ROLAND GILLARD

GILLES ROBERT

# Groupes d'unités elliptiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 107 (1979), p. 305-317

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__305_0>

*Bull. Soc. math. France*,
107, 1979, p. 305-317.

# GROUPES D'UNITÉS ELLIPTIQUES

PAR

ROLAND GILLARD et GILLES ROBERT (*)

[Univ. Grenoble-I et Univ. Paris-Sud (Orsay)]

RÉSUMÉ. — Pour chaque extension abélienne $H$ d'un corps quadratique imaginaire $K$, on définit deux groupes d'unités elliptiques $\mathscr{V}_3$ et $\mathscr{V}_4$, dont l'indice dans le groupe de toutes les unités de $H$ est lié au nombre de classes de ce corps par une formule comparable à celle de LEOPOLDT.

ABSTRACT. — For each abelian extension $H$ of an imaginary quadratic field $K$, we define two groups $\mathscr{V}_3 \subset \mathscr{V}_4$ of elliptic units in $H$. Each is a subgroup of the unit group of $H$ whose index in this group is related to the class number of $H$ by a formula analogous to the classical formula of LEOPOLDT for real abelian extensions of the rational field.

## 0. Introduction

Soit $H/K$ une extension abélienne finie de corps de nombres, et

$$\zeta_H(s)/\zeta_K(s) = \prod_{\chi \neq 1} L_K(s, \chi)$$

la décomposition de la fonction zêta de $H$ en produit de fonctions $L$ relatives aux caractères $\chi$ de l'extension $H/K$. Pour $K$ quadratique imaginaire, ou bien $K$ le corps des rationnels et $H$ réel, on sait que les nombres

$$L'_K(0, \chi) = \lim_{s \to 0} L_K(s, \chi)/s, \qquad \chi \neq 1,$$

sont des sommes finies à coefficients algébriques de logarithmes des valeurs absolues d'unités de $H$; d'autre part, on a aussi

$$\lim_{s \to 0} \zeta_H(s)/s^{(H:K)-1} = -h_H . R_H/e_H,$$

(*) Texte reçu le 25 septembre 1978.

Roland GILLARD, Institut de Mathématiques pures, Université de Grenoble-I B. P. n° 116, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.

Gilles ROBERT, Mathématiques Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, Campus universitaire, 91405 Orsay Cedex.

où $e_H$, $h_H$ et $R_H$ désignent respectivement le nombre de racines de l'unité, le nombre de classes d'idéaux, et le régulateur de $H$. Ceci offre la possibilité de construire des groupes d'unités de $H$, valeurs singulières de fonctions transcendantes, dont l'indice dans le groupe $E_H$ de toutes les unités de $H$ est lié à $h_H$ par une formule explicite.

(a) $K = \mathbf{Q}$ *et* $H$ *réel.*

Désignons par $G$ le groupe de Galois de $H/\mathbf{Q}$; on note $[G]$ son ordre. LEOPOLDT [6] a construit un groupe d'unités cyclotomiques dont l'indice dans $E_H$ est le produit de $h_H$ par un entier ne dépendant que de la structure de $G$ : cet entier (noté $Q_G$ par LEOPOLDT) divise $[G]^{[G]-1}$, en particulier ses facteurs premiers divisent $[G]$. Ce résultat généralise un résultat précédent de HASSE [4] qui prouve, pour les extensions de *conducteur puissance d'un nombre premier*, un théorème plus précis : l'indice $[E_H : C_H]$ du groupe $C_H$ de toutes les unités cyclotomiques de $H$ est alors égal à $h_H$.

Récemment, ces résultats ont été généralisés dans au moins deux directions. D'une part, l'un des auteurs [2] a sensiblement agrandi le groupe des unités de LEOPOLDT : notamment, *lorsque* $G$ *est cyclique*, la formule obtenue prouve que le quotient $h_H/[E_H : C_H]$ (*sic*) est un entier, en général non trivial. D'un autre côté, SINNOTT [10], lorsque $H$ est le *sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique* $\mathbf{Q}(\mu_m)$ *de conducteur* $m$, prouve en particulier que le quotient $[E_H : C_H]/h_H$ est un entier puissance de 2, dont l'exposant ne dépend que du nombre de diviseurs premiers distincts de $m$. Les méthodes de SINNOTT, qui introduit nombre d'idées nouvelles, devraient pouvoir s'étendre au cas des extensions abéliennes réelles *quelconques* $H$ de $\mathbf{Q}$.

(b) $K$ *quadratique imaginaire.*

Nous désignons par $H_{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de $K$, et par $H_0 = H \cap H_{(1)}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $H/K$; nous notons $G$ (resp. $\mathfrak{G}$) le groupe de Galois de $H/H_0$ (resp. $H/K$).

L'un des auteurs [7] a prouvé, lorsque le *conducteur de l'extension* $H/K$ *est puissance d'un idéal premier de* $K$, une formule analogue à celle de HASSE; d'après un résultat de STARK [11] précisé dans l'appendice du présent travail, cette formule peut s'énoncer ainsi : l'indice dans $E_H$ du groupe $\Omega_H$, obtenu en adjoignant au groupe de toutes les unités elliptiques de $H$ les éléments de $E_{H_0}$, est alors le produit du quotient $h_H/h_{H_0}$ par un entier $\lambda_H$ diviseur de 6; la signification arithmétique précise de $\lambda_H$, liée à des propriétés arithmétiques fines de $H_0$, n'est complètement élucidée que dans le cas où le groupe *relatif* $G$ est *cyclique* (*cf.* [2], appendice).

Par ailleurs, on peut espérer que les méthodes de SINNOTT s'adaptent au cas présent; cependant, cela pose des problèmes techniques délicats, non encore résolus aujourd'hui. *Dans le présent travail*, partant d'un groupe d'unités elliptiques $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$, construit aux paragraphes 1 et 2, et isomorphe comme $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$-module à l'idéal d'augmentation $I(\mathfrak{G})$ de l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$, nous l'agrandissons en des groupes d'unités $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, $\mathscr{V}_3$ et $\mathscr{V}_4$ qui vérifient :

$$\Theta_{I(\mathfrak{g})} \subset \mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}_2 \subset \mathscr{V}_3 \subset \mathscr{V}_4.$$

Notre résultat principal est la détermination de l'indice de $\mathscr{V}_3$ (resp. $\mathscr{V}_4$) dans $E_H$ : c'est le produit de $h_H/(H_{(1)} : H_0)$ (resp. $h_H/h_{H_0}$) par un entier $c_3$ (resp. $c_4$) que nous déterminons explicitement (*cf.* théorème, § 3). Notons que le calcul exact de $c_3$ et $c_4$ nécessite l'introduction d'invariants arithmétiques particuliers, dont l'étude fait l'objet du paragraphe 4. Les formules donnant $c_3$ et $c_4$, valables *quel que soit le corps quadratique imaginaire $K$ et l'extension abélienne $H/K$ considérés*, sont l'analogue des résultats de LEOPOLDT [6]. Le fait le plus remarquable est peut-être que $c_3$ et $c_4$ ne dépendent, pour l'essentiel du moins, que de la structure du groupe relatif $G = G(H/H_0)$ et du degré $(H_0 : K)$ de $H_0/K$; en particulier, les facteurs premiers de $c_3$ (resp. $c_4$) divisent $6.[G]$ (resp. $[G]$). Par suite, la relation

$$E_H \neq \mathscr{V}_3 . E_H^p (\text{resp. } E_H \neq \mathscr{V}_4 . E_H^p),$$

caractérise, parmi les nombres premiers ne divisant pas $6.(H : K)$ (resp. $(H : H_0)$), ceux tels que $p$ divise $h_H/(H_{(1)} : H_0)$ (resp. $h_H/h_{H_0}$) c'est-à-dire tels que l'action de $\mathfrak{G}$ (resp. $G$) sur la $p$-partie du groupe des classes d'idéaux de $H$ soit non triviale. Précisons enfin que la construction de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ et $\mathscr{V}_1$ repose sur les méthodes de LEOPOLDT [6]; celle de $\mathscr{V}_2$, $\mathscr{V}_3$ et $\mathscr{V}_4$ fait appel aux résultats obtenus par l'un des auteurs dans [7] et complétés en appendice.

Indépendamment du présent travail, des formules analogues ont également été prouvées par SCHERTZ [9]. Les résultats de celui-ci s'appliquent aussi aux corps $N$ tels que l'extension $NK/K$ soit abélienne. Précisons que ses groupes d'unités sont en partie construits à l'aide des valeurs singulières, de la forme modulaire usuelle $\Delta$ de poids 12, *prises* non seulement sur les idéaux de l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $K$, mais aussi *sur les idéaux de chacun des ordres de $K$*; les formules reliant ces valeurs singulières aux invariants considérés ici sont encore mal connues.

Pour conclure, signalons que dans [2] l'un des auteurs, après la rédaction commune de ce travail, a construit des groupes d'unités elliptiques sensiblement plus gros que ceux considérés ici, et déterminé leur indice dans $E_H$ en fonction du quotient $h_H/h_{H_0}$.

## 1. Notations

Si $N$ est un corps de nombres, on note $\mu_N$ le groupe des racines de l'unité de $N$; comme d'habitude le groupe des racines de l'unité d'ordre $m$ est noté $\mu_m$.

Nous fixons une extension abélienne finie $H$ d'un corps quadratique imaginaire $K$, et conservons les notations de l'introduction. Nous posons $e = e_K$ et $h = h_K$. Pour tout idéal entier $\mathfrak{f}$ de $K$, soient Cl $(\mathfrak{f})$ le groupe des classes de rayon $\mathfrak{f}$, et $H_\mathfrak{f}$ le corps de rayon correspondant; on note $f$ le plus petit entier $> 0$ contenu dans $\mathfrak{f}$, et $e(\mathfrak{f})$ le nombre de racines de l'unité de $K$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$. Désignons par $\xi_0$ le caractère unité du groupe relatif $G$. Pour tout caractère $\xi$ de $G$ défini et irréductible sur $\mathbf{Q}$, introduisons ker $\xi$ le groupe $\{ \sigma \in G; \xi(\sigma) = \xi(1) \}$, $H_\xi$ le sous-corps de $H$ fixé par ker $\xi$, et $G_\xi$ (resp. $\mathfrak{G}_\xi$) le groupe de Galois de $H_\xi/H_0$ (resp. $H_\xi/K$). Le groupe $G_\xi$ est cyclique : notons $g_\xi$ son ordre, et choisissons un générateur $\sigma(\xi)$ parmi les $\varphi(g_\xi)$ possibles. Enfin, par $d_\xi$, nous désignons le discriminant du polynôme cyclotomique $P_{g_\xi}$ d'indice $g_\xi$.

Soit $\chi$ un caractère de $\mathfrak{G}$ défini et irréductible sur $\mathbf{C}$. Sa restriction à $G$ figure dans la décomposition d'un unique caractère $\xi$, et son conducteur est égal à $\mathfrak{f}_\xi$, conducteur de l'extension $H_\xi/K$. De plus, $\chi$ définit un homomorphisme de $\mathfrak{G}_\xi$ dans $\mathbf{C}^*$, donc aussi, par composition avec l'homomorphisme d'Artin, un caractère primitif $\chi : \mathrm{Cl}(\mathfrak{f}_\xi) \to \mathbf{C}^*$.

Pour tout groupe abélien fini $A$, on désigne par $I(A)$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[A]$. Si $F : \alpha \mapsto F_\alpha$ est une application de $A$ dans $\mathbf{C}^*$, on étend $F$ à $\mathbf{Z}[A]$ par multiplicativité en posant

$$F_u = \prod\nolimits_{\alpha \in A} F_\alpha^{n_\alpha} \qquad \text{si} \quad u = \sum\nolimits_{\alpha \in A} n_\alpha . \alpha,$$

et on désigne par $F_{I(A)}$ le groupe $\{ F_u; u \in I(A) \}$. De même, pour tout $A$-module $M \subset \mathbf{C}^*$, et tout élément $\mu$ de $M$, on définit $\mu^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbf{Z}[A]$ par multiplicativité, et on pose $\mu^I = \{ \mu^\alpha; \alpha \in I \}$ pour tout idéal $I$ de $\mathbf{Z}[A]$. Par ailleurs, on note $[A]$ l'ordre de $A$.

Soient $\xi$ comme précédemment, $e_\xi = [G]^{-1} \sum_{g \in G} \xi(g^{-1}).g$ l'idempotent associé, $u_\xi = [G].e_\xi$, et posons

$$\gamma_\xi = \prod\nolimits_{p \mid g_\xi} (\sigma(\xi)^{g_\xi/p} - 1),$$

où $p$ parcourt l'ensemble des diviseurs premiers de $g_\xi$. Pour $\xi \neq \xi_0$, le produit $\gamma_\xi$ (resp. $u_\xi$) appartient à $I(G_\xi) \subset I(\mathfrak{G}_\xi)$ (resp. $I(G) \subset I(\mathfrak{G})$). Notons $I_\xi$ l'idéal de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ engendré par les normes

$$\textstyle\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(\xi)^{i.g_\xi/p}, \qquad p \text{ diviseur premier de } g_\xi;$$

d'après un résultat de MARTINET (cité après la proposition I.1 dans [3]), il est aussi engendré par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$. Soit :

$$\theta_\xi = N_{H_{\mathfrak{f}_\xi}/H_\xi}(\varphi_{\mathfrak{f}_\xi}(C_0)), \qquad \xi \neq \xi_0,$$

où $\varphi_{\mathfrak{f}_\xi}(C_0)$ est défini comme dans [7] (§ 2.2), et $C_0$ désigne la classe unité de $\mathrm{Cl}(\mathfrak{f}_\xi)$. Posons $(\gamma_\xi) = \gamma_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$, et notons la remarque suivante.

REMARQUE. — *L'idéal* $(\gamma_\xi)$ *est annulé par* $I_\xi$, *de sorte que le groupe* $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ *est formé d'unités de* $H_\xi$ *dont la norme sur chaque sous-corps strict de* $H_\xi$ *contenant* $H_0$ *est* 1.

En fait, on a le résultat suivant :

LEMME 1. — *L'idéal* $(\gamma_\xi)$ *est isomorphe au quotient* $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]/I_\xi$; *c'est donc un* $\mathbf{Z}$*-module libre de rang* $\varphi(g_\xi).[\mathfrak{G}/G]$.

*Démonstration.* — Notons d'abord que $P_{g_\xi}(\sigma(\xi)).\gamma_\xi = 0$, puisque le polynôme $X^{g_\xi}-1$ divise $P_{g_\xi}(X).\prod_{p|g_\xi}(X^{g_\xi/p}-1)$. D'autre part, en envoyant $\sigma(\xi)$ sur $\zeta$, racine de $P_{g_\xi}$, on obtient un isomorphisme d'anneaux

$$\nu: \quad \mathbf{Z}[G_\xi]/P_{g_\xi}(\sigma(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\zeta].$$

Mais l'image de $\gamma_\xi$ par l'application $\mathbf{Z}[G_\xi] \rightarrow \mathbf{Z}[\zeta]$, déduite de $\nu$, est non nulle, si bien que $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$ engendre l'annulateur de $\gamma_\xi$ dans $\mathbf{Z}[G_\xi]$. L'assertion du lemme s'en déduit par extension des scalaires de $\mathbf{Z}[G_\xi]$ à $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$.

D'autre part, pour toute classe absolue $c$ de $K$, définissons $\delta(c)$ comme dans [7] (§ 3.1). Pour $\sigma \in \mathfrak{G}/G$, soit $\delta_\sigma = \prod_{c \to \sigma} \delta(c)$, où le produit est pris sur toutes les classes absolues de $K$ dont l'image par l'homomorphisme d'Artin de $H_0/K$ est $\sigma$. Posons $\Delta_{H_0} = \delta_{I(\mathfrak{G}/G)}$; d'après [7] (§ 3.1, prop. 4), le groupe $\Delta_{H_0}$ est contenu dans $E_{H_0}$ et l'on a le lemme ci-dessous :

LEMME 2. — *Pour tous* $\bar{\alpha} \in I(\mathfrak{G}/G)$ *et* $\bar{\beta} \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}/G]$, *on a*

$$(\delta_{\bar{\alpha}})^{\bar{\beta}} = \delta_{\bar{\alpha}.\bar{\beta}}.$$

Notons alors $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ l'homomorphisme de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$ sur $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}/G]$ induit par celui de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}/G$, et posons

$$\Theta_\alpha = \delta_{\bar{\alpha}}.(\Pi_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{\gamma_\xi})^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}].$$

Pour chaque $\alpha \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$, on a

$$(1)\qquad \Theta_{\alpha . u_\xi} = \begin{cases} \theta_\xi^{\alpha . \gamma_\xi . [G]} & \text{si} \quad \xi \neq \xi_0; \\ \delta_{\bar{\alpha}}^{[G]} & \text{si} \quad \xi = \xi_0. \end{cases}$$

## 2. Indice $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ dans $E_H$

D'après le paragraphe précédent, $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ est un sous-groupe de $E_H$; suivant [5] (chap. 21, § 2, th. 6), son régulateur est donc donné par la formule :

$$R(\Theta_{I(\mathfrak{G})}) = 2^{[\mathfrak{G}]-1} \prod_{\chi \neq 1} \Sigma(\chi),$$

où $\chi$ parcourt l'ensemble des homomorphismes $\neq 1$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbf{C}^\times$, et

$$\Sigma(\chi) =^{\text{dfn}} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau^{-1}) . \log |\Theta_\tau|.$$

Mais, vu (1), nous pouvons estimer $\Sigma(\chi)$ en fonction de la somme $S(\chi)$ définie dans [7] (§ 2.3). Pour cela, prolongeons $\chi$ par $\mathbf{Z}$-linéarité à $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$ et rappelons le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit $L$ une application $\mathbf{Z}$-linéaire de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$ dans $\mathbf{R}$. Alors, pour tout $u \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$, on a*

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . L(u . \tau) = \chi(u) \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . L(\tau).$$

Appliquons ce lemme pour $u = u_\xi$ et $L : \alpha \mapsto \log |\Theta_\alpha|$; on obtient, en divisant par $[G] = \chi(u_\xi)$ (si $\chi$ figure dans la décomposition de $\xi$),

$$\begin{aligned} \Sigma(\chi) &= [G]^{-1} \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . \log |\Theta_{\tau . u_\xi}| \\ &= \begin{cases} \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . \log |\theta_\xi^{\tau . \gamma_\xi}|, & \xi \neq \xi_0; \\ \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . \log |\delta_{\bar{\tau}}|, & \xi = \xi_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite, si $\xi = \xi_0$, on a (*cf.* [7], § 3.2, formule (20)) :

$$\Sigma(\chi) = [G] \sum_{\bar{\tau} \in \mathfrak{G}/G} \chi(\bar{\tau}^{-1}) . \log |\delta_{\bar{\tau}}| = h . [G] . S(\chi).$$

Si $\xi \neq \xi_0$, une nouvelle application du lemme, pour $u = \gamma_\xi$ et $L : \alpha \mapsto \log |\theta_\xi^\alpha|$, nous donne

$$\Sigma(\chi) = \chi(\gamma_\xi) \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) . \log |\theta_\xi^\tau| = \chi(\gamma_\xi) . ([G]/g_\xi) . S(\chi).$$

Nous obtenons ainsi l'expression suivante du régulateur de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ :

$$(2)\qquad R(\Theta_{I(\mathfrak{G})}) = 2^{[\mathfrak{G}]-1} . h^{[\mathfrak{G}/G]-1} . A . \prod_{\chi \neq 1} S(\chi),$$

avec

$$A = [G]^{[\mathfrak{G}/G]-1} . \prod_{\xi \neq \xi_0} (\prod_{\chi, \,\mathrm{res}\,\chi \mid \xi} \chi(\gamma_\xi) . ([G]/g_\xi)).$$

Posons alors :

$$N_G = ([G]^{[G]} / \Pi_\xi \, d_\xi)^{1/2},$$

de sorte que le quotient $N_G/[G]$ est égal à l'entier $Q_G$ de [6] (formule (11) du § 1.3). En utilisant la formule (11) de [6] (§ 8.4), et en remarquant qu'il y a $[\mathfrak{G}/G]$ caractères $\chi$ de $\mathfrak{G}$ ayant une restriction donnée à $G$, on voit que $A$ est un entier relatif dont la valeur absolue est donnée par la formule :

$$|A| = \frac{1}{[G]} N_G^{2.[\mathfrak{G}/G]}.$$

La comparaison de la formule (2) avec la formule analytique du nombre de classes (*cf.* e. g. [7], § 2.4, th. 3 (ii)) prouve que l'indice de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ dans $E_H$ est fini et est donné par l'égalité

$$(3) \qquad [E_H : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = B . h_H,$$

avec

$$B = |A| . (12)^{[\mathfrak{G}]-1} . h^{[\mathfrak{G}/G]-2} . \prod_\xi (f_\xi . e(\mathfrak{f}_\xi))^{[\mathfrak{G}/G] . \varphi(g_\xi)}.$$

COROLLAIRE. — *L'application* $\alpha \mapsto \Theta_\alpha$ *de* $I(\mathfrak{G})$ *dans* $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$*-modules.*

### 3. Définition de nouveaux groupes d'unités elliptiques

Énonçons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Les groupes* $\Delta_{H_0}$ *et* $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ $(\xi \neq \xi_0)$ *sont sans torsion.*

*Démonstration.* — L'assertion est claire pour $\Delta_{H_0}$ d'après [7]. D'autre part, d'après la formule (1), le $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$-module $\Theta_{u_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]}$, isomorphe à $u_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$, est un sous-module du quotient $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ de $(\gamma_\xi)$; mais $(\gamma_\xi)$ et $u_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$ sont des $\mathbf{Z}$-modules libres de même rang $\varphi(g_\xi) . [\mathfrak{G}/G]$, d'où la proposition.

Notons $\mathscr{V}_1$ le produit de $\Delta_{H_0}$ et des groupes $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$, $\xi \neq \xi_0$; il résulte de la proposition 1 et de la remarque du paragraphe 1 que ce produit est direct. A l'aide du corollaire du paragraphe 2, et en notant la double inclusion $\mathscr{V}_1^{[G]} \subset \Theta_{I(\mathfrak{G})} \subset \mathscr{V}_1$, on obtient d'après (1) :

$$[\mathscr{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = [\mathscr{V}_1^{[G]} : \Theta_{I(\mathfrak{G})}^{[G]}] = [e_{\xi_0} . I(\mathfrak{G}) \oplus (\oplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}]) : I(\mathfrak{G})].$$

Projetons $e_{\xi_0} . I(\mathfrak{G}) \oplus (\oplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}])$ sur son quotient par $e_{\xi_0} . I(\mathfrak{G})$;

il vient

$$[\mathscr{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = [G]^{[\mathfrak{G}/G]}.[\oplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi . \mathbf{Z}[\mathfrak{G}] : (1-e_{\xi_0}).\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]].$$

Or (*cf.* [6], § 1.3, formules (10) et (11)) on a

$$[\oplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi . \mathbf{Z}[G] : (1-e_{\xi_0}).\mathbf{Z}[G]]$$
$$= [\oplus_\xi e_\xi . \mathbf{Z}[G] : \mathbf{Z}[G] + e_{\xi_0}.\mathbf{Z}[G]] = N_G/[G].$$

Vu l'isomorphisme de $\mathbf{Z}[G]$-modules $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}] \simeq \mathbf{Z}[G]^{[\mathfrak{G}/G]}$, on obtient donc :

(4) $$[\mathscr{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = N_G^{[\mathfrak{G}/G]}.$$

D'autre part, pour chaque automorphisme $\tau \in \mathfrak{G}_\xi$, choisissons un idéal entier $\mathfrak{a}_\tau$ de $K$ premier à $12.f_\xi$, d'image $\tau$ par l'homomorphisme d'Artin de $H_\xi/K$; la classe modulo $e_{H_\xi}$ de la norme $N(\mathfrak{a}_\tau)$ de $\mathfrak{a}_\tau$ ne dépend pas du choix précédent, de sorte que

$$J_\xi =^{\text{dfn}} \{\textstyle\sum_{\tau \in \mathfrak{G}_\xi} n_\tau . \tau \mid \sum_{\tau \in \mathfrak{G}_\xi} n_\tau . N(\mathfrak{a}_\tau) \equiv 0(e_{H_\xi})\},$$

est un idéal de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$. Considérons alors le groupe $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$ : comme on a $(\gamma_\xi) = \gamma_\xi . \mathbf{Z} + (\gamma_\xi) \cap J_\xi$, son indice dans $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ est égal au plus petit entier $a > 0$ tel que $\gamma_\xi . a$ appartienne à $J_\xi$. Or, pour l'entier $n_\xi$ ci-dessous, on a $\gamma_\xi - n_\xi \in J_\xi$, d'où le lemme suivant :

Lemme 4. – *L'indice de* $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$ *dans* $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ *est égal au quotient*

$$a(\xi) = e_{H_\xi}/\text{p.g.c.d.}(e_{H_\xi}, n_\xi),$$

*avec* $n_\xi = \prod_{p \mid g_\xi} (N(\mathfrak{a}_{\sigma(\xi)})^{g_\xi/p} - 1)$.

Mais, les éléments de $\theta_\xi^{J_\xi}$ sont des puissances d'ordre $12.f_\xi . e(\mathfrak{f}_\xi)$ dans $H_\xi$ (*cf.* appendice). Pour chaque caractère $\xi \neq \xi_0$, notons alors $\Omega'_{H_\xi}$ le groupe formé des unités de $H_\xi$ qui sont racines d'ordre $12.f_\xi . e(\mathfrak{f}_\xi)$ d'éléments de $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$, et posons

$$\mathscr{V}_2 = \mu_H . \Delta_{H_0} . \textstyle\prod_{\xi \neq \xi_0} \Omega'_{H_\xi}, \qquad \mathscr{V}_3 = \Omega_{H_0} . \mathscr{V}_2, \qquad \mathscr{V}_4 = E_{H_0} . \mathscr{V}_3,$$

où le sous-groupe $\Omega_{H_0}$ de $E_{H_0}$ est défini comme dans [7] (§ 3.2). Alors, on a

(5) $$[\mathscr{V}_2 : \mu_H . \Delta_{H_0} . \textstyle\prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}]$$
$$= 12^{[\mathfrak{G}] - [\mathfrak{G}/G]} . \textstyle\prod_{\xi \neq \xi_0} (f_\xi . e(\mathfrak{f}_\xi))^{\varphi(g_\xi).[\mathfrak{G}/G]},$$

et, d'après le lemme 4,

(6) $$[\mathscr{V}_1 : \Delta_{H_0} . \textstyle\prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}] = \prod_{\xi \neq \xi_0} a(\xi).$$

On déduit de (3), (4), (5) et (6) la formule :

$$(7) \qquad [E_H : \mathscr{V}_2] = \frac{12^{[\mathfrak{G}/G]-1}}{q_H} \cdot \frac{e^{[\mathfrak{G}/G]}}{e_{H_0}} \cdot h^{[\mathfrak{G}/G]-2} \cdot \frac{N_G^{[\mathfrak{G}/G]}}{[G]} \cdot h_H,$$

où l'on a noté $1/q_H$ la quantité $(\prod_{\xi \neq \xi_0} a(\xi)) \cdot e_{H_0}/e_H$ ; la proposition 2 (*cf.* infra, § 4) montre que $q_H$ est un entier puissance de 2.

Enfin, les indices $[\mathscr{V}_4 : \mathscr{V}_2] = [E_{H_0} : \mu_{H_0} \cdot \Delta_{H_0}] = (1/e_{H_0}) \cdot [E_{H_0} : \Delta_{H_0}]$ et $[\mathscr{V}_4 : \mathscr{V}_3] = [E_{H_0} : \mu_{H_0} \cdot \Omega_{H_0}]$ sont respectivement égaux à

$$12^{[\mathfrak{G}/G]-1} \cdot h^{[\mathfrak{G}/G]-2} \cdot \frac{e^{[\mathfrak{G}/G]}}{e_{H_0}} \cdot h_{H_0}$$

et

$$12^{[\mathfrak{G}/G]-1} \cdot \frac{e}{e_{H_0}} \cdot h_{H_0}/(H_{(1)} : H_0) \qquad (\textit{cf.}\ [7],\ \S\ 3.2,\ \text{th. 4 et 6}).$$

Par suite, la formule (7) permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les indices de $\mathscr{V}_3$ et $\mathscr{V}_4$ dans $E_H$ sont donnés par les égalités*

$$[E_H : \mathscr{V}_3] = c_3 \cdot h_H/(H_{(1)} : H_0), \qquad [E_H : \mathscr{V}_4] = c_4 \cdot h_H/h_{H_0},$$

*où les entiers $c_3$ et $c_4$ sont définis par*

$$c_3 = 12^{[\mathfrak{G}/G]-1} \cdot \frac{e}{e_{H_0}} \cdot c_4, \qquad c_4 = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{N_G^{[\mathfrak{G}/G]}}{[G]}.$$

*N. B.* — On notera que le quotient $h_H/h_{H_0}$, et donc $h_H/(H_{(1)} : H_0)$, est un entier.

## 4. Détermination de $q_H$

Soit $\xi \neq \xi_0$ un caractère de $G$, défini et irréductible sur $\mathbf{Q}$. Pour chaque diviseur premier $p$ de $g_\xi$, désignons par $H_{\xi,p}$ le sous-corps d'indice $p$ de $H_\xi$ contenant $H_0$, et posons $e_{\xi,p} = e_{H_{\xi,p}}$. Il vient le résultat suivant :

LEMME 5. — *On a l'identité*

$$\text{p.g.c.d.}\,(n_\xi, e_{H_\xi}) = \text{p.g.c.d.}\,(\textstyle\prod_{p \mid g_\xi} e_{\xi,p}, e_{H_\xi}).$$

*Démonstration.* — L'assertion du lemme provient de l'égalité

$$e_{\xi,p} = \text{p.g.c.d.}\,(N(\mathfrak{a}) - 1),$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de $K$ premiers à $12.f_\xi$ dont l'image par l'homomorphisme d'Artin de $H_\xi/K$ fixe $H_{\xi,\,p}$ (*cf.* [7], § 4.1, lemme 6). En effet, comme $\sigma(\xi)^{g_\xi/p}$ engendre le groupe de Galois de $H_\xi/H_{\xi,\,p}$, il s'ensuit que $N(\mathfrak{a}_{\sigma(\xi)})^{g_\xi/p}-1$ et $e_{\xi,\,p}$ engendrent le même idéal de $\mathbf{Z}/e_{H_\xi}.\mathbf{Z}$.

LEMME 6. — *L'entier $a(\xi)$ vaut* 1, *à moins que $H_\xi$ ne soit engendré sur $H_0$ par un groupe $\mu_m$, pour $m$ puissance d'un nombre premier.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 5, il suffit de démontrer que $e_{H_\xi}$ divise $\prod_{p \mid g_\xi} e_{\xi,\,p}$. C'est trivial si $H_\xi$ n'est pas engendré sur $H_0$ par un groupe de racines de l'unité. Supposons donc $H_\xi = H_0(\mu_n)$, et choisissons $n$ minimal. Si $n$ est puissance d'un nombre premier, il n'y a rien à démontrer. Si $n = a.b$, avec $a$ et $b$ entiers $> 1$ premiers entre eux, alors $H_0(\mu_a)$ et $H_0(\mu_b)$ sont des sous-corps stricts de $H_\xi$, et $e_{H_\xi}$, qui divise le produit

$$e_{H_0}.\text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, n) = \text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, a).\text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, b),$$

divise donc $\prod_{p \mid g_\xi} e_{\xi,\,p}$.

LEMME 7. — *Si $H = H_0(\mu_{q^r})$, avec $r > 0$ et $q$ premier, alors $a(\xi)$ vaut $q^\varepsilon$, où $\varepsilon = 2$ si $H = H_0(\mu_4) = H_0(\mu_8)$ et $\varepsilon = 1$ sinon.*

*Démonstration.* — On distingue deux cas :

*Cas $q = 2$* : Si $H = H_0(\mu_4) = H_0(\mu_8)$, l'assertion du lemme est immédiate à vérifier; sinon, le seul sous-corps d'indice premier de $H_\xi$ contenant $H_0$ est $H_0(\mu_{2^{r-1}})$ et $a(\xi) = 2$.

*Cas $q \neq 2$* : Si $r = 1$, l'assertion du lemme est claire. Si $r > 1$, le sous-corps d'indice $q$ de $H_0(\mu_{q^r})$ est $H_0(\mu_{q^{r-1}})$, donc $e_{H_\xi} = q.e_{\xi,\,q}$. De plus, pour $p \neq q$, le nombre $e_{\xi,\,p}$ est premier à $q$; ce qui achève la démonstration du lemme 7.

PROPOSITION 2. — *Soit $2^r$ la plus grande puissance de* 2 *divisant $e_H$; si l'extension $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ est cyclique, on a $q_H = 1$, sinon on a $q_H = 2^{r-3}$ ou $2^{r-2}$ suivant que $\sqrt{2}$ appartient ou non à $H_0$.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 6, on a $q_H = q_{H_0(\mu_{e_H})}$; ce lemme prouve aussi la multiplicativité de l'application : $a \mapsto q_{H_0(\mu_a)}$. Par suite, il suffit de déteiminer $q_H$ lorsque $H = H_0(\mu_{p^r})$, avec $p$ premier et $p^r$ la plus grande puissance de $p$ qui divise $e_H$. Si l'extension $H_0(\mu_{p^r})/H_0$ est cyclique, en particulier si $p \neq 2$, on déduit du lemme 7, par récurrence sur $r$, l'égalité $q_{H_0}(\mu_{p^r}) = 1$. Enfin si $p = 2$ et si $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ n'est pas cyclique, le quotient $e_H/e_{H_0}$ vaut $2^{r-1}$, et $H_\xi = H_0(\mu_4)$ est l'unique sous-extension cyclique de $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ telle que $a(\xi) \neq 1$. Or, d'après le lemme 7, suivant que $H_0(\mu_4)$ contient $\mu_8$ ou non, l'entier $a(\xi)$ vaut 4 ou 2, d'où $q_H = 2^{r-3}$ ou $2^{r-2}$.

## APPENDICE

Pour toute extension abélienne $L/K$, de conducteur $\mathfrak{f}$, et tout idéal entier $\mathfrak{b}$ de $K$ premier à $\mathfrak{f}$, on désigne par $(\mathfrak{b}, L/K)$ l'automorphisme d'Artin de $L/K$ associé à $\mathfrak{b}$. Notons alors $1_{H_\xi} = ((1), H_\xi/K)$ l'élément neutre de $\mathfrak{G}_\xi$, et énonçons le lemme facile suivant :

LEMME A-1. — *L'idéal* $J_\xi$ *de* $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ *est engendré comme* $\mathbf{Z}$*-module par les différences*

$$(\mathfrak{b}, H_\xi/K) - N(\mathfrak{b}).1_{H_\xi},$$

*lorsque* $\mathfrak{b}$ *parcourt l'ensemble des idéaux entiers de* $K$ *premiers à* $12.f_\xi$.

*Démonstration.* — D'après [7] (§ 4.1, lemme 7), l'entier $e_{H_\xi}$ divise $12.f_\xi$, si bien que l'assertion du lemme se démontre comme le cas $n = 1$ du lemme 12 de [1].

D'après le lemme précédent, les éléments du groupe $\theta_\xi^{J_\xi}$ sont des puissances d'ordre $12.f_\xi.e(\mathfrak{f}_\xi)$ dans $H_\xi$ si, et seulement si, il en est de même pour les quotients

$$\theta_\xi^{(\mathfrak{b}, H_\xi/K)}/\theta_\xi^{N(\mathfrak{b})},$$

lorsque $\mathfrak{b}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de $K$ premiers à $12.f_\xi$. Vu la définition de $\theta_\xi$, notre affirmation résulte donc de la proposition suivante.

PROPOSITION A-2. — *Soient* $\mathfrak{f}$ *un idéal entier de* $K$ *tel que le corps* $H_\mathfrak{f}$ *contienne strictement* $H_{(1)}$, *et* $C \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{f})$ *une classe de rayon modulo* $\mathfrak{f}$. *Comme dans* [7] (§ 2.2), *associons à* $C$ *l'élément* $\varphi_\mathfrak{f}(C)$ *de* $H_\mathfrak{f}$. *Alors, pour tout idéal entier* $\mathfrak{b}$ *de* $K$ *premier à* $12.f$ (*), *le quotient* $\varphi_\mathfrak{f}(C)^{(\mathfrak{b}, H\mathfrak{f}/K)}/\varphi_\mathfrak{f}(C)^{N(\mathfrak{b})}$ *est une puissance d'ordre* $12.f.e(\mathfrak{f})$ *dans* $H_\mathfrak{f}$.

*Démonstration.* — Distinguons deux cas suivant que l'entier $e(\mathfrak{f})$ vaut 1 ou non.

(a) *Cas* $e(\mathfrak{f}) = 1$.

D'après [11], l'élément $E(C) = \varphi_\mathfrak{f}(C)$ possède une racine d'ordre $12.f$ dans l'extension abélienne $H_{(12.f^2)}$ de $K$. Par suite, l'affirmation de la proposition résulte de la reformulation suivante du lemme 1 de [11], avec $n = 12.f$ et $\delta^n = \varphi_\mathfrak{f}(C)$.

---

(*) En fait, un calcul explicite, basé sur la formule (4) et le corollaire A-2 de [8], prouve que l'assertion de la proposition reste vraie si l'on suppose seulement l'idéal entier $\mathfrak{b}$ de $K$ premier à $12.\mathfrak{f}$.

LEMME A-3. — *Désignons par $K$ un corps de nombres, et par $H$ une extension abélienne de conducteur $\mathfrak{f}$ de $K$. Soient $n$ un entier $> 0$, et $\delta$ un nombre algébrique qui possède les deux propriétés suivantes :*

(i) $\delta$ *appartient à l'extension abélienne maximale de $K$;*

(ii) $\delta^n$ *appartient à $H$.*

*Alors, pour tout idéal entier $\mathfrak{b}$ de $K$ premier à $n.\mathfrak{f}$, le quotient $(\delta^n)^{(\mathfrak{b},H/K)}/\delta^{n.N(\mathfrak{b})}$ est une puissance d'ordre $n$ dans $H$.*

*Démonstration.* — Soit $m$ un entier $> 0$ divisible par $n$ et par le conducteur de l'extension abélienne $H' = H(\delta)$ de $K$. Pour chaque automorphisme $\sigma$ de $H'/H$, on a

$$\delta^\sigma = \omega(\sigma).\delta,$$

où $\omega(\sigma)$ est une racine $n$-ième de l'unité puisque $\delta^n$ appartient à $H$. Désignons par $\mathfrak{b}'$ un idéal entier de $K$ premier à $m$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

($\alpha$) la restriction à $H/K$ de l'automorphisme $(\mathfrak{b}', H'/K)$ coïncide avec $(\mathfrak{b}, H/K)$;

($\beta$) $N(\mathfrak{b}') \equiv N(\mathfrak{b})\ (n)$;

et considérons l'action de $\sigma$ sur $\delta' = \delta^{(\mathfrak{b}',H'/K)}$. On a

$$\begin{aligned}\delta'^\sigma &= (\delta^{(\mathfrak{b}',H'/K)})^\sigma = (\delta^\sigma)^{(\mathfrak{b}',H'/K)}\\ &= (\omega(\sigma).\delta)^{(\mathfrak{b}',H'/K)} = \omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b}')}.\delta'.\end{aligned}$$

Or, d'après ($\beta$), on a $\omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b}')} = \omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b})}$ si bien que le quotient $\delta'/\delta^{N(\mathfrak{b})}$, fixé par $\sigma$, appartient à $H$; mais, vu ($\alpha$), sa puissance $n$-ième n'est autre que le quotient $(\delta^n)^{(\mathfrak{b},H/K)}/\delta^{n.N(\mathfrak{b})}$ et l'assertion du lemme est démontrée.

(b) *Fin de la démonstration de la proposition* A-2, $e(\mathfrak{f}) > 1$.

Comme $H_{(1)}$ doit être un sous-corps strict de $H_\mathfrak{f}$, on constate aisément que l'on a $e(\mathfrak{f}) = 2$ et $\mathfrak{f} = (2)$. Il s'agit donc de prouver que le quotient $\varphi_{(2)}(C)^{(\mathfrak{b},H_{(2)}/K)}/\varphi_{(2)}(C)^{N(\mathfrak{b})}$ est une puissance d'ordre $12.2.2 = 48$ dans $H_{(2)}$. Mais, comme $e((4)) = 1$, on sait déjà, d'après ($a$), que les quotients

$$\varphi_{(4)}(C')^{(\mathfrak{b},H_{(4)}/K)}/\varphi_{(4)}(C')^{N(\mathfrak{b})}, \qquad C' \in \mathrm{Cl}((4)),$$

sont des puissances d'ordre $12.4 = 48$ dans $H_{(4)}$. L'assertion de la proposition résulte alors du lemme suivant, qui précise dans le cas particulier considéré ici la formule de normes du théorème 2 (i) (§ 2.3) de [7].

LEMME A-4. — *Pour toute classe* $C \in \mathrm{Cl}((2))$, *on a*

$$N_{H(4)/H(2)}(\varphi_{(4)}(C'_i)) = \prod_{j=1}^{2} \varphi_{(4)}(C'_j) = \varphi_{(2)}(C), \qquad i = 1, 2,$$

*où le produit est pris sur les deux classes, de rayon modulo* (4), $C'_1$ *et* $C'_2$ *contenues dans* $C$.

*Démonstration.* — Soient $\Gamma \subset \mathbf{C}$ un réseau complexe, $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ un système complet de représentants de $\Gamma/2$ modulo $\Gamma$, et $t \in \mathbf{C}$ un nombre complexe tel que $4t \in \Gamma$, $t \notin \Gamma/2$. Définissons alors la fonction $\varphi^{(12)}$ comme dans [7] (§ 1, p. 8), et observons que la somme $\tau = \sum_{j=1}^{4} t_j$ appartient à $\Gamma$. Élevant la formule (6) de [7] (§ 1, p. 10) à la puissance 24, on obtient l'identité

$$\varphi^{(12)}(t;\Gamma/2)^2 = \prod_{j=1}^{4} \varphi^{(12)}(t+t_j;\Gamma)^2,$$

(*cf.* démonstration de la proposition 1, § 1, de [7]). L'assertion du lemme résulte maintenant de cette dernière identité, de la même façon que la proposition 1 (loco citato) implique la formule de normes du théorème 2 (i) de [7].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] COATES (J.), SINNOTT (W.). — Integrality properties of the values of partial zeta functions, *Proc. London math. Soc.*, t. 34, 1977, p. 365-384.

[2] GILLARD (R.). — Remarques sur les unités cyclotomiques et les unités elliptiques, *J. of Number Theory* (à paraître).

[3] GRAS (G.). — Étude d'invariants relatifs aux groupes de classes des corps abéliens, « *Journées arithmétiques de Caen*, 1976 », *Astérisque* n° 41-42, 1977, p. 35-53.

[4] HASSE (H.). — *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper.* — Berlin, Akademie Verlag, 1952 (*Mathematische Lehrbücher und Monographien*, Abteilung 2, Band 1).

[5] LANG (S.). — *Elliptic functions.* — Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1973 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).

[6] LEOPOLDT (H.). — Über die Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsche Akad. Wiss.*, Kl. Math. Natur., t. 2, 1954, 48 p.

[7] ROBERT (G.). — Unités elliptiques, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 36, 1973, 77 p.

[8] ROBERT (G.). — Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 4e série, t. 11. 1978. p. 297-389.

[9] SCHERTZ (R.). — Die Klassenzahl der Teilkörper abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper, I und II, *J. reine und angew. Math.*, I, t. 295, 1977, p. 151-168; II, t. 296, 1977, p. 58-79.

[10] SINNOTT (W.). — On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field, *Ann. of Math.* t. 108, 1978, p. 107-134.

[11] STARK (H. M.). — Class fields and modular forms of weight one, "*Modular functions of one variable*" V [1976, Bonn], p. 277-288. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Mathematics*, 601).