 3.12 pour un ouvert dense de projections lieu critique et lieu discriminant ont même saturé, alors si la famille de discriminants est équisaturée, la famille de lieux critiques aussi.

BIBLIOGRAPHIE

[BS_1] Briançon (J.) et Speder (J.-P.). — Familles équisingulières d'hypersurfaces à singularité isolée, *Thèse*, 2e partie, Nice, 1976.

[BS_2] Briançon (J.) et Speder (J.-P.). — Les conditions de Whitney impliquent « $\mu^{(*)}$ constant », *Ann. Inst. Fourier*, XXVI, 2, 1976.

[BS_3] Briançon (J.) et Speder (J.-P.). — Familles équisingulières de surfaces à singularité isolée, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280, série A, 1975.

[BGG] Briançon (J.), Galligo (A.) et Granger (M.). — *Familles de courbes gauches*, Nice (à paraître).

[G] Giusti (M.). — Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes, *Publ. du Centre de Mathématiques de l'école polytechnique*, Palaiseau, 1977.

[L_1] Lê-Ramanujam. — The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, *Amer. J. Math.*, 98, 1, 1976, p. 67-78.

[L_2] Lê Dung Trang. — Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète, *Publ. du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique*, 1973 ou *Funk. Analiz, i ievo pril.*, 1974.

[M] Mattei (J. F.). — Projections génériques d'un germe d'ensemble analytique, *Thèse de 3e cycle*, Dijon, 1976.

[T_1] Teissier. (B.). — Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Astérisque*, 7-8, 1973.

[T_2] Teissier (B.). — The hunting of invariants in the geometry of discriminants, in *Real and complex singularities*, Oslo, 1976.

[T_3] Teissier (B.). — Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes, *Publ. du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique*, 1975.

[V] Varchenko (A. N.). — The relation between topological and algebro-geometric equisingularities according to Zariski, *Funct. An. and its Appl.*, 7, 2, 1973.

[Z] Zariski (O.). — Some open questions in the theory of singularities, *Bull. A.M.S.*, 77, 4, 1971.