

# BULLETIN DE LA S. M. F.

REMI LANGEVIN

## Feuilletages tendus

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 107 (1979), p. 271-281

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1979\\_\\_107\\_\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__271_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FEUILLETAGES TENDUS

PAR

RÉMI LANGEVIN (\*)

[Univ. Paris-Sud, Orsay]

---

RÉSUMÉ. — Soit  $V, g$  une variété compacte métrique munie d'un feuilletage de codimension 1. La courbure des feuilles permet de définir une fonction sur toute la variété dont l'intégrale sur la variété est appelée courbure totale du feuilletage. La variété et la métrique étant données, un feuilletage réalisant la courbure totale minimale est appelé tendu. L'article contient des exemples de feuilletages tendus, et montre que la sphère  $S^3$  n'admet pas de feuilletage tendu.

ABSTRACT. — Let  $V, g$  be a compact Riemannian manifold with a codimension 1 foliation. The curvature of the leaves allows us to define a function on the manifold whose integral is called total curvature of the foliation. If the manifold and the metric are given, a foliation with minimal total curvature is called tight. The paper contains examples of tight foliations and shows that the three-sphere  $S^3$  does not admit any tight foliation.

H. RUMMLER a étudié, en toute dimension, les feuilletages totalement géodésiques c'est-à-dire dont les feuilles sont localement des sous-variétés totalement géodésiques [7].

D. SULLIVAN [8] a donné une caractérisation homologique des feuilletages tels qu'il existe une métrique faisant localement des feuilles des sous-variétés minimales.

D'autre part, après BANCHOFF [2], CHERN-LASHOF [5], en étudiant les plongements de variétés compactes dans  $\mathbf{R}^n$ , N. KUIPER a montré que certaines classes d'isotopie de plongement admettaient des représentants minimaux dont la géométrie est particulièrement simple [4] : les plongements tendus (tight en anglais).

Dans ce travail, nous allons définir la notion de feuilletage tendu.

---

(\*) Texte reçu le 27 septembre 1978.

Rémi LANGEVIN, Mathématiques, Bâtiment 425, Campus universitaire d'Orsay, 91405 Orsay Cedex.

Soit d'abord  $V^n \subset W^{n+1}$  une hypersurface plongée. La seconde forme fondamentale  $A : TV \rightarrow TV$  permet de définir en chaque point  $x$  de  $V$

$$X \mapsto \nabla_X N$$

des fonctions  $\sigma_i$  par  $\det(I-tA) = \sum \sigma_i t^i$ .

On reconnaît en  $\sigma_1(x)$  la courbure moyenne de  $V$  en  $x$ , et en  $\sigma_n(x)$  sa courbure de Lipschitz-Killing en  $x$ .

Un plongement tendu est, pour KUIPER, un plongement qui minimise l'intégrale  $\int_V |\sigma_n|$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1 de la variété compacte  $W^{n+1}$ . Définissons de même un feuilletage  $i$ -tendu par :  $\int_{W^n} |\sigma_i|$  minimum lorsque  $\mathcal{F}$  décrit une classe d'isotopie  $F$ . Un feuilletage tendu sera un feuilletage minimisant, dans sa classe d'isotopie, l'intégrale  $\int_{W^{n+1}} |\sigma_n|$ . Un feuilletage absolument tendu  $\mathcal{F}_0$  vérifiera

$$\int_{W^{n+1}} |\sigma_n(\mathcal{F}_0)| = \inf_{\mathcal{F}} \int |\sigma_n(\mathcal{F})|.$$

Deux questions naturelles se posent alors :

*Question (R-S).* —  $W^{n+1}$ ,  $\mathcal{F}$  étant donnés, existe-t-il une métrique  $g$  sur  $W^{n+1}$  telle que ce feuilletage soit  $i$ -tendu pour cette métrique? En particulier, peut-on annuler l'intégrale  $\int_{W^{n+1}} |\sigma_n(\mathcal{F})|$ .

*Question (K).* —  $W^{n+1}$ , sa métrique et une classe d'isotopie  $F$  de feuilletage étant donnés, existe-t-il un représentant  $\mathcal{F} \in F$   $i$ -tendu et en particulier tendu.

La question (R-S) a été résolue complètement par D. SULLIVAN dans le cas  $i = 1$ , et RUMMLER donne, dans [7], toute une classe d'exemple de feuilletage totalement géodésiques.

*Exemple ([7], remarque (4)).* — Soit  $G$  un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante, et  $H$  un sous-groupe de Lie connexe de  $G$ . Les classes à gauche modulo  $H$  sont alors géodésiques.

Si  $G$  admet un sous-groupe discret  $\Gamma$  tel que le quotient  $M = G/\Gamma$  ( $\Gamma$  opérant à droite) soit compact, on obtient ainsi des feuilletages totalement géodésiques de  $M$ .

Les feuilletages linéaires du tore  $T^n$  sont obtenus ainsi.

Nous allons, ici, nous intéresser à la première question. Nous utiliserons, dans cette étude, le théorème d'ASIMOV extrinsèque [1].

**THÉORÈME 1.** — Soit  $W^{n+1}$  une variété riemannienne orientable fermée de courbure sectionnelle constante  $c$  munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  transversalement orienté de codimension 1. On a :

— si l'un des deux nombres  $n$  ou  $i$  est impair :

$$\int_W \sigma_i = 0;$$

— si les deux nombres  $n$  et  $i$  sont pairs :

$$\int_W \sigma_i = \text{vol}(W) \cdot c^{i/2} \binom{n/2}{i/2}.$$

Soient  $\theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{n+1}$  les formes duales associées à un repère orthonormé adapté :  $X_1 \dots X_n$  tangent aux feuilles de  $\mathcal{F}$ ,  $N$  normal à ces feuilles.

Le théorème 1 peut être démontré à partir d'un théorème combinatoire, démontré par F. BRITO, H. ROSENBERG et l'auteur dans [3] et [4].

**THÉORÈME 2.** — Il existe des formes  $\eta_i$  vérifiant

$$\eta_i \wedge \theta^{n+1} = \sigma_i \cdot \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \wedge \theta^{n+1},$$

$$\eta_{n+1} = 0, \quad \eta_0 = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n,$$

et telles que

si  $i$  est impair, on ait

$$\eta_i \wedge \theta^{n+1} = d[\sum_j a_{ij} \eta_j]$$

et si  $i$  est pair, on ait

$$\eta_i \wedge \theta^{n+1} - c^{i/2} \frac{n(n-2) \dots (n-i+2)}{2.4 \dots i} (\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^{n+1}) = d[\sum_j a_{ij} \eta_j],$$

où les  $a_{ij}$  sont des constantes.

La démonstration du théorème 2 permet, en fournissant un moyen de calculer les coefficients  $a_{ij}$ , d'énoncer une version à bord du théorème 1.

THÉORÈME 1'. — Si  $R$  est une région de  $W^{n+1}$  de bord fermé  $\partial R$ , on a :

$$\int_R \sigma_n = \text{vol } W \cdot c^{n/2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{\partial R} [\eta_{n-1} + cL(\sum_{i < n-2} \eta_i)],$$

où  $L$  est une forme linéaire que le lecteur courageux pourrait expliciter.

COROLLAIRE 1. — Si  $W^{n+1}$  est plate et  $R$  une région de  $W^{n+1}$  de bord fermé  $\partial R$ , on a

$$\int_R \sigma_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{\partial R} \eta_{n-1}.$$

Le théorème 1' permet de donner tous les feuilletages tendus du tore  $T^2$ .

THÉORÈME 3. — Les feuilletages 1-tendus du tore  $T^2$  sont :

1° les feuilletages linéaires;

2° les feuilletages obtenus à partir d'un feuilletage linéaire dont les feuilles sont de pente rationnelle en ajoutant des composantes de Reeb à l'intérieur desquelles le signe de la courbure géodésique est constant.

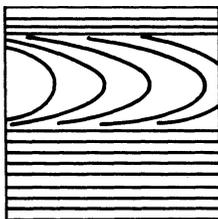


Fig. 1. — Composante de Reeb (1, 0) tendue.

Démonstration. — Le corollaire 1 permet d'écrire, pour chaque composante de Reeb, l'inégalité

$$\int_R |\sigma_1| \geq \left| \int_R \sigma_1 \right| = \int_{\partial R} \eta_0 = \text{longueur } (\partial R),$$

puisque le bord  $\partial R$  est réunion de deux feuilles de  $\mathcal{F}$  d'orientation transverse opposées.

Chaque courbe de  $\partial R$  est homotope à une droite de vecteur directeur  $p, q$ , qui, géodésique, a la longueur minimale  $\sqrt{p^2 + q^2}$ ; on a donc

$$\int_R |\sigma_1| \geq 2\sqrt{p^2 + q^2}.$$

Ce minimum est atteint par les feuilletages décrits dans le théorème 3.

**THÉORÈME 4.** — Soit  $A$  l'anneau délimité par deux courbes convexes  $C_1 \supset C_2$  de longueur  $l_1$  et  $l_2$ . Les feuilles des feuilletages tendus de  $A$  sont soit des courbes fermées convexes homotopes à  $C_1$  (et  $C_2$ ), soit des spirales localement convexes, les deux types de feuille pouvant exister simultanément.

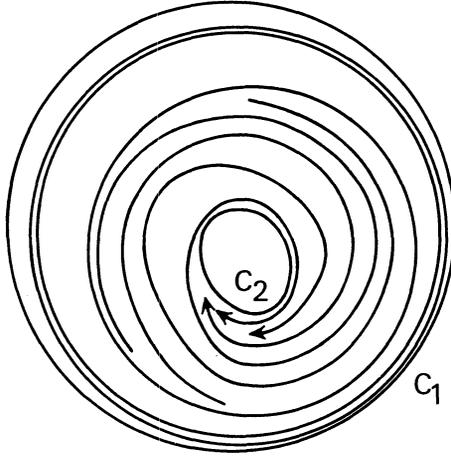


Fig. 2

La courbure totale vaut, dans ce cas,

$$\int_A |\sigma_1| = l_1 - l_2,$$

ce qui démontre que l'on doit avoir  $l_1 > l_2$ .

*Démonstration.* — Encore une fois, le corollaire 1 permet d'écrire l'inégalité

$$\int_A |\sigma_1| \geq \int_{\partial A} \sigma_1 = l_1 \pm l_2 \geq l_1 - l_2.$$

Ce minimum absolu est atteint pour les feuilletages décrits dans le théorème.

Il reste à montrer qu'il n'existe pas d'autres classes d'isotopie admettant des représentants tendus.

Écrivons le corollaire 1 pour un feuilletage de  $A$  contenant une composante de Reeb  $R$  :

$$\begin{aligned} \int |\sigma_1| &\geq \left| \int_{A-R} \sigma_1 \right| + \left| \int_R \sigma_1 \right| = l_1 - l'_1 + l'_1 + l'_2 \\ &\geq l_1 - l'_1 + l'_2 - l_2 + l'_1 + l'_2 = l_1 - l_2 + 2l'_2 \\ &\geq l_1 + l_2. \end{aligned}$$

Cependant, la feuille générique de la composante de Reeb  $R$  ne peut avoir une courbure géodésique constante puisque les seules courbes de  $A$  ayant cette propriété sont les spirales localement convexes et les courbes fermées convexes. Donc, on a, pour tout feuilletage contenant au moins une composante de Reeb

$$\int |\sigma_1| > l_1 - l_2 + 2l'_2 > l_1 + l_2.$$

Enfin, en considérant des composantes de Reeb très étroites tendant vers la courbe intérieure  $C_2$ , on peut approcher ce minimum  $l_1 + l_2$ .

**THÉORÈME 5.** — *La sphère  $S^3$  n'admet pas de feuilletage absolument tendu.*

Avant de démontrer le théorème 5, nous allons donner une démonstration géométrique du théorème d'Asimov extrinsèque pour  $S^3$ .

Chaque grande sphère  $S^2$  de  $S^3$  est la trace d'un hyperplan de  $\mathbf{R}^4$ . L'espace des grandes sphères de  $S^3$  est donc l'espace projectif  $\mathbf{P}_3^*(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ .

Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 définit donc une application de Gauss :  
 $\gamma_{\mathcal{F}} : S^3 \rightarrow \mathbf{P}_3^*$ ,  
 $x \mapsto$  grande sphère tangente en  $x$  à la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $x$ .

**LEMME 1.** — *La courbure extrinsèque  $\sigma_2(x)$  de la feuille passant par  $x$  est égale au jacobien en  $x$  de l'application  $\gamma_{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{P}$  un pinceau de Lefschetz, c'est-à-dire une famille linéaire de grandes sphères. Génériquement, l'ensemble des points où une sphère du pinceau est tangente à une feuille est un graphe, réunion finie de courbes de classe  $C^1$ , que nous noterons  $\Gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{F}}$ .

Remarquons que l'application  $\gamma_{\mathcal{F}}$  peut aussi être vue comme :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{F}} : S^3 &\rightarrow \mathbf{P}_3 \\ x &\rightarrow \text{droite de } \mathbf{R}^4 \text{ tangente à } S^3 \text{ et normale à la} \\ &\quad \text{feuille de } \mathcal{F} \text{ passant par } x. \end{aligned}$$

Décomposons l'espace tangent à  $S^3$  en  $x$  en

$$T_x S^3 = T_x L_x \oplus T_x \Gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{F}},$$

où  $L_x$  est la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $x$ , et  $\mathcal{P}$  le pinceau de Lefschetz des grandes sphères normales au grand cercle normal en  $x$  à  $L_x$ . Pour presque tout  $x$ ,  $\Gamma_{\mathcal{P}, \mathcal{F}}$  est transverse à  $L_x$  en  $x$ .

Nous avons vu que  $\sigma_2(x)$  est le déterminant de l'application

$$A(x) : T_x L_x \mapsto T_x L_x,$$

$$X \mapsto \nabla_X N = p_x \bar{\nabla}_X N,$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ ,  $p_x$  la projection orthogonale sur  $T_x L_x$ , et  $\bar{\nabla}$  la connexion plate de  $\mathbf{R}^4$ .

Soit  $\theta$  l'angle  $(\Gamma_{\varphi, \mathcal{F}}, T_x L_x)$ . On a

$$\text{jac}_x \gamma_{\mathcal{F}} = \frac{\det \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ ** & \cos \theta \end{pmatrix}}{(\cos \theta)} = \sigma_2.$$

Il est facile de voir qu'en un point critique de  $\gamma_{\mathcal{F}}$  la courbure  $\sigma_2(x)$  est nulle.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  découpe sur toute grande sphère  $\Sigma$  un feuilletage avec singularité. Notons  $\mu(\Sigma)$  la somme des indices de ces points singuliers et  $|\mu|(\Sigma)$  le nombre de ces points singuliers.

Pour presque toute grande sphère, ces deux nombres sont définis et finis.

Si  $R$  est une région de  $S^3$ , notons  $\mu(\Sigma, R)$  (resp.  $|\mu|(\Sigma, R)$ ) les nombres correspondant à des points singuliers contenus dans  $\Sigma \cap R$ .

THÉORÈME 6 :

$$\int_{S^3} \sigma_2 = \int_{\mathbf{P}_3} \mu(\Sigma),$$

$$\int_{S^3} |\sigma_2| = \int_{\mathbf{P}_3} |\mu|(\Sigma).$$

*Démonstration.* — Soit  $U_i$  un ouvert tel que la restriction de  $\gamma_{\mathcal{F}}$  à  $U_i$  soit un difféomorphisme.

Du lemme 1, on déduit :

$$\int_{U_i} |\sigma_2| = \text{mesure } \gamma_{\mathcal{F}}(U_i) = \int_{\mathbf{P}_3} |\mu|(\Sigma, U_i)$$

et

$$\int_{U_i} \sigma_2 = \pm \text{mesure } \gamma_{\mathcal{F}}(U_i) = \int_{\mathbf{P}_3} \mu(\Sigma, U_i).$$

D'autre part, on a, si  $U_i$  et  $U_j$  sont deux ouverts disjoints,

$$\begin{aligned}\mu(\Sigma, U_i \cup U_j) &= \mu(\Sigma, U_i) + \mu(\Sigma, U_j), \\ |\mu|(\Sigma, U_i \cup U_j) &= |\mu|(\Sigma, U_i) + |\mu|(\Sigma, U_j),\end{aligned}$$

Soit  $C$  l'ensemble des valeurs critiques de  $\gamma_{\mathcal{F}}$ . La sphère  $S^3$  est réunion disjointe d'un ensemble où  $\sigma_2$  est nul, d'un ensemble de mesure nulle  $[\gamma_{\mathcal{F}}^{-1} C - (\sigma_2 = 0)]$  et d'un nombre dénombrable d'ouverts  $U_i$  tel que la restriction de  $\gamma_{\mathcal{F}}$  à chaque  $U_i$  soit un difféomorphisme.

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{S^3} \sigma_2 &= \int_{\cup U_i} \sigma_2 = \sum_i \int_{U_i} \mu(\Sigma, U_i) = \int_{\mathbf{P}_3} \mu(\Sigma), \\ \int_{S^3} |\sigma_2| &= \int_{\cup U_i} |\sigma_2| = \sum_i \int_{U_i} |\mu|(\Sigma, U_i) = \int_{\mathbf{P}_3} |\mu|(\Sigma).\end{aligned}$$

*Remarque.* — Le même théorème est vrai pour  $S^{2n+1}$  et  $\sigma_{2n}$ .

Le nombre  $\mu(\Sigma)$  vaut 2 partout où il est défini. On a donc :

$$\int_{S^3} |\sigma_2| \geq \left| \int_{S^3} \sigma_2 \right| = 2 \operatorname{vol}(\mathbf{P}_3) = \operatorname{vol}(S^3).$$

*Remarque.* — L'égalité  $\int_{S^3} \sigma_2 = \operatorname{vol} S^3$  est le théorème d'Asimov extrinsèque.

Le théorème de Novikov implique que tout feuilletage de  $S^3$  admet une composante de Reeb, donc une feuille torique  $T$ . Soit  $K(x)$  la courbure gaussienne de  $T$  en un point  $x$ . On a :

$$\begin{aligned}\int_T K(x) &= 0, \\ K(x) &= \sigma_2(x) + 1.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un point de  $T$  où l'on a  $\sigma_2(x) < 0$  et donc, par continuité, un ouvert de  $S^3$  où l'on a  $\sigma_2 < 0$ .

On a donc :

$$\int_{S^3} |\sigma_2| > \int_{S^3} \sigma_2 = \operatorname{vol}(S^3).$$

Il reste à construire une suite de feuilletages  $\mathcal{F}_n$  tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^3} |\sigma_2(\mathcal{F}_n)| = \text{vol}(S^3).$$

Partons pour cela d'un pinceau de Lefschetz qui définit un feuilletage géodésique de  $S^3 - G$ , où  $G$  est le grand cercle intersection des sphères du pinceau.

Considérons le voisinage tubulaire  $R_2$  de rayon  $2r$  de  $G$ . Il est l'image d'un tore plein plat  $R_2$  de rayon  $2r$  par un difféomorphisme  $\varphi$ . Mettons à l'intérieur du tore plein plat  $R_1$  de rayon  $r$  une composante de Reeb tendue (où toutes les feuilles intérieures sont de courbure positive), telle que la courbure moyenne des feuilles soit majorée par  $10/r$  par exemple. On obtiendra un tel exemple en modifiant légèrement le « presque feuilletage » de  $S^1 \times I$  par des demi-cercles en un feuilletage puis par révolution autour de l'axe de  $R$ .

Le calcul fait dans [3] montre alors que la courbure des images des feuilles de  $R$  par  $\varphi$  vérifie

$$|\sigma_2[\varphi(x)] - \sigma_2(x)| \leq Ar + B,$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $\varphi$ .

On a donc :

$$\int_{S^3 - \varphi(R_2)} |\sigma_2| = 0,$$

$$\int_{\varphi(R_2)} |\sigma_2| \leq \int_{(R_2)} |\sigma_2| + (Ar + B) \text{vol}(R).$$

Dans l'anneau compris entre le tore de rayon  $2r$  et celui de rayon  $r$ , mettons le feuilletage produit par  $S^1$  du feuilletage de l'anneau plan par des spirales de la figure 3.

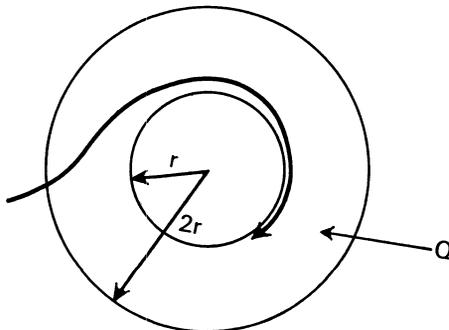


Fig. 3

Le feuilletage de la figure 3 est construit de sorte que la courbure des feuilles soit majorée par  $10/r$  et que les feuilles fassent avec le bord extérieur le même angle que les traces des plans de bout image des sphères du pinceau par  $\varphi^{-1}$  (cf. fig. 4). Les feuilles de  $Q \times S^1$  sont donc de courbure extrinsèque  $\sigma_2$  nulle, et telles que toute section normale est de courbure majorée par  $10/r$ .

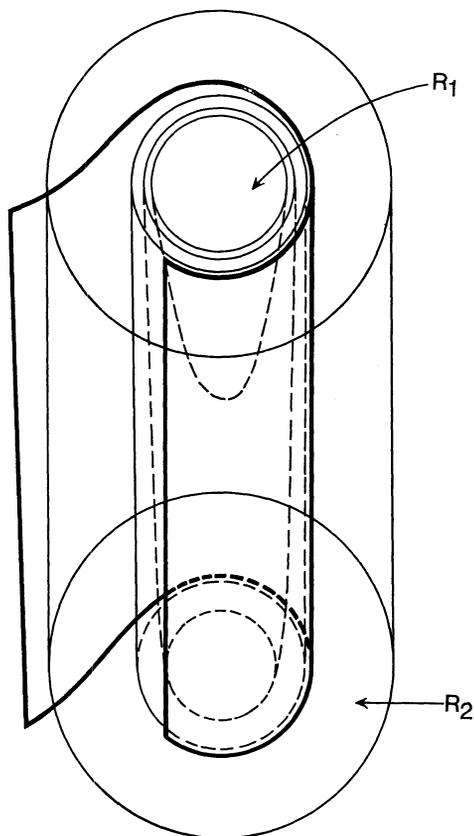


Fig. 4

On a

$$\int_{R_2} |\sigma_2| = \int_{R_2 - R_1} |\sigma_2| + \int_{R_1} |\sigma_2|.$$

Mais le corollaire 2 permet de calculer

$$\int_{R_1} |\sigma_2| = \int_{R_1} \sigma_2 = \left| \frac{1}{2} \int_{\partial R_1} \sigma_1 \right| = \frac{1}{2} \left[ 2\pi r \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{r} \right] = 2\pi^2.$$

Comme on a  $\int_{R_2 - R_1} |\sigma_2| = 0$ , on en déduit les inégalités

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(R_2)} |\sigma_2| &\leq 2\pi^2 + M_1 r \operatorname{vol} \varphi(R_2). \\ &\leq 2\pi^2 + M_2 r, \end{aligned}$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des constantes ne dépendant que de  $\varphi$ .

Le feuilletage de  $\varphi(R_2)$  obtenu se raccorde avec le feuilletage de  $S^3 - \varphi(R_2)$  par les sphères du pinceau; en résumé, on a

$$\int_{S^3} |\sigma_2| \leq 2\pi^2 + M_1 r.$$

Il suffit de faire tendre  $r$  vers zéro pour achever la démonstration du théorème 5.

Il serait intéressant de déterminer les conditions nécessaires et ou suffisantes pour qu'une variété riemannienne admette un feuilletage absolument tendu.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASIMOV (D.). — Average gaussian curvature of leaves of foliations, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 84, 1978, p. 131-133.
- [2] BANCHOFF (T. F.). — Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds, *Amer. J. Math.*, t. 87, 1965, p. 462-472.
- [3] BRITO (F.), LANGEVIN (R.) et ROSENBERG (H.). — Intégrales de courbure sur une variété feuilletée, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 285, 1977, série A, p. 533-536.
- [4] BRITO (F.), LANGEVIN (R.) et ROSENBERG (H.). — Intégrales de courbure sur une variété feuilletée (à paraître).
- [5] CHERN (S. S.) and LASHOF (R. K.). — On the total curvature of immersed manifolds, *Amer. J. Math.*, t. 79, 1957, p. 306-318.
- [6] KUIPER (N. H.). — Minimal total absolute curvature for immersions, *Inventiones Math.*, Berlin, t. 10, 1970, p. 209-238.
- [7] RUMMLER (H.). — *Feuilletages compacts et métriques riemanniennes*, Preprint I.H.E.S., novembre 1977.
- [8] SULLIVAN (D.). — *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Preprint I.H.E.S., janvier 1978.