Bulletin de la S. M. F.

Jacques Vey

Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 423-432
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__423_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 423-432.

ALGÈBRES COMMUTATIVES DE CHAMPS DE VECTEURS ISOCHORES

PAR

JACQUES VEY (*)
[Centre univ. Savoie et Inst. Fourier]

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'une sous-algèbre de Cartan de champs de vecteurs isochores peut être analytiquement réduite à sa forme normale.

ABSTRACT. — We prove that a Cartan subalgebra of isochore vector-fields can be analytically reduced to its normal form.

THÉORÈME. — *Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ une famille de $n-1$ champs de vecteurs sur $\mathbf{C}^n$, analytiques au voisinage de l'origine, commutant deux à deux, isochores pour une certaine forme volume ω (i. e. les dérivées de Lie $\theta_{X_i}\omega$ sont nulles; les groupes à un paramètres correspondant préservent ω). Supposons les champs X_i tous nuls à l'origine, et leurs jets d'ordre 1 (qui sont des transformations linéaires de $\mathbf{C}^n$) diagonalisables, et linéairement indépendants. Il existe alors des coordonnées analytiques $x_1, \ldots, x_n$ au voisinage de l'origine, qui soient isochores (i. e. $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$), et qui permettent d'écrire :*

$$X_i = \textstyle\sum_1^{n-1} F_{ij}(x_1 x_2 \ldots x_n)\left(x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} - x_{j+1}\dfrac{\partial}{\partial x_{j+1}}\right) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

avec des fonctions analytiques d'une variable F_{ij} convenables.

Une première conséquence de cet énoncé est l'existence d'une intégrale première commune aux X_i, nommément le produit $x_1 \ldots x_n$. En considérant tous les champs

$$X = \textstyle\sum_1^{n-1} F_i(x_1 \ldots x_n)\left(x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} - x_{i+1}\dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}}\right),$$

(*) Texte reçu le 20 janvier 1979.

Jacques VEY, Mathématiques pures, Institut Fourier, B.P. n° 116, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

Classification matières AMS (MOS) 1980 : 58 F 05.

Vedettes matières : Algèbres commutatives. Champs de vecteurs isochores.

on obtient une sous-algèbre abélienne maximale $\mathscr{L}$ de l'algèbre des champs isochores pour $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$; tronquée modulo $\mathfrak{m}^2\, \mathbf{C}^n$ (i. e. les champs nuls à l'ordre 1), cette algèbre donne toutes les combinaisons linéaires complexes des $x_j\,(\partial/\partial x_j) - x_{j+1}\,(\partial/\partial x_{j+1})$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Cartan standard dans $\mathfrak{sl}\,(n, C)$. Des calculs assez simples font voir que le normalisateur de $\mathscr{L}$ dans l'algèbre des champs isochores se réduit à $\mathscr{L}$, tandis que son normalisateur dans l'algèbre de tous les champs contient en outre les champs $f\,(x_1 \ldots x_n) \sum_1^n x_i\,(\partial/\partial x_i)$, f fonction analytique arbitraire d'une variable.

Ce théorème est lié aux questions de forme normale pour les champs isochores. Rappelons la situation : soit X un champ sur $\mathbf{C}^n$, analytique au voisinage de l'origine, isochore pour une certaine forme volume ω, et nul à l'origine. Le jet d'ordre 1 de X, qui est une transformation linéaire de $\mathbf{C}^n$, a une trace nulle, à cause de la condition isochore; et si l'on suppose ses valeurs propres indépendantes sur $\mathbf{Z}$ modulo cette relation de trace nulle, alors on peut trouver des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ *formelles* dans lesquelles, d'une part $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, et d'autre part

$$X = \sum_1^{n-1} F_j(x_1 \ldots x_n)\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}}\right)$$

avec des fonctions formelles d'une variable F_j convenables; ce qu'on écrit aussi (*cf.* [2]) :

$$X = \sum_1^n G_j(x_1 \ldots x_n)\, x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

les fonctions G_j étant alors astreintes à $G_1 + G_2 + \ldots + G_n = 0$.

La question se pose d'obtenir cette normalisation dans des coordonnées analytiques, et ne semble pas avoir reçu de réponse en dimension $\geqslant 3$ (pour la dimension 2, *cf.* [6]). On voit maintenant le rapport avec le présent théorème, dans lequel cette normalisation analytique est obtenue simultanément pour les $n-1$ champs X_i, comme si pour chacun d'eux le fait d'avoir un commutant fourni contribuait à adoucir son comportement. On retrouve la morale du cas symplectique : alors que la normalisation analytique d'un champ symplectique au voisinage d'un de ses zéros est plus qu'hypothétique (*cf.* [8]), la normalisation simultanée d'une famille abélienne maximale ne requiert que quelques hypothèses de généricité très banales (*cf.* [9]).

1. – Quelques notations avant d'engager la preuve du théorème. Si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées analytiques ou formelles sur $\mathbf{C}^n$, nulles en 0, on posera $P^x = x_1 \ldots x_n$, et, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$E_i^x = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}},$$

$$\varepsilon_i^x = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{dx_i}{x_i}.$$

Noter les relations $\langle E_i^x, \varepsilon_j^x \rangle = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker); et aussi la formule :

$$df = \sum_{j=1}^{n-1} (E_j^x . f) \varepsilon_j^x + x_n \frac{df}{\partial x_n} \frac{dP^x}{P^x}, \tag{1}$$

valable pour toute fonction f analytique ou formelle.

Considérons les jets d'ordre 1 des champs X_i de l'hypothèse du théorème : ce sont des transformations linéaires de trace nulle, diagonalisables, et commutant deux à deux. On peut donc les diagonaliser simultanément; puis former une combinaison linéaire des X_i à coefficients complexes, soit X, telle que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ du jet d'ordre 1, $j^1 X$, soient exemptes de toute relation linéaire à coefficients entiers autre que la trace nulle : $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$.

A ce champ X s'applique le théorème de normalisation signalé dans l'introduction : on peut trouver des coordonnées formelles $t_1, \ldots, t_n$ centrées à l'origine, isochores ($\omega = dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$), et permettant une écriture

$$X = \sum_1^{n-1} F_i(P^t) E_i^t,$$

on a d'ailleurs $\lambda_1 = F_1(0)$, $\lambda_2 = F_2(0) - F_1(0)$, $\ldots$, $\lambda_n = -F_{n-1}(0)$.

Cela étant, je dis que tout champ isochore Y, commutant avec X (donc en particulier $X_1, \ldots, X_{n-1}$), se normalise dans les coordonnées $t_1, \ldots, t_n$. Supposons en effet que Y se normalise jusqu'à l'ordre $l-1$:

$$Y = \sum_{j=1}^{n-1} G_j(P^t) E_j^t + Z + \mathfrak{m}^{l+1} \mathbf{C}^n,$$

où les G_j sont des fonctions convenables, et Z un champ homogène de degré l, nécessairement isochore puisque Y l'est par hypothèse, et que les termes normalisés le sont automatiquement. La commutation de X et Y implique $[j^1 X, Z] = 0$. Posons

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| = l} Z_{j,\alpha} t^\alpha \partial/\partial t_j,$$

on devra avoir

$$0 = [j^1 X, Z] = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=l} (-\lambda_j + \sum_1^n \alpha_i \lambda_i) Z_{j,\alpha} t^\alpha \partial/\partial t_j.$$

Il en résulte que le coefficient $Z_{j,\alpha}$ est nul, sauf si

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{j-1} = \alpha_j - 1 = \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n$$

(la somme des λ_i est nulle et c'est la seule relation entière liant les λ_i) et que Z s'écrit :

$$Z = (P^t)^k \sum_{j=1}^n c_j t_j \partial/\partial t_j.$$

avec un exposant entier k et des coefficients numériques c_j convenables. Décomposant les n opérateurs $t_1 \partial/\partial t_1, \ldots, t_n \partial/\partial t_n$ sur les n opérateurs $E_1^t, \ldots, E_{n-1}^t, H = \sum_1^n t_i \partial/\partial t_i$, nous écrivons :

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} c'_j (P^t)^k E_j^t + c'_n (P^t)^k H.$$

Les $n-1$ premiers termes sont isochores et peuvent être incorporés à la partie normalisée de Y; quant au dernier terme, il est nul, comme on le voit tout de suite en écrivant que la divergence de Z est nulle. Conclusion : le champ Y se normalise jusqu'à l'ordre l, et par récurrence, on conclut qu'il se normalise complètement dans les coordonnées (t_i).

Ainsi nous tenons un système de coordonnées formelles $t_1, \ldots, t_n$, isochore, où les $n-1$ champs X_i s'écrivent simultanément sous forme normale

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} F_{ij}(P^t) E_j^t. \tag{2}$$

On observera que la matrice $F_{ij}(P^t)$ est inversible, à cause de l'indépendance des $j^1 X_i$ à l'origine.

2. — Soit $\mathscr{I}$ (resp. $\hat{\mathscr{I}}$) le module des formes différentielles de degré 1 analytiques (resp. formelles) annulées par tous les X_i.

Lemme. — *$\hat{\mathscr{I}}$ est le module libre de base dP^t.*

En effet, soit $\xi = \sum_1^n \xi_i \, dt_i \in \hat{\mathscr{I}}$. Les $n-1$ équations $\langle \xi, X_i \rangle = 0$ peuvent être remplacées par $\langle E_i^t, \xi \rangle = 0$ (voyez la fin du numéro précédent), c'est-à-dire

$$t_1 \xi_1 = t_2 \xi_2 = \ldots = t_n \xi_n.$$

De ceci résulte que ξ_1 est divisible par le monôme P^t/t_1, ξ_2 par P^t/t_2, puis que ξ est proportionnelle à dP^t.

Nous nous appuyons maintenant sur le théorème de clôture des modules ([3], section 6.3; c'est le cas linéaire du théorème d'Artin [1]; *voir* aussi [7], section III.4) pour conclure que $\mathscr{I}$ ne se réduit pas à (0), et qu'on peut y trouver une forme ξ ayant même partie principale que dP^t; alors ξ est une base du module libre $\hat{\mathscr{I}}$. La codimension de son ensemble d'annulation peut se calculer dans les coordonnées formelles (t); et là il coïncide avec l'ensemble critique de P^t, c'est-à-dire la réunion des $(n-2)$-plans $t_i = t_j = 0$ $(i \neq j)$. Il est donc de codimension 2. Par conséquent, d'après un théorème récent de B. MALGRANGE ([4]; *voir* aussi [5]) sur les singularités de feuilletages, il existe une fonction analytique u, égale à 1 à l'origine, telle que la 1-forme $u\,\xi$ soit fermée. En appelant J la fonction analytique nulle à l'origine, dont $u\,\xi$ est la différentielle, on voit que J est une intégrale première commune aux champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$, et qu'elle a même partie principale que P^t.

Dans les coordonnées formelles (t), il est clair que les intégrales premières communes aux X_i sont les fonctions de P^t. Il y a donc une écriture en série formelle

$$J = P^t + c_2 (P^t)^2 + \ldots,$$

que nous pouvons lire :

$$J = t_1 \times t_2 \times \ldots \times t_{n-1} \times [t_n(1 + c_2 P^t + \ldots)],$$

comme une factorisation de J en n facteurs indépendants à l'origine, dans les fonctions formelles. Mais, d'après le théorème d'Artin ([1], en version non linéaire cette fois; *voir* aussi [7], section III.4), il existe une factorisation

$$J = y_1 y_2 \ldots y_n,$$

en n facteurs analytiques tangents à l'ordre 1 aux précédents. Ces n fonctions peuvent donc être utilisées comme coordonnées analytiques au voisinage de l'origine; et dans ces coordonnées (qui ne sont pas forcément isochores), le produit $P^y = y_1 \ldots y_n$ est une intégrale première commune des X_i.

3. – Nous appellerons *système associé* aux $n-1$ champs X_i une famille $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ de formes différentielles de degré 1, méromorphes de variété polaire commune $P^y = 0$, et vérifiant les équations :

$$\langle \xi_i, X_j \rangle = \delta_j^i \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n-1).$$

A supposer qu'un tel objet existe, il ne sera défini que modulo (dP^y), l'idéal différentiel engendré par dP^y.

Plaçons-nous d'abord dans les coordonnées formelles normalisantes $t_1, \ldots, t_n$. Compte tenu des formules (2) et de la définition des formes méromorphes ε_i donnée au début du n° 1, on trouve

$$(3) \qquad \xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} G_{ij}(P^t)\,\varepsilon_j^t + (dP^t).$$

Puisque le quotient P^t/P^y est une unité dans les fonctions formelles, les formes $\xi_i' = P^y\,\xi_i$ sont exemptes de dénominateur. Donc le système $\mathcal{O}$-linéaire d'équations :

$$\langle \xi_i', X_j \rangle = P^y \delta_i^j \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n-1),$$

a des solutions dans les formes à coefficients fonctions formelles; par clôture des modules, il en aura aussi dans les formes holomorphes; et les quotients ξ_i'/P^y fournissent alors un système associé, d'ailleurs unique modulo (dP^y). En outre, un phénomène important transparaît sur les *formules* (3) : *les différentielles* $d\xi_i$ *tombent dans l'idéal* (dP^y).

Examinons ensuite les choses dans les coordonnées analytiques $y_1, \ldots, y_n$. *A priori* les champs X_i s'écrivent :

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}(y)\,\partial/\partial y_k$$

avec les X_{ik} des fonctions analytiques. En écrivant que les dérivées $X_i.P^y$ sont nulles, on trouve :

1° que y_k divise $X_{ik} : X_{ik} = y_k\,X_{ik}'$;

2° que la somme des quotients X_{ik}' (à i fixé, $1 \leqslant k \leqslant n$) est nulle.

Après réarrangement des termes, il vient donc une expression

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}(y_1, \ldots, y_n)\,E_j^y$$

avec des fonctions A_{ij} des n variables y_k (et non pas seulement de P^y : c'est le problème). Passant au système associé, on obtient sans difficulté :

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij}(y_1, \ldots, y_n)\,\varepsilon_j^y + (dP^y) \qquad (\|B_{ij}\| = \|A_{ij}\|^{-1}).$$

Énonçons un lemme.

LEMME. — *Soit $f_1, \ldots, f_{n-1}$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine qui vérifient $E_j^y.f_k = E_k^y.f_j$ quels que soient $1 \leqslant j, k \leqslant n-1$. Il existe alors une fonction g analytique au voisinage de l'origine sur $\mathbf{C}^n$, et $n-1$ fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$ analytiques au voisinage de l'origine sur $\mathbf{C}$, telles que*

$$f_i = E_i^y.g + F_i(P^y), \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Nous rejetons la preuve en fin de ce numéro, et nous écrivons l'appartenance $d\xi_i \in (dP^y)$ (en utilisant la décomposition des différentielles indiquée au début du n° 1) :

$$d\xi_i = \textstyle\sum_{1 \leqslant j,\, k \leqslant n-1} (E_k^y . B_{ij})\, \varepsilon_k^y \wedge \varepsilon_j^y + (dP^y) \in (dP^y).$$

Il faut donc, pour chaque i fixé, que $E_k^y . B_{ij} = E_j^y . B_{ik}$. Le lemme fournit $n-1$ fonctions $u_i(y)$ et une matrice $C_{ij}(P^y)$ d'ordre $n-1$ telles que

$$B_{ij} = E_j^y . u_i + C_{ij}(P^y),$$

ce qui amène

$$\xi_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^y)\, \varepsilon_j^y + du_i + (dP^y).$$

La matrice $C_{ij}(0) = B_{ij}(0)$ est inversible; en jouant sur le fait que les calculs se font modulo (dP^y), on obtient :

$$\xi_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^y)(\varepsilon_j^y + dv_j) + (dP^y).$$

avec des fonctions analytiques v_j convenables sur $\mathbf{C}^n$.

Effectuons alors le changement de coordonnées analytiques

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \exp v_1, \\ z_2 &= y_2 \exp(v_2 - v_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{n-1} &= y_{n-1} \exp(v_{n-1} - v_{n-2}), \\ z_n &= y_n \exp(-v_{n-1}). \end{aligned}$$

Si l'on a pris la précaution de prendre les v_i nulles en 0, ce système est tangent à l'ordre 1 aux deux précédents; et surtout,

$$P^z = z_1 z_2 \ldots z_n = P^y,$$

$$\varepsilon_i^z = \varepsilon_i^y + dv_i,$$

$$\xi_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^z)\, \varepsilon_j^z + (dP^z) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Par les calculs précédents, effectués en marche arrière, on en déduit facilement :

$$X_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} D_{ij}(P^z)\, E_j^z, \tag{4}$$

où $\| D_{ij} \|$ est la matrice inverse de $\| C_{ij} \|$: les $n-1$ champs X_i sont normalisés.

Preuve du lemme. — Il s'agit en fait d'un calcul de cohomologie, mais nous allons procéder élémentairement. On développe les f_i en série

$$f_i = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} f_{i,\alpha} y^\alpha,$$

la condition sur les dérivées, donne, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $1 \leqslant j, k \leqslant n-1$,

$$(\alpha_j - \alpha_{j+1}) f_{k,\alpha} = (\alpha_k - \alpha_{k+1}) f_{j,\alpha}.$$

Cela dit, on sépare dans chaque série f_i les termes en deux : ceux pour lesquels $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, qui se regroupent en une fonction $F_i(P^y)$, et les autres α, pour lesquels il y a forcément deux exposants consécutifs différents, disons $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$. On pose alors :

$$g_\alpha = f_{j,\alpha}/(\alpha_j - \alpha_{j+1}),$$

ce nombre étant indépendant du choix de j; puis $g = \sum g_\alpha y^\alpha$ qui résout le problème.

4. — Pour obtenir la normalisation des champs X_i dans un système de coordonnées isochores, nous allons faire un dernier changement de coordonnées analytiques, de la forme

$$x_1 = z_1 u(P^z),\ x_2 = z_2 u(P^z),\ \ldots,\ x_n = z_n u(P^z),$$

avec une fonction d'une variable u égale à 1 à l'origine, et qu'il nous reste à choisir.

La forme volume donnée ω s'écrit, dans les coordonnées (z),

$$\omega = a(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \qquad \text{avec} \quad a(0) = 1.$$

En utilisant la formule $\theta_{fX}\, \omega = f\, \theta_X\, \omega + (X.f)\, \omega$ valable pour toute fonction f et tout champ X, et les formules (4), on voit que les $n-1$ champs E_i^z sont isochores pour ω; et comme ils le sont pour $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, $a(z)$ en est une intégrale première commune, c'est-à-dire une fonction de P^z.

Pour que les coordonnées (x) soient isochores, il faut que $a(P^z)$ soit égal au jacobien du changement de coordonnées, c'est-à-dire au déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} u + P^z \dot{u} & P^z \dot{u} z_1/z_2 & \ldots & P^z \dot{u} z_1/z_n \\ P^z \dot{u} z_2/z_1 & u + P^z \dot{u} & \ldots & P^z \dot{u} z_2/z_n \\ \ldots & & & \ldots \\ P^z \dot{u} z_n/z_1 & & \ldots & u + P^z \dot{u} \end{pmatrix}.$$

Par la matrice diagonale $(z_1, \ldots, z_n)$ cette première matrice se conjugue à une seconde, obtenue en remplaçant dans la première tous les quotients z_i/z_j par 1; le déterminant de cette seconde matrice s'obtient par des manœuvres simples de lignes et colonnes, et on aboutit à l'équation :

$$u^{n-1}(u+n\,P^z\,\dot{u}) = a(P^z).$$

Comme $u(0) = 1$, on peut poser $U = u^n$ sans inconvénient

$$U(P^z)+P^z\,\dot{U}(P^z) = a(P^z)$$

et l'unique solution analytique égale à 1 à l'origine s'obtient par une banale identification de série. Avec ce choix pour la fonction u, les coordonnées (x) sont isochores : $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Il reste à s'assurer que la forme normale (4) n'a pas été perdue. D'abord, $P^x = P^z\,u(P^z)^n$, formule qui peut s'inverser analytiquement en $P^z = v(P^x)$. Ensuite, le groupe à un paramètre, engendré disons par E_1^z, s'écrit dans les coordonnées (z) :

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^t z_1, e^{-t} z_2, z_3, \ldots, z_n).$$

Transporté dans les coordonnées (x), ceci donne

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (e^t x_1, e^{-t} x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

la même expression. Donc $E_1^z = E_1^x$, et pareillement pour les autres E_i. Ainsi les formules (4) deviennent

$$X_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} D_{ij}(v(P^x))\,E_j^x,$$

et la conclusion du théorème est atteinte : les coordonnées analytiques (x_i) sont isochores et normalisent les $n-1$ champs X_i.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Artin (M.). — On the solution of analytic equations, *Invent. Math.*, Berlin, t. 5, 1968, p. 277-291.

[2] Bruhat (F.). — Travaux de Sternberg, *Séminaire Bourbaki*, 13e année, 1960-1961, n° 217, 18 p.

[3] Hörmander (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables.* 2nd edition. — Amsterdam, North Hot and publishing Company, 1973 (*North-Holland mathematical Library*, 7).

[4] Malgrange (B.). — Frobenius avec singularités, 1 : Codimension 1, *Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, n° 46, 1976, p. 163-174.

[5] RAMIS (J.-P.). — Frobenius avec singularités, *Séminaire Bourbaki*, 30ᵉ année, 1977-1978, nº 523, 10 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1979 (Lecture Notes in Mathematics, 710).

[6] SIEGEL (C. L.) and MOSER (J.). — *Lectures on celestial mechanics*. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaft*, 187).

[7] TOUGERON (J.-C.). — *Idéaux de fonctions différentiables*. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Ergebnisse der Mathematik*, 71).

[8] VEY (J.). — Orbites périodiques d'un système dynamique au voisinage d'un point d'équilibre, *Annali Scuola norm. sup. Pisa*, Série 4, t. 5, 1978, p. 757-787.

[9] VEY (J.). — Sur certains systèmes dynamiques séparables, *Amer. J. Math.*, t. 100, 1978, p. 591-614.