BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTER O. KISELMAN

Densité des fonctions plurisousharmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 295-304
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__295_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 295-304.

DENSITÉ DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

PAR

CHRISTER O. KISELMAN (*)

[Uppsala]

RÉSUMÉ. — Nous construisons, à partir d'une fonction plurisousharmonique f donnée, des fonctions plurisousharmoniques f_α dont la densité (ou nombre de Lelong) est $\nu_{f_\alpha} = (\nu_f - \alpha)^+$. Cela nous permet de déduire très rapidement le théorème de SIU dans le cas des courants de type (1,1).

ABSTRACT. — Given a plurisubharmonic function f, we construct plurisubharmonic functions f_α with density (Lelong number) satisfying $\nu_{f_\alpha} = (\nu_f - \alpha)^+$. This construction enables us to give a very short proof of SIU's theorem in the case of currents of type (1,1).

1. Résultats

Notons $PSH(\omega)$ la classe des fonctions plurisousharmoniques dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et $\nu_f(x)$ la densité de $f \in PSH(\omega)$ au point $x \in \omega$ (*voir* la définition au paragraphe 2). Notre résultat principal, qui sera démontré au paragraphe 3, est le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soient* ω *un domaine pseudoconvexe dans* $\mathbf{C}^n$ *et* $q \in PSH(\omega)$. *Supposons que*

(1.1) $q(x) \geqslant -(2\pi)^{-1} \log d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega)$ *pour tout* $x \in \omega$, *et*

(1.2) $\nu_q(x) = 0$ *pour tout* $x \in \omega$.

Soit $f \in PSH(\omega)$, *et notons* $f(x, r)$ *la valeur moyenne de* f *sur la sphère centrée en* x *et de rayon* $r < d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega)$. *Posons*

$$f_\alpha(x) = \inf_r (f(x, r) - \alpha (2\pi)^{-1} \log r;\ 0 < r < e^{-2\pi q(x)}). \tag{1.3}$$

Alors f_α *est plurisousharmonique dans* ω *et sa densité est*

$$\nu_{f_\alpha} = (\nu_f - \alpha)^+, \qquad \alpha \geqslant 0. \tag{1.4}$$

(*) Texte reçu le 7 novembre 1978.

Christer O. KISELMAN, Institut de Mathématiques, 3 Thunbergsvägen, S-752 38 Uppsala (Suède).

Notons que (1.2) est une conséquence de (1.1) si $\omega \neq \mathbf{C}^n$. Le choix le plus simple de la fonction q est donc $q(x) = -(2\pi)^{-1} \log d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega)$ si $\omega \neq \mathbf{C}^n$ et q = Cte finie si $\omega = \mathbf{C}^n$.

THÉORÈME DE SIU (*cas* (1,1)). — *Si* $g \in PSH(\omega)$, ω *étant un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *alors l'ensemble*

$$X(g, \beta) = \{ x \in \omega;\ \nu_g(x) \geqslant \beta \} \tag{1.5}$$

est un ensemble analytique.

Dans le théorème de SIU complet [9] il s'agit de la densité d'un courant positif fermé de type (k, k); le cas des fonctions plurisousharmoniques correspond au cas de type (1,1). Notons à ce propos la démonstration de P. LELONG ([8], théorème 2), fondée sur l'étude du potentiel d'un courant de SKODA ([10], proposition 2.2), qui réduit le cas (k, k) au cas (1,1).

Le résultat de SKODA ([10], théorème 11.2), trouvé antérieurement, est moins précis que le théorème de SIU : il établit l'existence d'un ensemble analytique Z_β tel que

$$X(g, n\beta) \subset Z_\beta \subset X(g, \beta). \tag{1.6}$$

Dans le paragraphe 4, nous appliquons un résultat de type (1.6) (ou même plus faible) aux fonctions f_α du théorème 1.1; cela nous permet d'obtenir le théorème de SIU.

Il faut souligner que nos résultats ne sont pas nouveaux. En effet, le théorème de SIU et la théorie de l'intégration sur un ensemble analytique (*voir* LELONG [5]), nous permettent de construire, en utilisant la technique de potentiel de SKODA [10], des fonctions plurisousharmoniques f_α dont la densité satisfait à (1.4). Il n'y a donc que le caractère élémentaire de nos démonstrations pour justifier une publication.

2. La densité d'une fonction plurisousharmonique

Soit f plurisousharmonique et non identiquement $-\infty$ dans un domaine ω dans $\mathbf{C}^n$, et notons $\mu = \Delta f$ la mesure associée. La densité $(2n-2)$-dimensionnelle de μ au point $x \in \omega$ est, par définition,

$$\nu_f(x) = \lim_{r \to 0} \mu(x + rB)/\lambda_{2n-2}(rB \cap \mathbf{C}^{n-1}), \tag{2.1}$$

où $x + rB$ est la boule (fermée) de centre x et de rayon r, et λ_{2n-2} est la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^{2n-2}$. Nous appellerons $\nu_f(x)$ la *densité* (ou *nombre de Lelong*) *de* f *au point* x; la limite dans (2.1) existe toujours comme l'a démontré LELONG (*voir* par exemple [6], p. 73; *cf.* aussi (2.4) ci-dessous).

Nous allons exprimer la densité de f par ses valeurs moyennes $f(x, r)$ sur des sphères. Il sera commode d'utiliser non pas le rayon r, mais $y = (2\pi)^{-1} \log r$; nous définissons donc

$$(2.2) \qquad u(x, y) = \text{moyenne}_{x+e^{2\pi y}S} f = \int_{|z|=1} f(x+e^{2\pi y} z)\, dS(z) \Big/ \int_{|z|=1} dS(z).$$

On a, pour $x \in \omega$ et $r < d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega)$, en supposant f suffisamment lisse,

$$\mu(x+rB) = \int_{x+rB} \Delta f = \int_{x+rS} \frac{\partial f}{\partial r}\, dS = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dr} \int_{rS} dS.$$

Or $dy/dr = (2\pi r)^{-1}$, et

$$\int_{rS^{2n-1}} dS = r^{2n-1} \int_{S^{2n-1}} dS = 2\pi r^{2n-1} \int_{B^{2n-2}} d\lambda_{2n-2} = 2\pi r \int_{rB^{2n-2}} d\lambda_{2n-2},$$

de façon que

$$\frac{\mu(x+rB)}{\lambda_{2n-2}(rB^{2n-2})} = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \qquad \text{où} \quad r = e^{2\pi y}, \qquad y \in \mathbf{R}.$$

Si f n'est pas lisse, on remplace $\partial u/\partial y$ par la dérivée à droite :

$$\partial_y^+ u(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} (u(x, y+\varepsilon) - u(x, y))/\varepsilon; \quad x \in \omega, \quad y \in \mathbf{R}, \qquad e^{2\pi y} < d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega),$$

et nous aurons

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mu(x+rB)}{\lambda_{2n-2}(rB^{2n-2})} = \partial_y^+ u(x, y), \qquad x \in \omega, \quad y \in \mathbf{R}, \\ r = e^{2\pi y} < d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega). \end{cases}$$

Il est bien connu que $y \mapsto u(x, y)$ est une fonction croissante et convexe; donc, la limite de (2.3) quand $y \to -\infty$ existe :

$$(2.4) \quad \nu_f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(x+rB)}{\lambda_{2n-2}(rB^{2n-2})} = \lim_{y \to -\infty} \partial_y^+ u(x, y), \qquad x \in \omega.$$

On a également

$$(2.5) \qquad \nu_f(x) = \lim_{y \to -\infty} \frac{u(x, y)}{y}, \qquad x \in \omega,$$

et nous nous servirons de (2.4) aussi bien que (2.5) dans la suite (*cf.* [3], § 6, et [8], proposition 1).

Enfin, si f est la constante $-\infty$, il convient de poser $\nu_f(x) = +\infty$.

3. Démonstration du théorème 1.1

Soient ω et $q \in PSH(\omega)$ comme dans le théorème 1.1, et posons

$$\Omega = \{(x, y) \in \omega \times \mathbf{C};\ q(x) + \operatorname{Re} y < 0\}; \tag{3.1}$$

c'est alors un domaine pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^{n+1}$. La fonction u, définie par (2.2), est plurisousharmonique dans Ω. Nous pouvons donc récrire la définition (1.3) de f_α :

$$f_\alpha(x) = \inf_y (u(x, y) - \alpha \operatorname{Re} y;\ (x, y) \in \Omega). \tag{3.2}$$

Le fait que $f_\alpha \in PSH(\omega)$ découle du résultat suivant, démontré (sous une forme légèrement plus générale) dans [4].

Le principe de minimum. — *Soient Ω un domaine pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, et $u \in PSH(\Omega)$. Supposons que Ω et u sont indépendants de* $\operatorname{Im} y$ *dans le sens suivant : si $(x, y) \in \Omega$ et* $\operatorname{Re} y' = \operatorname{Re} y$, *alors $(x, y') \in \Omega$ et $u(x, y') = u(x, y)$ (ici $x \in \mathbf{C}^n$, $y \in \mathbf{C}^m$). Supposons aussi (pour simplifier) que $\pi^{-1}(x) \cap \Omega$ est connexe, donc convexe, pour tout $x \in \pi(\Omega)$, où $\pi : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ désigne la projection $\pi(x, y) = x$. Alors*

$$v(x) = \inf_y (u(x, y);\ (x, y) \in \Omega), \qquad x \in \pi(\Omega),$$

est plurisousharmonique.

Si f est la constante $-\infty$, on a bien

$$\nu_{f_\alpha}(x) = +\infty = (\nu_f(x) - \alpha)^+.$$

Supposons désormais que f est non identiquement $-\infty$; nous allons calculer la densité ν_{f_α} en trois étapes (A)-(C).

(A) $\nu_{f_\alpha}(x) \geqslant \nu_f(x) - \alpha$.

Vu (3.2) on a, pour tout $x \in \omega$ et tout y' réel satisfaisant à $y' < -q(x)$,

$$f_\alpha(x) \leqslant u(x, y') - \alpha y'.$$

La valeur moyenne de f_α sur la sphère $x + rS$, notée $u_\alpha(x, y)$ où $y = (2\pi)^{-1} \log r$, peut donc être majorée de façon suivante :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y) &= \text{moyenne}_{|z|=1} f_\alpha(x + rz) \\ &\leqslant \text{moyenne}_{|z|=1} u(x + rz, y') - \alpha y' \\ &\leqslant u(x, y'') - \alpha y'. \end{aligned}$$

Ici, $y' = (2\pi)^{-1} \log r'$, $y'' = (2\pi)^{-1} \log r''$ et $r'' = r + r'$; l'inégalité est vraie pour tout y et tout y' si l'on convient de poser $u(x, y) = +\infty$ quand

$(x, y) \notin \Omega$. Étant donnés $x \in \omega$ et $y < -q(x)$, on est libre de choisir y'; prenons $y' = y$. Alors $y'' = y + (2\pi)^{-1} \log 2$, et il vient, après division par $y < 0$,

$$\frac{u_\alpha(x, y)}{y} \geqslant \frac{u(x, y'')}{y'' - (2\pi)^{-1} \log 2} - \alpha.$$

En faisant tendre y vers $-\infty$, on obtient, vu (2.5), $\nu_{f_\alpha} \geqslant \nu_f - \alpha$.

(B) $\nu_{f_\alpha}(x) \leqslant \nu_f(x) - \alpha$ *si* $\nu_f(x) > \alpha$.

C'est la partie la moins triviale du calcul.

LEMME 3.1. — *Soient* (x, y), $(x', y') \in \Omega$ *tels que* $e^{2\pi y'} \geqslant e^{2\pi y} + |x' - x|$. *Alors :*

$$\partial_y^+ u(x', y') \geqslant \partial_y^+ u(x, y) e^{2\pi(2n-2)(y-y')}.$$

Démonstration. — Notons $r = e^{2\pi y}$, $r' = e^{2\pi y'}$. La boule $x' + r' B$ contient la boule $x + r B$, et il vient (*cf.* (2.3)) :

$$\partial_y^+ u(x', y') = \frac{\mu(x' + r' B)}{\lambda_{2n-2}(r' B^{2n-2})} \geqslant \frac{\mu(x + r B)}{\lambda_{2n-2}(r B)} \left(\frac{r}{r'}\right)^{2n-2}$$
$$= \partial_y^+ u(x, y) e^{2\pi(2n-2)(y-y')}.$$

LEMME 3.2. — *Supposons que* $0 \leqslant \alpha < \nu_f(x)$, *et posons*

$$b = b(x, \alpha) = [1 - (\alpha/\nu_f(x))^{1/(2n-2)}]^{-1}.$$

Alors, pour tout $x' \in \omega$ *satisfaisant à* $b\,|x' - x| < e^{-2\pi q(x)}$, *on a*

$$f_\alpha(x') \geqslant f(x') - \frac{\alpha}{2\pi}(\log|x' - x| + \log b). \tag{3.3}$$

Démonstration. — Nous allons voir que $\partial_y^+ u(x', y') > \alpha$ pour un point $(x', y') \in \Omega$ tel que

$$b\,|x' - x| < e^{2\pi y'} < e^{-2\pi q(x)} \leqslant d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega). \tag{3.4}$$

En effet, en définissant y par l'équation $|x' - x| + e^{2\pi y} = e^{2\pi y'}$ nous avons $e^{2\pi(y-y')} > 1 - 1/b$, et le lemme 3.1 nous donne

$$\partial_y^+ u(x', y') \geqslant \partial_y^+ u(x, y) e^{2\pi(2n-2)(y-y')} > \nu_f(x)(1 - 1/b)^{2n-2} = \alpha$$

où la dernière équation n'est que la définition de la constante b.

Par conséquent les y' satisfaisant à (3.4) ne contribuent pas à l'infimum dans la définition de $f_\alpha(x')$, et il s'en suit que

$$\begin{aligned} f_\alpha(x') &= \inf_{y'}(u(x', y')-\alpha y';\ y' < -q(x')) \\ &= \inf_{y'}(u(x', y')-\alpha y';\ y' < (2\pi)^{-1}(\log|x'-x|+\log b)) \\ &\geqslant f(x')-\alpha(2\pi)^{-1}(\log|x'-x|+\log b). \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme 3.2.

Soit maintenant $u_\alpha(x, y)$ la valeur moyenne de f_α sur la sphère $x+e^{2\pi y}S$. Si y est négatif, et suffisamment grand en valeur absolue, l'inégalité (3.3) est valable pour $x' \in x+e^{2\pi y}S$, et il vient

$$u_\alpha(x, y) \geqslant u(x, y)-\alpha(2\pi)^{-1}(\log e^{2\pi y}+\log b).$$

En divisant par $y < 0$, et faisant tendre y vers $-\infty$, nous avons

$$\nu_{f_\alpha}(x) = \lim u_\alpha(x, y)/y \leqslant \lim u(x, y)/y-\alpha = \nu_f(x)-\alpha.$$

(C) $\nu_{f_\alpha}(x) = 0$ *si* $\nu_f(x) \leqslant \alpha$.

De façon générale, si $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, on a

$$u(x, y)-\beta y+(\alpha-\beta)q(x) \leqslant u(x, y)-\alpha y$$

pour tout $x \in \omega$ et tout $y < -q(x)$, d'où

$$f_\beta(x)+(\alpha-\beta)q(x) \leqslant f_\alpha(x) \tag{3.5}$$

et

$$\nu_{f_\beta}(x)+(\alpha-\beta)\nu_q(x) \geqslant \nu_{f_\alpha}(x).$$

Or, par hypothèse, $\nu_q(x) = 0$, donc $\nu_{f_\alpha} \leqslant \nu_{f_\beta}$.

Soit maintenant $\alpha \geqslant \nu_f(x) > \beta$. D'après l'étape (B), on sait que $\nu_{f_\beta}(x) \leqslant \nu_f(x)-\beta$. En faisant tendre β vers $\nu_f(x)$, on obtient :

$$\nu_{f_\alpha}(x) \leqslant \nu_{f_\beta}(x) \leqslant \nu_f(x)-\beta \to 0,$$

donc $\nu_{f_\alpha}(x) = 0$.

En combinant finalement les étapes (A)-(C), on obtient $\nu_{f_\alpha} = (\nu_f-\alpha)^+$. Le théorème 1.1 se trouve donc complètement démontré.

4. Le théorème de Siu

Soient ω un ouvert dans $\mathbf{C}^n$, et $f \in PSH(\omega)$. Notons $\mathcal{O}(\omega, f)$ l'espace de toutes les fonctions holomorphes h dans ω telles que

$$\int_\omega |h(x)|^2 e^{-f(x)}(1+|x|^2)^{-3n} d\lambda(x) < +\infty.$$

Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros communs à toutes les $h \in \mathcal{O}(\omega, f)$. Notons encore

$$X(f, \beta) = \{ x \in \omega ;\ \nu_f(x) \geqslant \beta \},$$

et soit

$$P(f) = \{ x \in \omega ;\ f(x) = -\infty \}$$

l'ensemble polaire de $f \in PSH(\omega)$. Nous utiliserons le résultat fondamental suivant, essentiellement dû à BOMBIERI [1].

THÉORÈME 4.1. — *Il existe une constante* $\gamma\,(= 4\pi n)$ *telle que, pour tout ouvert pseudoconvexe* ω *dans* $\mathbf{C}^n$ *et toute fonction* $f \in PSH(\omega)$, *on ait*

$$X(f, \gamma) \subset Z(f) \subset P(f). \tag{4.1}$$

Ici l'inclusion $X(f, \gamma) \subset Z(f)$ découle du fait que e^{-f} est non sommable dans tout voisinage de x si $\nu_f(x) \geqslant 4\pi n$. L'autre inclusion $Z(f) \subset P(f)$ est une combinaison du théorème 4.4.4 et du corollaire 4.4.6 dans HÖRMANDER [2]; le corollaire 4.4.6 dit que e^{-f} est sommable dans un voisinage de x si $f(x) > -\infty$.

Une application de (4.1) aux fonctions f_α du théorème 1.1 nous permet d'écrire, en supposant $q > -\infty$ partout :

$$X(f, \alpha+\gamma) = X(f_\alpha, \gamma) \subset Z(f_\alpha) \subset P(f_\alpha) \subset X(f, \alpha) \tag{4.2}$$

où la dernière inclusion découle de (2.4), vu que q est finie. Les inclusions (4.2) sont à comparer avec les inclusions $X(f, \alpha n) \subset Z \subset X(f, \alpha)$ de SKODA; ici la « perte » est additive (la constante γ) et donc négligeable pour α grand : faisons tendre α vers $+\infty$.

Appliquons (4.2) à $f = (\alpha+\gamma)\,\beta^{-1} g$, où g est une fonction plurisousharmonique donnée; cela donne

$$X(g, \beta) \subset Z(f_\alpha) \subset X(g, \beta\alpha/(\alpha+\gamma)).$$

En prenant l'intersection pour tout $\alpha = 1, 2, \ldots$ nous avons

$$X(g, \beta) \subset \textstyle\bigcap_{\alpha=1}^{\infty} Z(f_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} X(g, \beta\alpha/(\alpha+\gamma)) = X(g, \beta).$$

Donc $X(g, \beta)$ est l'ensemble analytique $\bigcap Z(f_\alpha) = \bigcap Z(k\gamma\, g_{\beta-1/k})$, l'ensemble des zéros communs à la réunion des $\mathcal{O}(\omega, k\gamma\, g_{\beta-1/k})$, $k \geqslant k_0$.

5. Résultats supplémentaires

Nous construirons en généralisant le théorème 1.1, une fonction plurisousharmonique g telle que sa densité soit $\nu_g = \varphi \circ \nu_f$, où φ est une fonction convexe croissante avec $\varphi(0) = 0$.

LEMME 5.1. — *Soient* ω *et* $q, f, f_\alpha \in PSH(\omega)$ *comme dans le théorème* 1.1. *Soit* φ *une fonction convexe et croissante sur* $\mathbf{R}$ *telle que* $\varphi(\alpha) = 0$ *pour* $\alpha \leqslant 0$ *et* φ *soit affine pour* α *assez grand. Alors :*

$$g(x) = \int f_\alpha(x)\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha, \qquad x \in \omega,$$

est plurisousharmonique dans ω, *et sa densité est*

$$\nu_g(x) = \int (\nu_f(x) - \alpha)^+\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha = \varphi \circ \nu_f(x).$$

Démonstration. — La mesure positive φ'' a son support dans un intervalle compact $[0, \alpha_0]$. D'autre part la fonction f_α satisfait à l'inégalité (*voir* (3.5) avec $\beta = 0$) :

$$(5.1) \qquad f(x) + \alpha q(x) \leqslant f_\alpha(x) \leqslant u(x, y') - \alpha y'.$$

Donc l'intégrale définissant g existe, ou bien finie, ou bien égale à $-\infty$. C'est donc un résultat standard qui nous permet d'écrire $g \in PSH(\omega)$ (*voir* LELONG [7], théorème 2.2.1).

Pour calculer la densité on n'a qu'à justifier le passage à la limite suivant :

$$\nu_g(x) = \lim_{y \to -\infty} u_g(x, y)\,y^{-1} = \lim_{y \to -\infty} \int u_{f_\alpha}(x, y)\,y^{-1}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha$$
$$= \int \lim_{y \to -\infty} [u_{f_\alpha}(x, y)\,y^{-1}]\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha = \int \nu_{f_\alpha}(x)\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha = \varphi(\nu_f(x)).$$

A cette fin, choisissons $z < -q(x))$, x étant un point donné de ω. L'expression $(u_{f_\alpha}(x, y) - u_{f_\alpha}(x, z))(y - z)^{-1}$ est positive si $y < z$, et décroît vers $\nu_{f_\alpha}(x)$ quand y tend vers $-\infty$. D'autre part elle est majorée, vu (5.1) :

$$0 \leqslant (u_{f_\alpha}(x, y) - u_{f_\alpha}(x, z))(y - z)^{-1} \leqslant -u_{f_\alpha}(x, z-1) + u_{f_\alpha}(x, z)$$
$$\leqslant -u_f(x, z-1) - \alpha u_q(x, z-1) + u_f(x, y'') - \alpha y',$$

où on suppose que $y \leqslant z - 1$ et où $e^{2\pi y''} = e^{2\pi z} + e^{2\pi y'}$. Cela montre que $(u_{f_\alpha}(x, y) - u_{f_\alpha}(x, z))(y - z)^{-1}$ est intégrable comme fonction de α sur tout intervalle compact et permet le passage à la limite.

PROPOSITION 5.2. — *Avec les notations du théorème* 1.1 *faisons l'hypothèse supplémentaire que* q *est continue dans* ω *et satisfait à*

$$(5.2) \qquad q(x) > -(2\pi)^{-1} \log d(x, \mathbf{C}^n \setminus \omega), \qquad x \in \omega.$$

Alors la fonction f_α, *définie par* (1.3), *est continue dans* $\omega(\alpha) = \omega \setminus X(f, \alpha)$.

Démonstration. – Soit x' un point quelconque de $\omega(\alpha)$ (donc $\nu_f(x') < \alpha$), et choisissons y' tel que $\partial_y^+ u(x', y') < \alpha$. Ceci est possible vu (2.4). Il existe un nombre $y < y'$ tel que

$$\partial_y^+ u(x', y') e^{2\pi(2n-2)(y'-y)} \leqslant \alpha;$$

alors, pour tout $x \in \omega$ tel que $|x - x'| \leqslant e^{2\pi y'} - e^{2\pi y} = \delta$, le lemme 3.1 nous montre que

$$\partial_y^+ u(x, y) \leqslant \partial_y^+ u(x', y') e^{2\pi(2n-2)(y'-y)} \leqslant \alpha.$$

Les $y'' \leqslant y$ ne contribuent donc pas dans la définition (3.2) de f_α, et on peut écrire, compte tenu aussi de (5.2),

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \inf_{y'' \in \mathbf{R}}(u(x, y'') - \alpha y''; \; y'' < -q(x)) \\ &= \inf_{y'' \in \mathbf{R}}(u(x, y'') - \alpha y''; \; y \leqslant y'' \leqslant -q(x)), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \omega$ tel que $|x - x'| \leqslant \delta$. Or il est clair de cette dernière expression que f_α est fonction continue de x, l'intervalle des y'' étant compact et d'extrémités variant de façon continue.

THÉORÈME 5.3. – *Étant données f fonction plurisousharmonique dans un domaine pseudoconvexe ω dans $\mathbf{C}^n$, et φ fonction convexe et croissante sur $\mathbf{R}$, zéro sur l'axe négatif, il existe $h \in PSH(\omega)$ telle que $\nu_h = \varphi \circ \nu_f$.*

Démonstration. – Soit $\varphi = \sum \varphi_k$, où chaque φ_k est convexe et croissante, égale à zéro pour $\alpha \leqslant k$ et affine pour $\alpha \geqslant k+1$. Posons

$$g_k(x) = \int f_\alpha(x) \varphi_k''(\alpha) \, d\alpha, \qquad x \in \omega,$$

où f_α est définie par (1.3) sous les hypothèses de la proposition 5.2. D'après le lemme 5.1, on a $g_k \in PSH(\omega)$, et $\sum \nu_{g_k} = \varphi \circ \nu_f$. La série $\sum g_k$ étant en général divergente il faut modifier les g_k. Soient $\psi \in PSH(\omega)$ une fonction d'épuisement de ω, continue, et $\omega_k = \{x \in \omega; \psi(x) < a_k\}$ des ouverts pseudoconvexes relativement compacts dans ω, où les constantes a_k sont choisies de façon que ν_f soit strictement majorée par k dans $\overline{\omega_k}$, donc $\overline{\omega_k} \subset \omega(k)$. Cela est possible avec $a_k < a_{k+1}$ tendant vers $+\infty$ avec k; donc tout compact dans ω est contenu dans un ω_k.

Il existe, pour tout k, des constantes b_k et c_k telles que $g_k + b_k \psi + c_k$ soit négative dans ω_{k-1}, et positive sur la frontière de ω_k (car g_k est continue sur $\overline{\omega_k}$ d'après la proposition 5.2). Posons

$$h_k = (g_k + b_k \psi + c_k)^+ \quad \text{dans } \omega_k, \quad \text{et } h_k = g_k + b_k \psi + c_k \quad \text{dans } \omega \setminus \omega_k.$$

Alors $h_k = 0$ dans ω_{k-1}, la série $h = \sum h_k$ est convergente (finie sur tout compact), et $\nu_{h_k} = \nu_{g_k} = \varphi_k \circ \nu_f$ (car $\nu_{h_k} = 0 = \nu_{g_k}$ dans $\overline{\omega_k}$).

Donc $\nu_h = \sum \varphi_k \circ \nu_f = \varphi \circ \nu_f$ comme nous l'avons voulu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (E.). — Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.*, Berlin, t. 10, 1970, p. 267-287; et Addendum, t. 11, 1970, p. 163-166.

[2] HÖRMANDER (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables.* 2nd ed. — Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1973 (*North-Holland mathematical Library*, 7).

[3] KISELMAN (C. O.). — Fonctions delta-convexes, delta-sousharmoniques et delta-plurisousharmoniques, *Séminaire P. Lelong*, 1975/1976, p. 93-107. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Mathematics*, 578).

[4] KISELMAN (C. O.). — The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions, *Invent. Math.*, Berlin, t. 49, 1978, p. 137-148.

[5] LELONG (P.). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 239-262.

[6] LELONG (P.). — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives.* — Paris, Gordon & Breach, 1968 (*Cours et Documents de Mathématiques et de Physique*).

[7] LELONG (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*). — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*Séminaire de Mathématiques supérieures.* Été 1967, 28).

[8] LELONG (P.). — Sur la structure des courants positifs fermés, *Séminaire P. Lelong*, 1975/1976, p. 136-156. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Mathematics*, 578).

[9] SIU (Y.-T.). — Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. math.*, Berlin, t. 27, 1974, p. 53-156.

[10] SKODA (H.). — Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$. *Bull. Soc. math. France*, t. 100, 1972, p. 353-408.