BULLETIN DE LA S. M. F.

KATSUYUKI SHIBATA

Remarque sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la sphère

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 117-136

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__117_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 117-136.

REMARQUE SUR LA COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS SUR LA SPHÈRE

PAR

KATSUYUKI SHIBATA (*)

[Saitama et Genève]

RÉSUMÉ. — Une famille infinie d'éléments indécomposables de la cohomologie $H^*(\mathscr{L}_{S^n})$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur la sphère S^n de dimension $n \geqslant 2$ est construite explicitement, en se servant du modèle minimal de Haefliger pour les cochaînes $C^*(\mathscr{L}_M)$ sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞. Les classes de ces éléments sont linéairement indépendantes dans l'espace quotient des indécomposables, donc la famille consiste en une partie des générateurs multiplicatifs non redondante, ce qui démontre que la cohomologie $H^*(\mathscr{L}_{S^n})$ est de génération infinie si $n \geqslant 2$. La sous-algèbre engendrée par ces éléments est une algèbre libre graduée (si n est impair) ou un produit tensoriel d'une algèbre libre graduée avec des algèbres à multiplication triviale — les produits de deux éléments de degrés positifs sont tous nuls — (si n est pair). Comme corollaire, on déduit que la cohomologie $H^*(\mathscr{L}_M)$ est de génération infinie si M est de dimension $n \geqslant 2$ et est un produit cartésien de sphères cohomologiques, de groupes de Lie, etc. En particulier, $H^*(\mathscr{L}_{S^1 \times S^1})$ est de génération infinie tandis que $H^*(\mathscr{L}_{S^1})$ ne l'est pas.

SUMMARY. — Families of infinite numbers of indecomposable elements in the cohomology ring $H^*(\mathscr{L}_{S^n})$ of the Lie algebra of C^∞ vector fields on the sphere S^n of dimension $n \geqslant 2$ are constructed explicitely, using the model of Haefliger for the cochaines $C^*(\mathscr{L}_M)$ on the Lie algebra of C^∞ vector fields. The classes of these elements are linearly independent in the space of indecomposables, and so the families form a part of an irredundant multiplicative generating set. Therefore the ring $H^*(\mathscr{L}_{S^n})$ is of infinite generation if $n \geqslant 2$.

The subalgebra generated by the elements of these families is a free graded subalgebra in case n is odd, and a tensor product of a free graded subalgebra with subalgebras of trivial multiplications — any product of elements of positive degree vanishes — if n is even.

Since the method is of purely algebraic character, it can also be applied to deduce that the cohomology ring $H^*(\mathscr{L}_M)$ is of infinite generation if M is of dimension $n \geqslant 2$ and is a Cartesian product of cohomology sheres, of Lie groups, etc. In particular, $H^*(\mathscr{L}_{S^1 \times S^1})$ is infinitely generated while $H^*(\mathscr{L}_{S^1})$ is not.

(*) Texte reçu le 11 décembre 1978, révisé le 24 septembre 1979.

KATSUYUKI SHIBATA, Saitama University, Faculty of Liberal Arts, 255 Shimo-Okubo, Urawa, Saitama, Japan et Université de Genève, Faculté des Sciences, Section de Mathématiques, 2-4, rue du Lièvre, case postale 124, 1211 Genève 24, Suisse.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/117/$ 5.00

1. La cohomologie de l'algèbre de Lie graduée A_*

1.1. Définition de la cohomologie

Soit A_* une algèbre de Lie graduée positivement, c'est-à-dire $A_k=0$ pour $k<0$.

A_* est considérée comme une algèbre de Lie différentielle avec différentielle nulle.

Notons par ΣA_* la suspension de A_*, c'est-à-dire l'espace vectoriel gradué $(\Sigma A)_k=A_{k-1}$. Par cet isomorphisme $x\in A_{k-1}$ correspond à $\Sigma x\in(\Sigma A)_k$. Soit $S_*(\Sigma A_*)=\bigoplus_p S_*^{(p)}(\Sigma A_*)$ la coalgèbre symétrique sur ΣA_* et soit $C_{(p)}^*(A_*)=\mathrm{Hom}_R(S_*^{(p)}(\Sigma A_*),\mathbb{R})$ l'ensemble des p-formes multilinéaires symétriques sur ΣA_* à valeurs réelles (l'indice $_*$ indique le degré induit par celui de A_*).

Dans $C^*(A_*)=\bigoplus_{p\geq 0} C_{(p)}^*(A_*)$, on définit une différentielle

$$d:\quad C_{(p)}^k(A_*)\to C_{(p+1)}^{k+1}(A_*)$$

par la formule

$$d(f)(\Sigma x_1\ldots\Sigma x_{p+1})=-(-1)^{\deg f}f\Big(\sum_{k<l}(-1)^{\alpha(k,l)}\times\Sigma[x_k,x_l]\Sigma x_1\ldots\Sigma\hat{x}_k\ldots\Sigma\hat{x}_l\ldots\Sigma x_{p+1}\Big)$$

avec

$$\alpha(k,l)=(\deg x_1+\ldots+\deg x_{k-1}+\deg x_l+k+1)(\deg x_k+1)+(\deg x_1+\ldots+\deg x_{l-1}+l-1)(\deg x_l+1).$$

(*cf.* Haefliger [3], p. 506).

De la façon habituelle on définit les cocycles, les cobords et la cohomologie ainsi :

Définition :

$$Z^*(A_*)=\mathrm{Ker}\,d,\qquad B^*(A_*)=\mathrm{Im}\,d$$

et

$$H^*(A_*)=Z^*(A)/B^*(A).$$

1.2. Décomposition en somme directe de $H^*(A_*)$

Dans ce paragraphe, nous donnons une décomposition en somme directe de la cohomologie $H^*(A_*)$ par rapport à l'indice p — le nombre de facteurs.

Définition :

$$Z_{(p)}^*(A_*)=Z^*(A_*)\cap C_{(p)}^*(A_*),$$
$$B_{(p)}^*(A_*)=B^*(A_*)\cap C_{(p)}^*(A_*)$$

et

$$H^*_{(p)}(A_*)=Z^*_{(p)}(A_*)/B^*_{(p)}(A_*).$$

LEMME. — *On a la décomposition en somme directe suivante :*

$$H^*(A_*)=\bigoplus_{p\geq 0} H^*_{(p)}(A_*).$$

Démonstration. — Le lemme est clair à cause de la conduite de la différentielle.

1.3. LA STRUCTURE MULTIPLICATIVE ET LA DÉCOMPOSITION EN SOMME DIRECTE

Le produit

$$C^j_{(p)}(A_*)\otimes C^k_{(q)}(A_*)\to C^{j+k}_{(p+q)}(A_*)$$

défini par la formule

$$(f.f')(\Sigma x_1 \ldots \Sigma x_{p+q})$$
$$=\Sigma \pm f(\Sigma x_{\sigma(1)} \ldots \Sigma x_{\sigma(p)}).f'(\Sigma x_{\sigma(p+1)} \ldots \Sigma x_{\sigma(p+q)})$$

où σ parcourt les permutations de la forme $\sigma(1)<\ldots<\sigma(p)$ et $\sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q)$ induit le produit en cohomologie

$$H^j_{(p)}(A_*)\otimes H^k_{(q)}(A_*)\to H^{j+k}_{(p+q)}(A_*).$$

DÉFINITION. — *Soit $\tilde{H}^*(A_*)$ le noyau de l'homomorphisme d'augmentation*

$$\varepsilon:\ H^*(A_*)\to \mathbf{R};$$

(i) *l'idéal des décomposables $D^*(\tilde{H}^*(A_*))\subset \tilde{H}^*(A_*)$ est l'idéal engendré par $\tilde{H}^*(A_*).\tilde{H}^*(A_*)$;*

(ii) *l'espace des indécomposables $Q^*(\tilde{H}^*(A_*))$ est l'espace vectoriel réel défini par $Q^*(\tilde{H}^*(A_*))=\tilde{H}^*(A_*)/D^*(\tilde{H}^*(A_*))$.*

Il est facile de vérifier ceci :

LEMME. — *L'idéal $D^*(\tilde{H}^*(A))$ est homogène par rapport à l'indice p, c'est-à-dire*

$$f=\bigoplus_p f_{(p)}\in D^*(\tilde{H}^*(A_*))$$

avec $f_{(p)}\in \tilde{H}^*_{(p)}(A_*)$ implique $f_{(p)}\in D^*(\tilde{H}^*(A_*))$ pour tout p. Par conséquent, en posant

$$D^*_{(p)}(\tilde{H}^*(A_*))=D^*(\tilde{H}^*(A_*))\cap \tilde{H}^*_{(p)}(A_*)$$

et

$$Q^*_{(p)}(\tilde{H}^*(A_*))=\tilde{H}^*_{(p)}(A_*)/D^*_{(p)}(\tilde{H}^*(A_*)),$$

on a la décomposition en somme directe

$$Q^*(\tilde{H}^*(A_*))=\bigoplus_{p\geq 1} Q^*_{(p)}(\tilde{H}^*(A_*)).$$

2. Le cas où $A_* = L \oplus \overline{L}$

Dans ce qui suit et jusqu'à la fin de cette note, la lettre n désigne un entier quelconque $\geqslant 2$ fixé une fois pour toutes.

2.1. Algèbre de Lie graduée $L \oplus \overline{L}$

Soit U_* un espace vectoriel réel de dimension finie $m \geqslant 2$ et gradué tel que $U_i = 0$ pour $i < n+1$.

Soient L l'algèbre de Lie libre de l'espace vectoriel U_* et $\Sigma^{-n} L$ l'inverse de la suspension itérée n-fois sur L, i. e. $(\Sigma^{-n} L)_k = L_{k+n}$. Remarquons que $(\Sigma^{-n} L)_k = 0$ pour $k < 1$ par notre hypothèse sur U_*. Pour la simplicité, nous notons $\Sigma^{-n} L$ par $\overline{L}$ et $\Sigma^{-n} x$ par $\bar{x}\,(x \in L)$.

On a sur la somme directe $L \oplus \overline{L} \cong H^*(S^n) \otimes L$ une structure d'algèbre de Lie graduée avec

$$\deg \bar{x} = \deg x - n \qquad (x \in L)$$

et

$$[x_1 \oplus \bar{x}_2, y_1 \oplus \bar{y}_2] = [x_1, y_1] \oplus (\overline{[x_2, y_1]} + (-1)^{n.\deg x_1} \overline{[x_1, y_2]}).$$

(*cf.* Haefliger [3], p. 516).

C'est-à-dire, $L \oplus \overline{L}$ est le produit semi-direct $\overline{L} \times {}_\alpha L$, où $\overline{L}$ est considérée comme un L-module par la formule

$$\alpha(x).\bar{y} = (-1)^{n.\deg(x)} \overline{[x, y]}.$$

(*cf.* [5], p. 235).

Considérons maintenant la cohomologie $H^*(L \oplus \overline{L})$ de l'algèbre de Lie graduée $L \oplus \overline{L}$. D'après Haefliger [3], en posant

$$U_* = \Sigma^{-1} \tilde{H}^*(\hat{W}_n)',$$

on a

$$H^*(\mathscr{L}_{S^n}) = H^*(L \oplus \overline{L}).$$

2.2. Décomposition en somme directe de $H^*_{(p)}(L \oplus \overline{L})$.

On a l'isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$C^*(L \oplus \overline{L}) \cong C^*(L) \otimes C^*(\overline{L})$$

avec

$$C^k_{(p)}(L \oplus \overline{L}) \cong \textstyle\sum_{i+j=k,\, q+r=p} C^i_{(q)}(L) \otimes C^j_{(r)}(\overline{L}).$$

(Ici le symbole $\sum$ signifie la sommation, non la suspension). La différentielle correspondante s'écrit :

$$d(q, r): \quad C^i_{(q)}(L) \otimes C^j_{(r)}(\overline{L}) \to \textstyle\sum_{i'+j'=i+j+1} C^{i'}_{(q+1)}(L) \otimes C^{j'}_{(r)}(\overline{L}).$$

L'homogénéité de la différentielle par rapport aux indices (q, r) implique, comme pour l'indice p, que

$$H^*_{(p)}(L \oplus \overline{L}) \cong \textstyle\bigoplus_{q+r=p} H^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L})$$

avec

$$H^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L}) \doteq Z^*(C^*_{(q)}(L) \otimes C^*_{(r)}(\overline{L}))/B^*(C^*_{(q)}(L) \otimes C^*_{(r)}(\overline{L})).$$

D'après la définition, on obtient facilement ceci :

Lemme :

$$\mathrm{H}^*_{(0,0)}(L \oplus \overline{L}) \cong \mathbb{R},$$

$$H^*_{(1,0)}(L \oplus \overline{L}) \cong (\Sigma U_*)'$$

et

$$H^*_{(0,1)}(L \oplus \overline{L}) \cong (\Sigma \overline{U}_*)'.$$

Le produit

$$(C^*_{(q)}(L) \otimes C^*_{(r)}(\overline{L})) \otimes (C^*_{(q')}(L) \otimes C^*_{(r')}(\overline{L})) \to C^*_{(q+q')}(L) \otimes C^*_{(r+r')}(\overline{L})$$

induit le produit

$$H^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L}) \otimes H^*_{(q',r')}(L \oplus \overline{L}) \to H^*_{(q+q',r+r')}(L \oplus \overline{L}),$$

et

$$Q^*_{(p)}(H^*(L \oplus \overline{L})) = \textstyle\bigoplus_{q+r=p} Q^*_{(q,r)}(H^*(L \oplus \overline{L}))$$

avec

$$Q^*_{(q,r)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \tilde{H}^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L})/D^*_{(q,r)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})).$$

Remarque. — La décomposition en somme directe ci-dessus correspond à la trivialité de la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^p(L; H^q(\overline{L})) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(\overline{L} \times_\alpha L)$$

avec ici $H^q(\overline{L}) = C^q(\overline{L})$ puisque $\overline{L}$ a un crochet nul.

3. Calcul de $H_{(0,2)}(L \oplus \overline{L})$.

3.1. DÉCOMPOSITION DE $H^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L})$ PAR RAPPORT AUX LONGUEURS

Soit $\{\bar{e}_i\}_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel gradué U_*, chaque e_i étant de degré homogène. Nous fixons une fois pour toutes un ordre total dans l'ensemble $\{e_i\}_{i\in I}$ tel que $e_i < e_j$ si $\deg e_i < \deg e_j$.

Soit H l'ensemble de Hall relatif à $\{e_i\}$ de l'algèbre de Lie libre L engendrée par U_* (BOURBAKI [1], p. 27). Une base de l'espace vectoriel gradué L est donnée par $\hat{H} = H \cup \{[v, v]; v \in H, \deg v \text{ est impair}\}$ (HAEFLIGER [3], p. 518).

Dans la base $\hat{H}$ nous notons le dual de Σx $(x \in L)$ par x' et celui de $\Sigma \bar{x}$ par $\bar{x}'$ $(\bar{x} \in \overline{L})$. Remarquons que $x' \in (\Sigma L)' = C^*_{(1)}(L)$ et $\bar{x}' \in (\Sigma \overline{L})' = C^*_{(1)}(\overline{L})$.

Si un élément $x \in L$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\hat{H}$ de même longueur l, alors on dit que x est *de longueur* l. Si $x \in L$ est de longueur l, on dit aussi que $\Sigma x \in \Sigma L$, $x' \in C^*_{(1)}(L)$, $\bar{x} \in \overline{L}$, $\Sigma \bar{x} \in \Sigma \overline{L}$ et $\bar{x}' \in C^*_{(1)}(\overline{L})$ sont *de longueur* l. Si une chaîne $x \in C^{(p)}_*(\Sigma L \oplus \Sigma \overline{L})$ (respectivement une cochaîne $f \in C^*_{(p)}(L \oplus \overline{L})$) est un produit d'éléments de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_p$, alors on dit que x (respectivement f) est *de longueur* $l_1 + l_2 + \ldots + l_p$. Une combinaison linéaire d'éléments de $S^{(p)}_*(\Sigma L \oplus \Sigma \overline{L})$ ou de $C^*_{(p)}(L \oplus \overline{L})$ de même longueur l est aussi dit *de longueur* l.

Soit $C^*_{(q,r;l)}(L \oplus \overline{L})$ le sous-module de

$$C^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L}) = \overline{C^*_{(q)}(L) \otimes C^*_{(r)}(\overline{L})}$$

de tous les éléments de longueur l, c'est-à-dire de tous les éléments qui s'annulent sur toutes les chaînes de longueurs différentes de l. On a évidemment la décomposition en somme directe

$$C^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L}) = \bigoplus_{l \geq q+r} C^*_{(q,r;l)}(L \oplus \overline{L})$$

et la différentielle est homogène par rapport aux longueurs

$$d(q, r; l): \quad C^*_{(q,r;l)}(L \oplus \overline{L}) \to C^*_{(q+1,r;l)}(L \oplus \overline{L})$$

et par conséquent, on a, comme avant

$$H^*_{(q,r)} = \bigoplus_{l \geq q+r} H^*_{(q,r;l)}.$$

Puisqu'on a

$$D^*_{(0,2)}(L \oplus \overline{L}) = (\hat{H}^*_{(0,1)}(L \oplus \overline{L}).\hat{H}^*_{(0,1)}(L \oplus \overline{L})) = ((\Sigma \overline{U}_*)'.(\Sigma \overline{U}_*)'),$$

on obtient ceci :

LEMME :

$$H^*_{(0,2;2)}(L \oplus \overline{L}) = D^*_{(0,2)}(L \oplus \overline{L}),$$

et par conséquent, il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels

$$Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) \cong \bigoplus_{l \geqslant 3} H^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}).$$

3.2. NULLITÉ DE $Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L}))$ POUR n PAIR

Dans ce paragraphe, on démontre que $Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = 0$ pour n pair, en utilisant le lemme ci-dessous qui montre une forte symétrie parmi les valeurs prises par un 2-cocycle.

LEMME. — *Soit $l \geqslant 3$ et soit f un élément de $C^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L})$. Alors f est un 2-cocycle si et seulement si*

$$f(\Sigma\overline{[a, c]}.\Sigma\overline{b}) = (-1)^{\underline{b}.\underline{c}+(n+1)(\underline{b}+\underline{c})+n} f(\Sigma\overline{[a, b]}.\Sigma\overline{c})$$

pour tous les a, b, $c \in L$, où $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ sont les degrés de a, b, c respectivement.

Démonstration. — En considérant l'égalité

$$\begin{aligned}(df)(\Sigma a.\Sigma\overline{b}.\Sigma\overline{c}) &= -(-1)^{\deg f} f((-1)^{\alpha(1,2)}\Sigma[a,\overline{b}].\Sigma\overline{c} \\ &\qquad + (-1)^{\alpha(1,3)}\Sigma[a,\overline{c}].\Sigma\overline{b}) \\ &= -(-1)^{\deg f} f((-1)^{\alpha(1,2)+n.\underline{a}}\Sigma\overline{[a,b]}.\Sigma\overline{c} \\ &\qquad + (-1)^{\alpha(1,3)+n.\underline{a}}\Sigma\overline{[a,c]}.\Sigma\overline{b}),\end{aligned}$$

les calculs de la convention de signe pour $\alpha(1, 2)$ et $\alpha(1, 3)$ donnent le lemme.

PROPOSITION. — *Si n est pair, alors on a $Z^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}) = 0$ pour tout $l \geqslant 3$. Par conséquent, $H^*_{(0,2;l)}(L \oplus L) = 0$ pour tout $l \geqslant 3$,*

$$H^*_{(0,2)}(L \oplus \overline{L}) \cong H^*_{(0,2;2)}(L \oplus \overline{L}) = D_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L}))$$

et finalement $Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) \cong 0$.

Démonstration. — Supposons que f est un 2-cocycle non trivial $\in Z^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L})$ avec $l \geqslant 3$. Alors il existe $a, b, c \in \tilde{H}$ tels que $l(a) + l(b) + l(c) = l$ et que $f(\Sigma\overline{[a, c]}.\Sigma\overline{b}) \neq 0$. Le lemme ci-dessus implique

(1) $$f(\Sigma\overline{[a, c]}.\Sigma\overline{b}) = (-1)^{\underline{b}.\underline{c}+(n+1)(\underline{b}+\underline{c})+n} f(\Sigma\overline{[a, b]}.\Sigma\overline{c}) \neq 0.$$

En permutant a et b dans le même lemme, on obtient :

$$(2)\qquad f(\Sigma\overline{[b,c]}.\Sigma\bar{a})=(-1)^{\underline{a}.\underline{c}+(n+1)(\underline{a}+\underline{c})+n+1+\underline{a}.\underline{b}}f(\Sigma\overline{[a,b]}.\Sigma\bar{c})\neq 0.$$

Encore en permutant a et c dans le même lemme, on obtient :

$$(3)\qquad f(\Sigma\overline{[a,c]}.\Sigma\bar{b})=(-1)^{\underline{a}.\underline{c}+\underline{a}.\underline{b}+(n+1)(\underline{a}+\underline{b})+n+\underline{b}.\underline{c}}f(\Sigma\overline{[b,c]}.\Sigma\bar{a})\neq 0.$$

D'après (1), (2) et (3) il résulte que

$$(4)\qquad f(\Sigma\overline{[a,b]}.\Sigma\bar{c})=(-1)^{1+n}f(\Sigma\overline{[a,b]}.\Sigma\bar{c})\neq 0,$$

ce qui est une contradiction si n est pair.

COROLLAIRE. — *Si n est pair, alors on a*

$$H^*_{(0,3;3)}(L\oplus\bar{L})=D_{(0,3)}(\tilde{H}^*(L\oplus\bar{L}))$$

et il existe un isomorphisme canonique

$$Q^*_{(0,3)}(\tilde{H}^*(L\oplus\bar{L}))\cong\bigoplus_{l\geq 4}H^*_{(0,3;l)}(L\oplus\bar{L}).$$

Remarque. — $\dim Q^*_{(1,1)}(\tilde{H}(L\oplus\bar{L}))=\infty$ pour n pair et impair [6].

3.3. CHANGEMENT DE BASE

Pour simplifier le calcul de $H^*(C^*(L)\oplus C^*(\bar{L}))$, on fait le changement de base, en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME ([3], p. 507). — *Soit L l'algèbre de Lie graduée libre sur un espace vectoriel U_* graduée positivement. Alors l'homomorphisme induit par la restriction*

$$C^*(L)=S_*(\Sigma L)'\to(R\oplus\Sigma U_*)'$$

induit un isomorphisme en cohomologie, où le côté droit est considéré comme un complexe $\bar{C}^*$ tel que $\bar{C}^i=0$ pour $i\geq 2$.

Voici une idée de la démonstration. — Soit $\mathscr{U}(L)$ l'algèbre enveloppante de L. On définit deux résolutions $\mathscr{U}(L)$-libres de $\mathbb{R}$;

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots\to & \mathscr{U}(L)\otimes S_2(\Sigma L) & \to & \mathscr{U}(L)\otimes S_1(\Sigma L) & \to & \mathscr{U}(L) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{R} \\
 & & & & & \| & & \| \\
\dots\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathscr{U}(L)\otimes\Sigma U_* & \longrightarrow & \mathscr{U}(L) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{R}
\end{array}$$

(*cf.* [5], p. 243, th. 4.2, p. 236 et th. 2.5).

La cohomologie de $C^*(L)$ s'identifie à $H^*(L;\mathbb{R})$ *via* la première résolution, tandis que celle de $(\mathbb{R}\oplus\Sigma U_*)'$ s'identifie, elle aussi, à $H^*(L;\mathbb{R})$ *via* la seconde résolution. La construction habituelle d'homotopie assure que l'inclusion $U_* \to L$ induit un isomorphisme en cohomologie, ce qui démontre le théorème.

Maintenant considérons les filtrations de $C^*(L) \otimes C^*(\overline{L})$ et de $(\mathbb{R} \oplus \Sigma U_*)' \otimes C^*(\overline{L})$ par rapport aux degrés des éléments des premiers facteurs respectifs. L'homomorphisme de restriction mentionné dans le théorème précédent induit un morphisme de suites spectrales associées aux filtrations, qui est un isomorphisme en terme E_2 :

$$H^*(C^*(L)) \otimes H^*(C^*(\overline{L})) \to H^*((\mathbb{R} \oplus \Sigma U)') \otimes H^*(C^*(\overline{L})).$$

(*cf.* [7], lemme 2.2.1).

Donc on obtient le résultat suivant dû à Haefliger :

PROPOSITION. — *La restriction*

$$C^*(L) \otimes C^*(\overline{L}) \to (\mathbb{R} \oplus \Sigma U_*)' \otimes C^*(\overline{L}),$$

induit un isomorphisme en cohomologie. La différentielle induite sur $(\mathbb{R} \oplus \Sigma U_*)' \otimes C^*(\overline{L})$ *ayant une unique composante non triviale par rapport à l'indice* q (*i. e. le cas où* $q=0$),

$$\tilde{d}(0, r): \quad C^*_{(r)}(\overline{L}) \to (\Sigma U_*)' \otimes C^*_{(r)}(\overline{L}),$$

on a les isomorphismes canoniques

(i) $H^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L}) \cong \operatorname{Ker} \tilde{d}_{(0,r)}$,

(ii) $H^*_{(1,r)}(L \oplus \overline{L}) \cong \operatorname{CoKer} \tilde{d}_{(0,r)}$

et

(iii) $H^*_{(q,r)}(L \oplus \overline{L}) \cong 0$ *pour tout* $q \geqslant 2$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} H^*(L \oplus \overline{L}) &= \textstyle\bigoplus_{r \geqslant 0} H^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L}) \oplus \bigoplus_{r \geqslant 0} H^*_{(1,r)}(L \oplus \overline{L}) \\ &= \textstyle\bigoplus_{r \geqslant 0} \operatorname{Ker} \tilde{d}_{(0,r)} \oplus \bigoplus_{r \geqslant 0} \operatorname{CoKer} \tilde{d}_{(0,r)} \end{aligned}$$

avec les multiplications

$$H^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L}) \otimes H^*_{(0,s)}(L \oplus \overline{L}) \to H^*_{(0,r+s)}(L \oplus \overline{L}),$$

$$H^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L}) \otimes H^*_{(1,s)}(L \oplus \overline{L}) \to H^*_{(1,r+s)}(L \oplus \overline{L})$$

et

$$H^*_{(1,r)}(L \oplus \overline{L}) \otimes H^*_{(1,s)}(L \oplus \overline{L}) \to 0.$$

3.4. Construction de classes indécomposables pour n impair

Dans ce paragraphe, nous démontrons que dim $Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \infty$ pour n impair, en construisant explicitement une famille infinie d'éléments linéairement indépendants de

$$\bigoplus_{l \geq 3} Z^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}) \cong \bigoplus_{l \geq 3} H^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}) \cong Q^*_{(0,2)}(H^*(L \oplus \overline{L}))$$

(*cf.* 3.1, lemme).

Rappelons que nous avons supposé que dim $U_* \geq 2$, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments linéairement indépendants de U_*.

Théorème A. — *Supposons que n est impair. Soient x et y deux éléments de la base* $\{e_i\}_{i \in I}$ *de* U_* *tels que* $x < y$, *et* $l \geq 3$ *un entier tel que*

$$l \equiv 0 \,(mod\, 2) \quad si \quad \underline{x} \equiv \underline{y} \equiv 0 \,(mod\, 2),$$

$$l \equiv 1 \,(mod\, 2) \quad si \quad \underline{x} \equiv 0, \quad \underline{y} \equiv 1 \,(mod\, 2),$$

$$l \equiv 1, 2 \,(mod\, 4) \quad si \quad \underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0 \,(mod\, 2)$$

et

$$l \equiv 3, 0 \,(mod\, 4) \quad si \quad x \equiv y \equiv 1 \,(mod\, 2)$$

avec $\underline{x}$ *et* $\underline{y}$ *les degrés respectifs de x et de y.*

Alors on a le 2-cocycle non trivial $P(x, y; l) \in Z^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L})$ *défini par*

$$\begin{aligned}
P(x, y; l) = {} & \Sigma(-1)^{s(i)} \delta(j-i) \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]'} \\
& \times \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]'} + \Sigma(-1)\, s(i+1)\, \overline{x}' \\
& \times \overline{[[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]], [\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]]'} \\
& + \{1 + (-1)^{1+\underline{x}}\} \Sigma(-1)^{s(i+2)} \overline{[x, x]}' \\
& \times \overline{[[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]], [\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]]'}
\end{aligned}$$

avec $s(0) = 0$, $s(i) = i(\underline{x} \cdot \underline{y} + 1) + \{(i-1)i/2\} \cdot \underline{x}$, *pour* $i \geq 1$, $\delta(0) = 1/2$ *et* $\delta(h) = 1$ *pour* $h \neq 0$, *où la première sommation parcourt tous les* i, j *tels que*

$0 \leqslant i \leqslant j$ et que $i+j+2=l$, la seconde parcourt tous les i, j tels que $0 \leqslant i \leqslant j$ et que $i+j+3=l$ et la troisième parcourt tous les i, j tels que $0 \leqslant i \leqslant j$ et que $i+j+4=l$.

Démonstration. — La condition sur l par rapport aux parités de $\deg x$ et de $\deg y$ garantit que les éléments

$$\overline{(\underbrace{[x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]')^2}$$

et

$$\overline{[[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]], [\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]]'}$$

ne paraissent pas dans l'expression de $P(x, y; l)$ ou bien qu'ils sont non triviaux. Par conséquent, les termes paraissant dans l'expression de $P(x, y; l)$ sont des produits non triviaux distincts de deux éléments de la base $\hat{H}'$ de l'espace vectoriel $(\Sigma \overline{L})' = C^*_{(1)}(\overline{L})$, d'où résulte le fait que $P(x, y; l) \neq 0$ dans $C^*(L \oplus \overline{L})$.

Pour vérifier que $P(x, y; l)$ est un 2-cocycle, on devrait démontrer que les valeurs de $dP(x, y; l)$ sur tous les produits symétriques de trois éléments de la base $\Sigma \hat{H}$ contenant en total deux y et $(l-2)x$ sont nulles. Mais grâce à la proposition du paragraphe 3.3, on peut se restreindre aux cas assez limités qui se classifient en deux groupes suivants (*cf.* Bourbaki [1], exemple, p. 30); (1er groupe). Deux facteurs contiennent y.

Les produits ont l'une des formes suivantes :

$$\Sigma x . \Sigma \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]} . \Sigma \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]} \qquad (i+j+3=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j),$$

$$\Sigma y . \Sigma \bar{x} . \Sigma \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]} \qquad (i+3=l)$$

et

$$\Sigma y . \Sigma \overline{[x, x]} . \Sigma \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]} \qquad (i+4=l,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2).$$

(2e groupe), un seul facteur contient y.

Les produits ont l'une des formes suivantes :

$$\Sigma x . \Sigma \bar{x} . \Sigma \overline{[[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]], [\underbrace{x, \ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]]} \qquad (i+j+4=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j)$$

et

$$\Sigma x . \Sigma \overline{[x, x]} . \Sigma \overline{[\underbrace{[x, \ldots, [x, y]] .]]}_{i}, \underbrace{[x, \ldots, [x, y]] .]]]}_{j}}$$

$$(i+j+5=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2).$$

Dans tous les cas, on peut vérifier facilement que les valeurs de $dP(x, y; l)$ sont nulles grâce à la condition sur l dans l'énoncé du théorème.

COROLLAIRE. — *Si n est impair, on a* $\dim Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \infty$ *et par conséquent* $\dim Q^*(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \infty$, *i.e. l'algèbre $H^*(L \oplus \overline{L})$ est de génération infinie* (HAEFLIGER [3], p. 520).

Démonstration. — On a

$$Q^*(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \bigoplus_{q,r} Q^*_{(q,r)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L}))$$

et, d'après le lemme de 3.1,

$$Q^*_{(0,2)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) \cong \bigoplus_{l \geqslant 3} H^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}).$$

Mais par la conduite de la différentielle montrée dans 2.2,

$$H^*_{(0,r;l)}(L \oplus \overline{L}) = Z^*_{(0,r;l)}(L \oplus \overline{L})$$

pour tous les r et les l.

Or le théorème ci-dessus dit que $\dim Z^*_{(0,2;l)}(L \oplus \overline{L}) \geqslant 1$ pour les l qui satisfont la condition de l'énoncé du théorème.

Remarque. — En vertu de la symétrie montrée dans le lemme de 3.2, les 2-cocycles donnés dans le théorème A sont les seuls 2-cocycles qui contiennent deux y et $(l\text{-}2)$ x.

3.5. SOUS-ALGÈBRE ENGENDRÉE PAR LES ÉLÉMENTS EN QUESTION

En vertu du théorème A, on obtient les familles infinies des éléments

$$\{P(e_1, e_2; l)\}, \quad \{P(e_1, e_3; l)\}, \quad \ldots,$$
$$\{P(e_i, e_j; l); i<j\}, \quad \ldots, \quad \{P(e_{N-1}, e_N; l)\}$$

avec $N = \dim U_*$.

PROPOSITION. — *Les éléments des familles ci-dessus sont des générateurs d'une sous-algèbre libre (graduée) de $H^*(L \oplus \overline{L})$.*

Démonstration. — On définit le terme caractéristique $p(x, y; l)$ de $P(x, y; l)$ comme suivant :

(i) $$p(x, y; l) = (\overline{[\underbrace{x, \ldots,}_{(l-2)/2} [x, y] \ldots]'})^2$$

si

$$\underline{x} \equiv \underline{y} \equiv 0(2) \quad \text{ou} \quad \underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0(2), \quad l \equiv 2(4)$$

ou

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 1(2), \quad l \equiv 0(4).$$

(ii) $$p(x, y; l) = \bar{x}' . \overline{[[\underbrace{x, \ldots,}_{(l-3)/2} [x, y] \ldots], [\underbrace{x, \ldots,}_{(l-3)/2} [x, y] \ldots]]'}$$

si

$$\underline{x} \equiv 0, \quad \underline{y} \equiv 1(2),$$

(iii) $$p(x, y; l) = \overline{[x, x]'} . \overline{[[\underbrace{x, \ldots,}_{(l-5)/2} [x, y] \ldots], [\underbrace{x, \ldots,}_{(l-3)/2} [x, y] \ldots]]'}$$

si

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0(2), \quad l \equiv 1(4)$$

ou

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 1(2), \quad l \equiv 3(4).$$

Il est facile de voir que, pour un polynôme $F(X_1, \ldots, X_k)$,

(1) $$F(P(x_1, y_1; l_1), P(x_2, y_2; l_2), \ldots, P(x_k, y_k; l_k)) = 0$$

dans $Z^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L})$ implique que

(2) $$F(p(x_1, y_1; l_1), p(x_2, y_2; l_2), \ldots, p(x_k, y_k; l_k)) = 0$$

dans $C^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L})$. Mais, puisque $C^*(\overline{L}) = \bigoplus_{r \geq 0} C^*_{(0,r)}(L \oplus \overline{L})$ est une algèbre libre graduée engendrée par $\overline{H}' \cup \{\overline{[v, v]}'; v \in H, \deg v \equiv 1(2)\}$, la nullité (2) ci-dessus implique que

(3) $$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = 0$$

dans l'algèbre libre graduée $S_*(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ engendrée par les indéterminants $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ avec $\deg Y_i = \deg P(x_i, y_i; l_i)$.

D'où résulte la proposition.

4. Calcul dans $H^*_{(0,3)}(L \oplus \overline{L})$ pour n pair

Dans cette section on suppose toujours que n est pair.

4.1. CONSTRUCTION DE CLASSES INDÉCOMPOSABLES POUR n PAIR

D'après le corollaire de 3.2, on a un isomorphisme canonique

$$Q^*_{(0,3)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) \cong \oplus_{l \geqslant 4} H^*_{(0,3;l)}(L \oplus \overline{L}) (\cong \bigoplus_{l \geqslant 4} Z^*_{(0,3;l)}(L \oplus \overline{L}))$$

pour n pair. Alors on démontre que $\dim Q^*_{(0,3)}(\tilde{H}^*(L \oplus \overline{L})) = \infty$ en construisant explicitement une famille infinie d'éléments linéairement indépendants de $\bigoplus_{l \geqslant 4} Z^*_{(0,3;l)}(L \oplus \overline{L})$ de façon analogue à 3.4.

THÉORÈME B. — *Supposons que n est pair. Soient x et y deux éléments de la base $\{e_i\}$ de U_* tels que $x < y$ et $l \geqslant 4$ un entier tel que*

$$l \equiv 0 (mod\ 2) \quad si \quad \underline{x} \equiv \underline{y} \equiv 0 (mod\ 2),$$

$$l \equiv 1 (mod\ 2) \quad si \quad \underline{x} \equiv 0, \quad \underline{y} \equiv 1\ (mod\ 2),$$

$$l \equiv 1, 2\ (mod\ 4) \quad si \quad \underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0\ (mod\ 2)$$

et

$$l \equiv 3, 0\ (mod\ 4) \quad si \quad \underline{x} \equiv \underline{y} \equiv 1\ (mod\ 2)$$

avec $\underline{x}$ et $\underline{y}$ les degrés respectifs de x et de y.

Alors on a le 3-cocycle non trivial $P(x, y; l) \in Z^*_{(0,3;l)}(L \oplus \overline{L})$ défini par

$$\begin{aligned} P(x, y; l) = {} & \Sigma(-1)^{s(i)} \delta(j-i) \overline{x}' \\ & \times \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]}' \cdot \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]}' \\ & - \{1 + (-1)^{1+\underline{x}}\} \Sigma(-1)^{s(i)} \overline{x}' . \overline{x}' \\ & \times \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]], [\underbrace{x, \ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]]}' \\ & - \{1 + (-1)^{1+\underline{x}}\} \Sigma(-1)^{s(i+1)} \delta(j-i) \overline{[x, x]}' \\ & \times \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{i}, y]] \cdot]]}' \cdot \overline{[\underbrace{x, \ldots, [x}_{j}, y]] \cdot]]}' \end{aligned}$$

avec $s(0) = 0$, $s(i) = i(\underline{x} . \underline{y} + 1) + \{(i-1) . i/2\} . \underline{x}$, pour $i \geqslant 1$, $\delta(0) = 1/2$ et $\delta(h) = 1$ pour $h \neq 0$, où la première sommation parcourt tous les i, j tels que $0 \leqslant i \leqslant j$ et que $i + j + 3 = l$, tandis que la seconde et la troisième parcourent tous les i, j tels que $0 \leqslant i \leqslant j$ et que $i + j + 4 = l$.

Démonstration. — Comme dans 3.4, la condition sur l assure que $P(x, y; l) \neq 0$. Aussi comme avant, on peut se restreindre aux cas ci-dessous pour calculer les valeurs de $dP(x, y; l)$ sur les produits de quatre éléments de $\hat{H}$.

(1[er] groupe), deux facteurs contiennent y.

Les produits ont l'une des formes suivantes :

$$\Sigma x.\Sigma \bar{x}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]]}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]]\cdot]]} \qquad (i+j+4=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j),$$

$$\Sigma x.\Sigma \overline{[x, x]}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]]}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]]\cdot]]}$$

$$(i+j+5=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2),$$

$$\Sigma y.\Sigma \bar{x}.\Sigma \bar{x}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]]} \qquad (i+4=l,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2),$$

$$\Sigma y,\ \Sigma \bar{x}.\Sigma \overline{[x, x]}.\Sigma \overline{[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]]} \qquad (i+5=l,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2).$$

(2[e] groupe), un seul facteur contient y.

Les produits ont l'une des formes suivantes :

$$\Sigma x.\Sigma \bar{x}.\Sigma \bar{x}.\Sigma \overline{[[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]], [\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]]\cdot]]]}$$

$$(i+j+5=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2),$$

$$\Sigma x.\Sigma \bar{x}.\Sigma \overline{[x, x]}.\Sigma \overline{[[\underbrace{x, [\ldots, [x}_{i}, y]]\cdot]], [\underbrace{x, [\ldots, [x}_{j}, y]]\cdot]]]}$$

$$(i+j+6=l,\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ \underline{x} \equiv 1 \bmod 2.$$

Dans tous les cas, on vérifie explicitement que toutes les valeurs de $dP(x, y; l)$ sont nulles.

COROLLAIRE. — *Si n est pair, on a* $\dim Q^{*}_{(0,3)}(\hat{H}^{*}(L \oplus \bar{L})) = \infty$ *et par conséquent* $\dim Q^{*}(\hat{H}^{*}(L \oplus \bar{L})) = \infty$, *i.e. l'algèbre $H^{*}(L \oplus \bar{L})$ est de génération infinie* (HAEFLIGER [3], p. 520).

4.2. SOUS-ALGÈBRE ENGENDRÉE PAR LES ÉLÉMENTS EN QUESTION

Comme dans 3.5, considérons des familles infinies d'éléments

$$\{P(e_1, e_2; l)\}, \quad \{P(e_1, e_3; l)\}, \quad \ldots,$$
$$\{P(e_i, e_j; l); i<j\}, \quad \ldots, \quad \{P(e_{N-1}, e_N; l)\}$$

avec $N=\dim U_*$. Pour simplifier la formule, on suppose que

$$\deg e_1 \equiv \deg e_2 \equiv \ldots \equiv \deg e_k \equiv 1 \pmod 2$$

et

$$\deg e_{k+1} \equiv \deg e_{k+2} \equiv \ldots \equiv \deg e_N \equiv 0 \pmod 2.$$

Notons par $V^*(1, S)$ l'espace vectoriel formel gradué engendré par l'unité 1 de degré zéro et un ensemble gradué strictement positif S (i.e. $S_q=\emptyset$ pour $q \leqslant 0$), et considérons $V^*(1, S)$ comme une algèbre avec multiplication triviale (i. e. $x.y=0$ si $\deg x > 0$ et $\deg y > 0$).

PROPOSITION. — *Les éléments des familles infinies ci-dessus engendrent une sous-algèbre de $H^*(L \oplus \bar{L})$ qui est le produit tensoriel d'une algèbre libre graduée et d'algèbres avec multiplication triviale*

$$\begin{aligned} S_*(\{P(e_1, e_2; l)\}, \{P(e_1, e_3; l)\}, \ldots, \\ \{P(e_k, e_{N-1}; l)\}, \{P(e_k, e_N; l)\}) \\ \otimes V^*(1, \{P(e_{k+1}, e_{k+2}; l)\}, \ldots, \{P(e_{k+1}, e_N; l)\}) \\ \otimes V^*(1, \{P(e_{k+2}, e_{k+3}; l)\}, \ldots, \{P(e_{k+2}, e_N; l)\}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \otimes V^*(1, \{P(e_{N-1}, e_N; l)\}). \end{aligned}$$

Démonstration. — Si $\deg e_j \equiv 0 \pmod 2$, alors :

$$P(e_j, e_m; l)=\sum(-1)^{s(i)}\bar{e}_j'.\overline{[\underbrace{[e_j, \ldots,}_{i} [e_j, e_m]..]'}.\overline{[\underbrace{e_j, \ldots,}_{l-3-i} [e_j, e_m]..]'}$$

et $P(e_j, e_m; l)$ engendre une sous-algèbre extérieure dans $H^*(L \oplus \bar{L})$ car $(\bar{e}_j')^2=0$ dans $C^*(L \oplus \bar{L})$ à cause du degré. Et on obtient la partie concernant des algèbres avec multiplication triviale. Pour la partie concernant l'algèbre libre graduée, on définit, comme dans 3.5, le terme caractéristique :

$$p(x, y; l)=\bar{x}'.(\overline{[\underbrace{x, \ldots,}_{(l-3)/2} [x, y]..]'})^2$$

si

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0(2), \quad l \equiv 1(4)$$

ou

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 1(2), \quad l \equiv 3(4),$$

$$p(x, y; l) = \bar{x}'.\bar{x}'.\overline{[\underbrace{[x, \ldots, [x}_{(l-4)/2}, y]..], \underbrace{[x, \ldots, [x}_{(l-4)/2}, y]..]'}$$

si

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 0(2), \quad l \equiv 2(4)$$

ou

$$\underline{x} \equiv 1, \quad \underline{y} \equiv 1(2), \quad l \equiv 0(4).$$

4.3. Indécomposables dans $\tilde{H}^*(\mathscr{L}_{S^2})$.

Considérons, par exemple, le cas où $n=2$ et $U_* = \Sigma^{-1}\tilde{H}_*(2)$, c'est-à-dire le cas où $H^*(L \oplus \bar{L}) = H^*(\mathscr{L}_{S^2})$ (Haefliger [3], p. 520).

Puisque $\tilde{H}_k(n) = (H^k(\hat{W}_n))'$ pour $k \neq 0$, l'espace vectoriel $\Sigma^{-1}\tilde{H}_*(2)$ a une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ telle que deg e_1 = deg $e_2 = 4$, deg $e_3 = 6$, deg e_4 = deg $e_5 = 7$ (*cf.* Vey [2]).

La classe $P(e_1, e_2; 4) = \bar{e}_1'.\bar{e}_2'.\overline{[e_1, e_2]'} \in H^{13}_{(0,3;4)}(\mathscr{L}_{S^2})$ est celle que Haefliger a noté par $\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_{12}$ dans [2].

Plus généralement on a dix familles infinies d'éléments indécomposables mutuellement indépendantes;

$$P(e_1, e_2; 2l) \in H^{8(l-1)+5}_{(0,3;2l)}(\mathscr{L}_{S^2}); \qquad l = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

$$P(e_1, e_3; 2l), \qquad P(e_2, e_3; 2l) \in H^{8l+1}_{(0,3;2l)}(\mathscr{L}_{S^2}); \qquad l = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

$$P(e_1, e_4; 2l+1), \qquad P(e_1, e_5; 2l+1),$$

$$P(e_2, e_4; 2l+1), \qquad P(e_2, e_5; 2l+1) \in H^{8l+7}_{(0,3;2l+1)}(\mathscr{L}_{S^2});$$
$$l = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.$$

$$P(e_3, e_4; 2l+1), \qquad P(e_3, e_5; 2l+1) \in H^{12l+5}_{(0,3;2l+1)}(\mathscr{L}_{S^2});$$
$$l = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

$$P(e_4, e_5; 4l) \in H^{28(l-1)+25}_{(0,3;4l)}(\mathscr{L}_{S^2}); \qquad l = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$P(e_4, e_5; 4l+3) \in H^{28l+18}_{(0,3;4l+3)}(\mathscr{L}_{S^2}); \qquad l = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Ainsi, on voit qu'il y a une famille infinie des générateurs multiplicatifs dans des dimensions paires ainsi que dans des dimensions impaires.

Remarque. — Pour tout $n \geqslant 2$, les cocycles $P(x, y; l)$ sont en fait $SO(n+1)$-basique pour l'action canonique de $SO(n+1)$ sur S^n. Donc $H^*(\mathscr{L}_{S^n}; SO(n+1))$ est aussi de génération infinie pour tout $n \geqslant 2$ [6].

5. Remarque générale

La démonstration des théorèmes A et B signifie en fait le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soient L une algèbre de Lie libre graduée sur un espace vectoriel réel gradué de dimension au moins deux et $E(x)$ une algèbre extérieure graduée à un générateur de dimension positive. Alors la cohomologie de l'algèbre de Lie graduée $E(x) \otimes L$ est multiplicativement de génération infinie.*

Par conséquent, nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soit M une variété différentiable telle que :*

(1) *M est de dimension au moins deux;*

(2) *il existe une algèbre différentielle graduée A^* de dimension finie en chaque degré et un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées*

$$\alpha : \quad A^* \to \Omega^*(M)$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie;

(3) *toutes les classes de Pontrjagin de M sont nulles, et*

(4) *il existe un cycle indécomposable $x \in A^*$ de dimension positive qui n'appartient pas à dA^* et dont le carré est nul.*

Alors la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $H^*(\mathscr{L}_M; \mathbb{R})$ est multiplicativement de génération infinie.

Démonstration. — Par l'hypothèse (4), on a l'inclusion i et une rétraction r;

$$A^* \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} E(x)$$

qui sont en fait des homomorphismes d'algèbres différentielles graduées. Ils induisent des homomorphismes d'algèbres de Lie différentielles graduées

$$A^* \otimes L \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} E(x) \otimes L$$

et des homomorphismes en cohomologie

$$(a) \qquad H^*(A^* \otimes L) \underset{i^*}{\overset{r^*}{\rightleftarrows}} H^*(E(x) \otimes L)$$

tels que $i^* \circ r^* = \mathrm{id}$.

Les hypothèses (2) et (3) impliquent que

$$(b) \qquad H^*(\mathscr{L}_M;\, \mathbb{R}) \cong H^*(A^* \otimes L)$$

d'après Haefliger [3]. D'autre part, l'hypothèse (1) assure que $\hat{W}_n$ est de dimension au moins deux, où $L = L(\hat{W}_n)$, et notre théorème est applicable dans ce cas-là. Les formules (a) et (b) signifient que $H^*(\mathscr{L}_M;\, \mathbb{R})$ a une rétraction sur une algèbre de génération infinie, et donc $H^*(\mathscr{L}_M;\, \mathbb{R})$ elle-même est de génération infinie.

C.Q.F.D.

Remarquons que l'ensemble des variétés satisfaisant les propriétés (i) ~ (iv) dans le corollaire ci-dessus est stable par produit cartésien. Alors, par exemple, tous les produits cartésiens de dimension totale au moins deux entre des variétés dans les catégories suivantes satisfont les propriétés (i) ~ (iv) :

(i) les sphères homologiques;

(ii) les groupes de Lie;

(iii) les variétés compactes simplement connexes, stablement parallélisables avec

$$\text{minimum}\,\{i > 0;\ H^i(M;\, \mathbb{R}) \neq 0\} \equiv 1 \pmod 2;$$

(iv) les produits de l'un des (i) ~ (iii) avec $\mathbb{R}^k (k \geqslant 1)$.

Notons que la cohomologie $H^*(\mathscr{L}_{S^1};\, \mathbb{R})$ des champs de vecteurs sur la sphère S^1 est de génération finie d'après Gelfand-Fuks (un générateur de degré 2 et l'autre de degré 3), mais que les cohomologies de champs de vecteurs sur la sphère épaissie $S^1 \times (0, 1)$ et sur le tore $S^1 \times S^1$ sont déjà de génération infinie.

Remarque. — Les constructions des familles infinies de cocycles données dans cet article se généralisent aux cas assez généraux [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, chap. II, *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris, 1972.

[2] Godbillon (C.). — *Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels* (*Séminaire Bourbaki*, n° 421, 1972-1973).

[3] Haefliger (A.). — *Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs*, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 9, 1976, p. 503-532.

[4] HAEFLIGER (A.). — *On the Gelfand-Fuks cohomology*, *Ens. Math.* 24, 1978, p. 143-160.

[5] HILTON (P. J.) and STAMMBACH (U.). — *A course in homological algebra*, (G.T.M. n° 4, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971).

[6] SHIBATA (K.). — *Calculations of Haefliger's model for the Gelfand-Fuks cohomology* (en préparation).

[7] TSUJISHITA (T.). — *On the continuous cohomology of the Lie algebra of vector fields associated with non trivial coefficients* (à paraître).