BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 113-151

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__113_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 113-151.

FORMES QUADRATIQUES MULTIPLICATIVES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

PAR

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE
[Université Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit Φ une k-forme quadratique multiplicative (au sens de PFISTER). A tout k-schéma intègre X, on associe des groupes $D^{\Phi}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ dont les bonnes propriétés fonctorielles permettent, dans le cas où k est le corps $\mathbf{R}$ des réels,

(*a*) d'obtenir une généralisation aux $\mathbf{R}$-variétés projectives et lisses de dimension quelconque d'un théorème de Geyer sur le nombre de composantes connexes des courbes réelles,

(*b*) de montrer que, sur de telles variétés, deux points réels rationnellement équivalents sont dans la même composante connexe,

(*c*) d'établir de façon algébrique que certaines de ces variétés ne sont pas $\mathbf{R}$-rationnelles.

Introduction

Cet article a été motivé par l'article de GEYER [G 1] sur les composantes connexes des courbes algébriques réelles et par les travaux de SANSUC et de l'auteur ([CS 1 à 4]) sur les variétés rationnelles, prolongeant ceux de MANIN [M].

Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit Φ une forme quadratique définie sur k, non singulière et multiplicative (*cf.* [L], chap. 10, § 2); seules les formes anisotropes auront un intérêt ici. Etant donné K/k une extension de corps, on note $D_K(\Phi)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif K^* formé des éléments représentés par Φ sur K. Rappelons le théorème de PFISTER : sur tout corps, pour tout entier $n \geqslant 1$, la forme quadratique $\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} x_i^2$ est multiplicative [P 1].

Etant donné X un k-schéma intègre, on note $k(X)$ son corps des fractions. On appelle ici k-variété un k-schéma séparé de type fini géométriquement intègre.

Pour des raisons que je préfère détailler dans le dernier paragraphe, pour ne pas alourdir cette introduction de rappels, il est naturel d'associer à tout k-schéma intègre X les groupes suivants :

$L^{\Phi}(X)$ est le sous-groupe de $k(X)^*$ formé des fonctions rationnelles $f \in k(X)^*$ telles qu'en tout point P du schéma X, il existe $u \in k(X)^*$ inversible en P, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$, tels que $f = u.g$.

$\tilde{L}^{\Phi}(X)$ est le sous-groupe de $k(X)^*$ formé des fonctions rationnelles $f \in k(X)^*$ telles que, pour tout ensemble fini de points $\{P_1, \ldots, P_m\}$ de X inclus dans un ouvert affine, il existe u dans $k(X)^*$ inversible en chacun des P_i $(i = 1, \ldots, m)$, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$, tels que $f = u.g$.

On a clairement $D_{k(X)}(\Phi) \subset \tilde{L}^{\Phi}(X) \subset L^{\Phi}(X)$. On définit

$$D^{\Phi}(X) = L^{\Phi}(X)/D_{k(X)}(\Phi) \qquad \text{et} \qquad \tilde{D}^{\Phi}(X) = \tilde{L}^{\Phi}(X)/D_{k(X)}(\Phi).$$

Le but du paragraphe 1 est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Soit X une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse de dimension n, et soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ pour la topologie réelle. Les groupes $D^{\varphi^n}(X)$ et $\tilde{D}^{\varphi_n}(X)$ coïncident, et il existe un isomorphisme naturel*

$$D^{\varphi_n}(X) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^s.$$

En dimension 1, cet énoncé permet de retrouver un résultat de GEYER [G 1] (*voir* § 6). Les instruments de la démonstration sont la théorie d'E. ARTIN [A], celle de PFISTER [P 2], et le théorème de Stone-Weierstrass. L'idée d'employer ce dernier est déjà mentionnée par GEYER [G 1], qui ne l'utilisait pas, car il pouvait (étant en dimension 1) suivre WITT [W].

Au paragraphe 2, on établit la fonctorialité contravariante, sur les k-schémas réguliers intègres, des groupes $D^{\Phi}(X)$ et (avec une légère restriction) des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. L'outil est le corollaire 2.1.1, qui généralise plusieurs résultats classiques sur les formes quadratiques, et qui a été établi par une méthode un peu différente par M. KNEBUSCH [K 1].

Au paragraphe 3, on établit la fonctorialité covariante (par k-morphismes finis localement libres), sur les k-schémas intègres, des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. Le « principe de la norme de Knebusch-Scharlau » ([L], chap. 7, § 4-5) est ici fondamental. Il permet également, pour X une k-variété régulière, de définir un accouplement bilinéaire :

$$Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(k)$$

(où $Z_0(X)$ est le groupe des zéro-cyles sur X, et $\tilde{D}^{\Phi}(k) = \tilde{D}^{\Phi}(\operatorname{Spec} k)$). On étudie les valeurs prises par cet accouplement quand le zéro-cycle varie dans une famille algébrique.

Au paragraphe 4, on montre, par des arguments élémentaires, et bien connus, que les homomorphismes (obtenus à partir du morphisme structural par fonctorialité contravariante)

$$D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1) \qquad \text{et} \qquad D^{\Phi}(k) = \tilde{D}^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$$

sont des isomorphismes, et, plus généralement, que $D^{\Phi}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ sont des invariants « homotopiques » des k-schémas intègres. En conjugant ce résultat avec ceux des paragraphes précédents, on montre que, pour X une k-variété projective et lisse, l'accouplement défini ci-dessus passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle, et l'on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME B. — *Soit X une* $\mathbf{R}$*-variété projective et lisse. Si deux points de $X(\mathbf{R})$ définissent des zéro-cycles rationnellement équivalents, ils sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$.*

On utilise ces résultats au paragraphe 5 pour montrer de façon purement algébrique que la $\mathbf{R}$-variété, décrite dans [CS 2] (§ 5), n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle.

Au paragraphe 6, on montre comment, en dimension 1, le théorème A redonne certains résultats de GEYER [G 1]. On fait par ailleurs le lien entre les groupes $D^{\Phi}(X)$, $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ et certains groupes introduits dans [CS 1]; on compare leurs propriétés, ce qui amène à poser quelques questions.

Le plan de l'article est le suivant :

1. *Composantes connexes réelles.*
2. *Fonctorialité contravariante.*
3. *Fonctorialité covariante; accouplement avec les zéro-cycles.*
4. *Invariance homotopique; application à l'équivalence rationnelle.*
5. *Un exemple.*
6. *Passé et avenir.*

Je remercie J.-J. SANSUC pour de nombreuses discussions pendant la préparation de ce travail, et L. MORET-BAILLY pour ses remarques lors d'un séminaire sur ces questions.

Par rapport à la version initialement soumise à publication (mai 1977), l'article a été remanié essentiellement sur les points suivants : l'introduction des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, la fonctorialité covariante, l'application à l'équivalence rationnelle et le théorème B sont nouveaux; on a ajouté quelques remarques motivées par le travail de KNEBUSCH [K 3].

Définition. — Etant donnés X un k-schéma intègre, et $f \in L^{\Phi}(X)$ (resp. $\tilde{L}^{\Phi}(X)$), P un point de X (resp. $\{P_1, \ldots, P_m\}$ un ensemble fini de points de X inclus dans un ouvert affine), une égalité $f = u.g$, avec $g \in D_{k(X)}(\Phi)$ et $u \in k(X)^*$ inversible en P (resp. inversible en chaque P_i $(i = 1, \ldots, m)$), sera appelée une *écriture locale* de f en P (resp. en $\{P_1, \ldots, P_m\}$).

1. Composantes connexes réelles

Commençons par des rappels de résultats fondamentaux.

R.1 ([A], Satz 10, et [AS]). — *Soit X une* $\mathbf{R}$-*variété. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un ouvert de Zariski non vide Ω de X avec $\Omega(\mathbf{R}) = \emptyset$;*

(ii) $\mathbf{R}(X)$ *n'est pas formellement réel;*

(iii) *tout élément de $\mathbf{R}(X)$ est somme de carrés.*

R.2 ([A] Satz 11). — *Soit X une* $\mathbf{R}$-*variété, $f \in \mathbf{R}(X)^*$, et X_f l'ouvert où f est inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $\Omega \subset X_f$ un ouvert de Zariski non vide tel que f prenne seulement des valeurs positives sur $\Omega(\mathbf{R})$;*

(ii) *f est une somme de carrés dans* $\mathbf{R}(X)$.

On note $Q(X)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}(X)^*$ formé des sommes de carrés. Les fonctions satisfaisant la condition (i) sont appelées définies positives. Elles forment évidemment un sous-groupe de $\mathbf{R}(X)^*$, lequel, par le théorème ci-dessus, coïncide avec $Q(X)$.

R.3 (PFISTER et TSEN-LANG, *cf.* [L], chap. 11, th. 1.8). — *Soit X une* $\mathbf{R}$-*variété de dimension n. Toute somme de carrés dans* $\mathbf{R}(X)$ *est somme de 2^n carrés.*

Dans tout ce paragraphe, on se donne une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse X de dimension n. On pose

$$L(X) = L^{\varphi_n}(X),\ \tilde{L}(X) = \tilde{L}^{\varphi_n}(X),\ D(X) = D^{\varphi_n}(X),\ \tilde{D}(X) = \tilde{D}^{\varphi_n}(X).$$

Le théorème **R.3** nous permet d'identifier $D_{\mathbf{R}(X)}(\varphi_n)$ à $Q(X)$.

Démonstration du théorème A

1.1. En utilisant **R.1** et **R.3**, on voit que le théorème A est clair dans le cas où $s = 0$, tous les groupes étant triviaux. Dans la suite, on se place dans le cas $s > 0$. Comme la variété de l'énoncé est *lisse*, ceci est équivalent à la condition : pour tout Ω ouvert de Zariski de X non vide, $\Omega(\mathbf{R})$ est non vide.

1.2. LEMME. — *Soit $f \in L(X)$ et $P \in X(\mathbf{R})$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en P. Le signe de $u(P) \in \mathbf{R}^*$ ne dépend pas du choix de l'écriture locale.*

Démonstration. — En prenant deux écritures locales pour f, on voit qu'il faut montrer que si un élément w de $\mathcal{O}^*_{X,P}$ appartient à $Q(X)$, alors $w(P)$ est positif. Soit donc

$$w = \sum_{i=1}^{t} h_i^2 \qquad \text{avec} \quad h_i \in \mathbf{R}(X)^*.$$

Comme X est lisse, le point P est limite sur la variété C^∞ réelle $X(\mathbf{R})$ de points P_j n'appartenant pas aux diviseurs des h_i $(i = 1, \ldots, t)$. Ainsi $w(P) = \lim w(P_j) \geqq 0$, et, comme $w(P)$ est non nul, il est strictement positif.

Remarque. — En utilisant la régularité de l'anneau $\mathcal{O}_{X,P}$ et la proposition 2.1, on peut donner une démonstration purement algébrique de ce lemme.

1.3. Soit $\mu_2 \subset \mathbf{R}^*$ le groupe (± 1). Le lemme 1.2 permet de définir un homomorphisme de $L(X)$ dans le groupe $\mathrm{Appl}(X(\mathbf{R}), \mu_2)$ des applications de $X(\mathbf{R})$ dans μ_2. On définit cet homomorphisme ainsi : soit $f \in L(X)$, et soit $P \in X(\mathbf{R})$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en P. On définit $\langle f, P \rangle =$ signe de $u(P)$. L'application

$$\rho : \quad L(X) \to \mathrm{Appl}(X(\mathbf{R}), \mu_2), \qquad f \mapsto (P \mapsto \langle f, P \rangle)$$

est clairement un homomorphisme. Soit I l'ensemble (fini) des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ pour la topologie réelle. Je dis que l'application ρ définit un *homomorphisme naturel* :

$$\sigma : \quad D(X) = L(X)/Q(X) \to \mathrm{Appl}(I, \mu_2).$$

Il suffit pour cela de voir :

1.3.1. Si f est dans $Q(X)$, pour tout P dans $X(\mathbf{R})$, on a $\langle f, P \rangle = 1$. Ceci résulte simplement du fait que, pour f dans $Q(X)$, l'égalité $f = 1.f$ est une écriture locale de $f \in L(X)$ en tout point de X.

1.3.2. Pour f dans $L(X)$, l'application de $X(\mathbf{R})$ dans μ_2 définie par $P \mapsto \langle f, P \rangle$ est localement constante.

Si P est un point de $X(\mathbf{R})$, et si $f = u.g$ est une écriture locale de f en P, c'est une écriture locale de f en tout point de l'ouvert où u est inversible, soit Ω. Comme l'application

$$\Omega(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*,$$
$$Q \to u(Q)$$

est continue pour la topologie réelle, pour tout point Q dans un voisinage réel de P, $u(Q)$ a le signe de $u(P)$.

1.4. L'HOMOMORPHISME σ EST INJECTIF. — Pour f dans $L(X)$, l'égalité $f = f.1$ est une écriture locale en tout point de X_f. Si donc f a pour image par ρ l'application constante de valeur 1, sur $X_f(\mathbf{R})$, f est positive, et donc d'après **R.2** appartient à $Q(X)$.

1.5. LEMME. — *Soit* $\varepsilon \in \operatorname{Appl}(I, \mu_2)$, *et soit* $\{P_1, \ldots, P_m\}$ *un ensemble fini de points de* X. *Il existe alors* $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ *tel que :*

(i) *le support du diviseur de* ξ *n'a pas de points réels;*

(ii) ξ *est inversible en chacun des* P_i $(i = 1, \ldots, m)$;

(iii) *pour tout* M *dans* $X(\mathbf{R})$, *on a* $\varepsilon(i(M))\,\xi(M) > 0$, *où l'on note* $M \mapsto i(M)$ *l'application naturelle de* $X(\mathbf{R})$ *dans* I.

(Ce lemme reprend un argument de GEYER ([G 1], p. 96).)

Démonstration. — Quitte à spécialiser les points P_i, on peut supposer que ce sont des points fermés. Soit $X \subsetneq \mathbf{P}^r_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées homogènes $(T_0, \ldots, T_r)$ un $\mathbf{R}$-plongement projectif de X. Choisissons des réels strictement positifs α_j $(j = 0, \ldots, r)$ tels que, pour tout i $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum \alpha_j T_j^2$ soit non nul en P_i. Soit $X \subsetneq \mathbf{P}^N_{\mathbf{R}} \left(\text{avec } N = \binom{r+2}{2} - 1\right)$ le plongement de Veronèse donné par les $Y_{jk} = T_j T_k$, et soit H l'hyperplan de $\mathbf{P}^N_{\mathbf{R}}$ défini par $\sum_j \alpha_j Y_{jj}$. Soit $\mathbf{A}^N$ l'ouvert complémentaire de cet hyperplan, et soit Y la sous-variété fermée de $\mathbf{A}^N$ définie par $X \cap \mathbf{A}^N$. Le choix des α_j implique que tous les points P_i sont dans Y, et que $Y(\mathbf{R})$ coïncide avec l'espace topologique compact $X(\mathbf{R})$. On dispose d'un homomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$\theta : \quad \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N] \to \mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$$

induit par $Y \subsetneq \mathbf{A}^N$, où l'on note $\mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ les applications continues de $Y(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$. L'image de θ est une algèbre qui contient les constantes et sépare les points : il est clair, en effet, que $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ sépare les points de $\mathbf{R}^N$. Comme $Y(\mathbf{R})$ est compact, on est dans les conditions d'application du théorème de Stone-Weierstrass (BOURBAKI [B 1], chap. 10, § 4, n° 2). La fonction

$$\begin{gathered} X(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, \\ M \mapsto \varepsilon(i(M)) \end{gathered}$$

est continue. Comme l'image de θ est dense dans $\mathscr{C}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{R})$, on peut trouver $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ tel que l'on ait

$$\forall M \in X(\mathbf{R}), \quad |P(M) - \varepsilon(i(M))| < 1/4.$$

De plus, quitte à ajouter à P une constante réelle de valeur absolue plus petite que 1/4, on obtient $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_N]$ tel que $P(P_i) \neq 0$ pour tout i, et,

$$\forall M \in X(\mathbf{R}), \quad |P(M) - \varepsilon(i(M))| < 1/2.$$

La fonction rationnelle $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$, définie comme l'image de $P \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dans $\mathbf{R}(Y) = \mathbf{R}(X)$, satisfait à toutes les conditions de l'énoncé : tout point du support du diviseur de ξ est, soit un point de $X \cap H$ qui n'a pas de points réels, les α_j ayant été choisis tous strictement positifs, soit un point de Y où P s'annule, et ce ne peut être non plus un point réel, car l'inégalité ci-dessus implique que P ne s'annule pas sur $Y(\mathbf{R})$. Elle implique également la partie (iii) de l'énoncé, et la partie (ii) résulte de $P(P_i) \neq 0$ pour tout i.

1.6. On dit que $f \in \mathbf{R}(X)^*$ est *définie* si l'application de $X_f(\mathbf{R})$ dans μ_2 définie par $P \mapsto$ (signe de $f(P)$) est constante sur les fibres de l'application composée :

$$X_f(\mathbf{R}) \hookrightarrow X(\mathbf{R}) \xrightarrow{i} I.$$

(Notons que dans cette définition, on peut remplacer X_f par un ouvert de Zariski non vide quelconque inclus dans X_f. Cela résulte de ce que, X étant lisse, pour tout ouvert de Zariski non vide Ω, les points de $\Omega(\mathbf{R})$ sont denses dans chaque composante connexe de $X(\mathbf{R})$.)

Les fonctions définies forment un sous-groupe de $\mathbf{R}(X)^*$.

1.6.1. PROPOSITION. — *Les groupes $L(X)$ et $\tilde{L}(X)$ coïncident avec le groupe des fonctions définies.*

Démonstration. — Par définition, $\tilde{L}(X)$ est inclus dans $L(X)$. Le fait que toute fonction de $L(X)$ est définie résulte de 1.3.2, par le même argument que celui utilisé en 1.4 : sur X_f, $f = f.1$ est une écriture locale de f en tout point. Il suffit donc de montrer que toute fonction définie est dans $\tilde{L}(X)$.

Soit $f \in \mathbf{R}(X)^*$ une fonction définie, et soit $\{P_1, \ldots, P_m\}$ un ensemble fini de points de X. Comme f est définie, on peut définir $\varepsilon \in \text{Appl}(I, \mu_2)$ comme l'application qui satisfait :

$$\forall P \in X_f(\mathbf{R}), \quad \text{signe de } f(P) = \varepsilon(i(P)).$$

(Par la même remarque que ci-dessus, ε est uniquement définie : l'application composée $X_f(\mathbf{R}) \hookrightarrow X(\mathbf{R}) \to I$ est surjective.)

Soit alors $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ associé à ε et à $\{P_1, \ldots, P_m\}$ comme en 1.5. La fonction $\xi^{-1} f$ est, par 1.5 (iii), définie positive. Ainsi, d'après **R.2**, elle appartient à $Q(X)$, et $f = \xi.(\xi^{-1} f)$ est une écriture locale de f en $\{P_1, \ldots, P_m\}$.

1.7. Fin de la démonstration du théorème A. — Il résulte de 1.6.1. que les groupes $\tilde{D}(X)$ et $D(X)$ coïncident. Montrons que σ est surjectif, ce qui terminera la démonstration. Soit $\varepsilon \in \text{Appl}(I, \mu_2)$. D'après 1.5, il existe $\xi \in \mathbf{R}(X)^*$ avec $X(\mathbf{R}) \subset X_f$ et telle que

$$\forall P \in X(\mathbf{R}), \quad \text{signe de } \xi(P) = \varepsilon(i(P)).$$

Ainsi, ξ est définie; donc, d'après 1.6.1, ξ est dans $L(X)$. Il est clair que l'image de ξ par ρ est $\varepsilon \circ i$, et donc ε est l'image par σ de la classe de ξ dans $D(X)$.

1.8. *Remarque.* — Les parties 1.1 à 1.4 de la démonstration ci-dessus utilisent uniquement le fait que X est une $\mathbf{R}$-variété lisse. Ainsi, pour $X/\mathbf{R}$ une variété lisse quelconque de dimension n, si l'on désigne par s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ (nombre qui est fini, comme l'a montré Whitney), on a une injection :

$$\sigma : \quad D^{\varphi_n}(X) \hookrightarrow (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^s,$$

ce qui implique en particulier que $D^{\varphi_n}(X)$ est un groupe fini.

Dans le cas $n = 1$, Knebusch, reprenant d'autres arguments de Geyer [G 1], a montré que la flèche σ est un isomorphisme : ceci résulte de [K 2] (2.12), modulo une traduction facile (du type de 6.1.1 ci-après). Comme le montre le contre-exemple suivant, ceci ne s'étend pas au cas $n > 1$. Il est cependant vraisemblable que σ soit un isomorphisme pour $X/\mathbf{R}$, *propre* et lisse, quelconque.

1.8.1. *Un contre-exemple.* – Soit $E \subsetneq \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x, y]$ la courbe d'équation :

$$y^2 - x(x-1)(x+1) = 0,$$

et soit X l'ouvert complémentaire de E dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. L'espace topologique $X(\mathbf{R})$ a trois composantes connexes, limitées par les deux branches Γ_1 et Γ_2 de $E(\mathbf{R})$ (voir *fig.* 1). Etant donné un élément f de $L(X)$, il est commode de décrire son image dans Appl (I, μ_2) par un dessin : par exemple, la figure 2 correspond à l'élément $f = y^2 - (x^3 - x)$ de $L(X)$.

ASSERTION. — *La figure* 3 *ne correspond pas à un élément de l'image de* σ.

Démonstration. – Soit $g \in L(X)$ ayant une image par σ représentée par la figure 3. Quitte à multiplier g par une puissance paire de f, ce qui ne change pas la figure associée, on peut supposer que l'on est dans l'un des cas suivants :

1° $\operatorname{div}(g) = D$ avec $\operatorname{supp}(D) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{div}(f))$ fini

2° $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(f) + D$ avec $\operatorname{supp}(D) \cap \operatorname{supp}(\operatorname{div}(f))$ fini,

où la notation $\operatorname{supp}(D)$ indique le support d'un diviseur de Cartier D sur $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

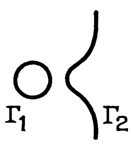

Fig. 1

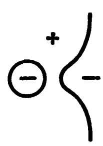

Fig. 2

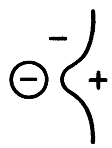

Fig. 3

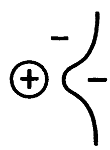

Fig. 4

Dans le premier cas, la fonction g est inversible en tous les points de Γ_2 sauf un nombre fini. Elle ne peut donc pas changer de signe au passage de Γ_2. Dans le second cas, la fonction $(g/f) \in L(X)$ aurait une image par ρ de figure associée, la figure 4, mais comme elle est inversible en tous les points de Γ_1 sauf un nombre fini, elle ne peut pas changer de signe au passage de Γ_1.

2. Fonctorialité contravariante

Dans le cas d'une forme homogène de degré 2, la proposition suivante est voisine du corollaire 2.3 de [K 1].

2.1. PROPOSITION. – *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local régulier, d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *de corps des fractions* K *et de corps résiduel* k. *Soit* Φ *dans*

$A[x_1, \ldots, x_s]$ une forme homogène à coefficients dans A telle que la forme $\tilde{\Phi}$ dans $k[x_1, \ldots, x_s]$ déduite de Φ par l'homomorphisme naturel

$$A \to A/\mathfrak{m},$$
$$x \mapsto \tilde{x}$$

ne représente pas zéro non trivialement sur k. On a :

(i) *Φ ne représente pas zéro sur K.*

(ii) *Si f est dans A^*, et si f est représenté par Φ sur K, alors $\tilde{f} \in k^*$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur k.*

Démonstration. — Si la dimension de A est nulle, les deux assertions sont claires, car alors $A = k$. On va démontrer les deux parties de l'énoncé par récurrence sur la dimension de A. Pour $(A, \mathfrak{m})$ comme dans l'énoncé, avec A de dimension strictement positive, soit $t \in \mathfrak{m}$ un paramètre régulier. Soit $y \mapsto \bar{y}$ le passage au quotient $A \to A/At = B$. L'anneau B est un anneau local régulier de dimension ($\dim A - 1$), d'idéal maximal $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{m}}$, de corps résiduel k. Soit L son corps des fractions. C'est aussi le corps des restes de l'anneau de valuation discrète $A_{(t)}$ (le localisé de A en l'idéal premier $(t) = At$), de corps des fractions K.

Démonstration de (i). — Supposons l'assertion démontrée pour $\dim A < n$, et soit A de dimension n. Soient $(t, B, \mathfrak{n}, L)$ comme ci-dessus. Si Φ représente zéro non trivialement sur K, on peut trouver $(y_1, \ldots, y_s)$ dans $(A_{(t)})^s$ satisfaisant :

$$\Phi(y_1, \ldots, y_s) = 0,$$
$$\inf_j v_t(y_j) = 0,$$

où v_t désigne la valuation de $A_{(t)}$. Par réduction modulo t dans $A_{(t)}$, on obtient une représentation non triviale de zéro par $\bar{\Phi}$ dans L. Mais ceci contredit l'hypothèse de récurrence, qui s'applique à $(B, \mathfrak{n}, \bar{\Phi})$.

Démonstration de (ii). — Supposons l'assertion démontrée pour $\dim A < n$, et soit A de dimension n. Soient $(t, B, \mathfrak{n}, L)$ comme ci-dessus. Par hypothèse, il existe des y_j ($j = 1, \ldots, s$) dans K tels que

$$f = \Phi(y_1, \ldots, y_s).$$

Soit $u = \inf_j v_t(y_j)$, et soient $z_j = t^{-u} y_j \in A_{(t)}$. Notant r le degré de Φ, on a

$$f = t^{ru} \Phi(z_1, \ldots, z_s)$$
$$\inf_j v_t(z_j) = 0.$$

Si la valuation en t de $\Phi(z_1, \ldots, z_s)$, qui est clairement positive ou nulle, n'était pas nulle, par réduction modulo t, on obtiendrait une représentation non triviale de zéro par $\bar{\Phi}$ dans L. Mais ceci contredirait la partie déjà démontrée de la proposition, qui s'applique à $(B, \mathfrak{n}, \bar{\Phi})$. Ainsi cette valuation est nulle. Comme c'est aussi le cas de celle de f, qui est dans A^*, on conclut de l'égalité ci-dessus que u est nul. On a donc :

$$f = \Phi(y_1, \ldots, y_s),$$
$$\inf_j v_t(y_j) = 0.$$

Par passage au corps résiduel de $A_{(t)}$, on obtient, dans L,

$$\bar{f} = \bar{\Phi}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s).$$

Ceci est une représentation de $\bar{f} \in B^*$ dans le corps des fractions de B, qui est de dimension $(n-1)$, par $\bar{\Phi}$. Appliquant à cette situation l'hypothèse de récurrence, qui vaut pour $(\bar{f}, B, \bar{\Phi})$, on obtient que l'image de $\bar{f}$ dans $B/\mathfrak{n} = k$ est représentée par la forme image de $\bar{\Phi}$ par l'application $B \to B/\mathfrak{n}$. Mais le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/A\,t = B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k = A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\sim} & B/\mathfrak{n} \end{array}$$

étant clairement commutatif, ceci dit que $\tilde{f}$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur k.

2.1.1. Corollaire. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, soit Φ une forme quadratique définie sur k non singulière. Soit A un anneau local régulier contenant k, de corps des fractions K, et de corps résiduel $\varkappa$. Si $f \in A^*$ est représenté par Φ dans K, alors l'image $\tilde{f}$ de f dans $\varkappa$ est représentée par Φ sur $\varkappa$.*

Démonstration. — Dans le cas où Φ est anisotrope sur $\varkappa$, c'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1. Si Φ est isotrope sur $\varkappa$, comme $\Phi/\varkappa$ est une forme quadratique non singulière isotrope, elle représente tout élément de $\varkappa$, par un argument bien connu.

Remarques.

2.1.2. Dans le corollaire, on peut remplacer Φ par une forme quadratique définie sur A, non singulière. On obtient alors que $\tilde{f}$ est représenté par $\tilde{\Phi}$ sur $\varkappa$. L'énoncé obtenu, qui généralise un théorème de Cassels-Pfister

([L], chap. IX, 1.5), est en fait un cas particulier d'un résultat de KNEBUSCH sur les formes quadratiques, obtenu avec des méthodes à la Witt. Indiquons brièvement comment l'on peut tirer les résultats ci-dessus de [K 1].

Dans le cas où 2 est dans A^*, le corollaire 2.1.1, sous la forme généralisée indiquée à l'instant et la proposition 2.1 pour Φ forme quadratique, sont des cas particuliers de [K 1] (corollary 2.3 (i)) (on utilise $\tilde{\Phi}$ anisotrope $\Rightarrow$ $\tilde{\Phi}$ non singulière $\Rightarrow$ Φ non singulière; avec les notations de [K 1], on prend $N = (A^s, \Phi)$ et, pour M, le plan hyperbolique, puis l'espace quadratique de dimension 1 défini par f).

Dans le cas où $2 \in \mathfrak{m}$, on peut obtenir 2.1 (ii) pour Φ forme quadratique en utilisant [K 1] (corollary 2.10).

2.1.3. On ne peut pas, dans les hypothèses de 2.1, ou de 2.1.1, remplacer « A régulier » par « A normal ». Je reproduis ici un contre-exemple de [CS 4] : soit $k = \mathbf{R}$, et soit A l'anneau local au point (0, 0, 0) de la $\mathbf{R}$-variété définie dans $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ par l'équation

$$x^2+y^2+z^2 = x^3.$$

Dans le corps des fractions de A (qui est normal, par le critère de Serre), on a l'égalité

$$-1+x = (y/x)^2+(z/x)^2,$$

et le membre de gauche est un élément de A^* qui est représenté par la forme $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2+x_2^2$ dans le corps des fractions de A. Mais sa valeur au point fermé est (-1), qui n'est pas une somme de carrés dans $\mathbf{R}$.

2.1.4. Sous les hypothèses de 2.1, on peut se demander si f est représenté par Φ sur A. On sait peu de choses sur ce genre de problèmes.

2.1.4.1. La réponse est oui si la dimension de A est au plus 1 (cela résulte de la démonstration).

2.1.4.2. Pour $2 \in A^*$, et Φ forme quadratique non singulière de dimension inférieure ou égale à 3, on peut montrer que la réponse est affirmative.

2.1.4.3. C'est également le cas quand on prend pour Φ la forme norme d'une extension finie étale de A, sans même supposer que $\tilde{\Phi}$ ne représente pas zéro (*cf.* [CS 4]).

2.1.4.4. Dans le cas où A est l'anneau local d'un point réel de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$, il résulte d'un théorème de A. PRESTEL qu'un élément f de A^*, qui est somme de carrés dans le corps des fractions de A, est somme de carrés dans A, c'est-à-dire que le 17^e problème de Hilbert, sous la forme locale convenable, a une réponse affirmative (*cf.* [CL], p. 403). Mais on ne sait pas contrôler le nombre de carrés.

2.1.4.5. Dans le cas global, on sait (contre-exemples de HILBERT, MOTZKIN, *cf.* [CL]) qu'il existe des polynomes de $\mathbf{R}[x, y]$ qui sont sommes de carrés dans $\mathbf{R}(x, y)$ sans l'être dans $\mathbf{R}[x, y]$. Signalons par opposition le résultat facile suivant, qui illustre le principe général que les normes ont des propriétés un peu meilleures que les formes quadratiques multiplicatives (*cf.* 6.1, 6.2) :

soit K/k une extension galoisienne finie, et soit $P \in k[x, y]$ représenté par la norme $N_{K/k}$ dans $k(x, y)$. Alors P est représenté par $N_{K/k}$ dans $k[x, y]$.

Conventions. — Jusqu'à la fin du paragraphe 4, on se fixe un corps k de caractéristique différente de 2, une forme quadratique Φ définie sur k, non singulière et multiplicative. On supposera de plus Φ anisotrope sur k; dans le cas isotrope, tous les résultats sont valables, mais tous les groupes considérés sont triviaux. Les notations sont celles de l'introduction. On dira qu'un schéma est *de type semi-local* si tout ensemble fini de points est inclus dans un ouvert affine (exemple : schémas quasi projectifs sur un corps).

2.2. FONCTORIALITÉ CONTRAVARIANTE DES GROUPES $D^{\Phi}(X)$ ET $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. — Le premier cas est facile, et est seulement indiqué pour pouvoir s'y rapporter par la suite.

2.2.1. PROPOSITION. — *Soit $\varphi : X \to Y$ un k-morphisme dominant de k-schémas intègres* (*resp. avec Y de type semi-local*). *Le plongement $k(Y) \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} k(X)$, défini par φ, induit un homomorphisme*

$$\varphi^* : \quad D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$$
$$(\text{resp. } \varphi^* : \quad \tilde{D}^{\Phi}(Y) \to \tilde{D}^{\Phi}(X))$$

et ceci de façon fonctorielle sur la catégorie dont les objets sont les k-schémas intègres (resp. *et de type semi-local*), *et dont les morphismes sont les k-morphismes dominants de k-schémas.*

La preuve est laissée au lecteur.

2.2.2. PROPOSITION. — *Soit $\varphi : X \to Y$ un k-morphisme de k-schémas intègres, avec Y régulier* (resp. *et de type semi-local*). *Il existe un* *homomorphisme naturel*

$$\varphi^* : \quad D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$$
$$(\text{resp. } \varphi^* : \quad \tilde{D}^{\Phi}(Y) \to \tilde{D}^{\Phi}(X))$$

qui coïncide avec celui défini en 2.2.1, *dans le cas où* φ *est dominant et qui fait de* $D^{\Phi}(X)$ (resp. $\tilde{D}^{\Phi}(X)$) *un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas intègres réguliers* (resp. *et de type semi-local*), *avec comme morphismes les k-morphismes de k-schémas, dans la catégorie des groupes abéliens.*

On se contentera d'établir la proposition pour D^{Φ}. Seul le point (d) de la démonstration nécessite une modification, évidente, pour $\tilde{D}^{\Phi}$. La flèche φ^* sur $\tilde{D}^{\Phi}(Y)$ est induite par celle sur $D^{\Phi}(Y)$.

Démonstration.

(a) *Définition de* φ^*. — Soit ξ le point générique de X, et soit $\eta \in Y$ l'image de ξ dans Y. Soit $f \in L^{\Phi}(Y)$ un représentant d'un élément α de $D^{\Phi}(Y)$, et soit $f = u.g$ une écriture locale de f en η. Soit β la classe dans $k(X)^*/D_{k(X)}(\Phi)$ de l'image de u par l'application composée

$$\mathcal{O}^*_{Y,\eta} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^*.$$

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,\eta} \arrow[rr, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathcal{O}_{X,\xi} \simeq k(\xi) \simeq k(X) \\ & k(\eta) \arrow[ur, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

où θ est le passage au corps résiduel dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,\eta}$, et où χ est le plongement $k(\eta) \hookrightarrow k(\xi)$ provenant de l'homomorphisme (local) d'anneaux locaux φ^*.

(b) *L'élément* β *ne dépend pas du choix de l'écriture locale de* f *en* η. — En effet, si $f = v.h$ est une autre écriture locale, on a

$$u/v \in \mathcal{O}^*_{Y,\eta} \cap D_{k(Y)}(\Phi).$$

Comme $\mathcal{O}_{Y,\eta}$ est un anneau local régulier, le corollaire 2.1.1 montre que l'image de u/v dans $k(\eta)$, par l'application θ, est dans $D_{k(\eta)}(\Phi)$. Ainsi son image par φ^* dans $k(X) \simeq k(\xi)$, qui est $\chi \circ \theta\,(u/v)$, est dans $D_{k(X)}(\Phi)$.

(*c*) *L'élément* β *ne dépend pas du choix du représentant* f *de* α. — Si en effet f_1 est un autre représentant, on a $f_1 = fh$, avec $h \in D_{k(Y)}(\Phi)$. Donc, si $f = u.g$ est une écriture locale de f en η, on a, pour f_1, l'écriture locale $f_1 = u.(gh)$ en η, et comme seul u est utilisé dans la définition ci-dessus, l'assertion est claire.

(*d*) *L'élément* β *appartient à* $D^{\Phi}(X)$. — Soit f comme ci-dessus un représentant de α, soit P un point de X, et soit $Q = \varphi(P)$. Soit $f = u.g$ une écriture locale de f en Q. C'est aussi une écriture locale en η, puisque Q est une spécialisation de η. Le diagramme d'homomorphismes suivant est commutatif, où les flèches sont les flèches évidentes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^*_{Y,\eta} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}^*_{Y,Q} & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{O}^*_{X,P} \end{array}$$

Ainsi $\varphi^*(u)$, qui est un représentant de la classe de β, est inversible en P.

On posera $\beta = \varphi^*(\alpha)$.

(*e*) Le fait que l'application $\varphi^* : D^{\Phi}(Y) \to D^{\Phi}(X)$ ainsi définie est un homomorphisme est trivial, ainsi que le fait qu'elle coïncide avec celle de 2.2.1, quand cette dernière est définie.

(*f*) *Vérification de la fonctorialité*. — On va montrer que si X, Y, Z sont des k-schémas intègres, avec Y et Z réguliers, et si $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ sont des k-morphismes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & D^{\Phi}(Y) \arrow[dr, "\varphi^*"] & \\ D^{\Phi}(Z) \arrow[ur, "\psi^*"] \arrow[rr, "(\psi\circ\varphi)^*"] & & D^{\Phi}(X) \end{tikzcd}$$

avec les flèches définies ci-dessus est commutatif.

Soit ξ le point générique de X, soit $P = \varphi(\xi)$, et soit

$$Q = \psi(P) = (\psi\circ\varphi)(P).$$

Soit α dans $D^{\Phi}(Z)$. Pour calculer $(\psi\circ\varphi)^*(\alpha)$, on prend un représentant f de α dans $L^{\Phi}(Z)$ et une écriture locale $f = u.g$ de f en Q; on obtient $(\psi\circ\varphi)^*(\alpha)$ comme la classe dans $k(X)^*/D_{k(X)}(\Phi)$ de l'image de u par l'application composée :

$$\mathcal{O}^*_{Z,Q} \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{O}^*_{Y,P} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}^*_{X,\xi} \simeq k(X)^*.$$

Par ailleurs, u étant inversible en Q est inversible en l'image par ψ du point générique de Y, et donc $\psi^*(u) \in \mathcal{O}^*_{Y,P} \subset k(Y)^*$ est un représentant de $\psi^*(\alpha) \in D^\Phi(Y)$, représentant qui est inversible en $P = \varphi(\xi)$. Ainsi, $\varphi^*(\psi^*(u))$ est un représentant de $\varphi^*(\psi^*(\alpha))$ dans $L^\Phi(X)$, et l'on a

$$\varphi^*(\psi^*(\alpha)) = (\psi \circ \varphi)^*(\alpha).$$

2.2.3. COROLLAIRE. — *Pour tout k-schéma intègre régulier X, on a un accouplement linéaire à droite*

$$X(k) \times D^\Phi(X) \to D^\Phi(\operatorname{Spec} k) = k^*/D_k(\Phi),$$

et cet accouplement est fonctoriel, i. e. *si* $\varphi : X \to Y$ *est un k-morphisme de tels schémas, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X(k) \arrow[dd] & \times & D^\Phi(X) \arrow[dr] & \\
 & & & D^\Phi(k) \\
Y(k) & \times & D^\Phi(Y) \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où l'on note $D^\Phi(k) = D^\Phi(\operatorname{Spec} k)$.

Le même énoncé vaut pour $\tilde{D}^\Phi$, *en se limitant aux schémas de type semi-local.*

C'est clair. Notons l'égalité $\tilde{D}^\Phi(\operatorname{Spec} k) = D^\Phi(\operatorname{Spec} k)$. Nous noterons uniformément ce groupe $D^\Phi(k)$ dans la suite.

3. Fonctorialité covariante; accouplement avec les zéro-cycles

3.1. PROPOSITION. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un k-morphisme fini localement libre de k-schémas intègres. Il existe une application naturelle* $\varphi_* : \tilde{D}^\Phi(X) \to \tilde{D}^\Phi(Y)$ *qui est fonctorielle pour de tels morphismes.*

(Notons que, pour des schémas noethériens, l'hypothèse sur φ équivaut à φ fini et plat.)

Construction. — Soit α dans $\tilde{D}^\Phi(X)$, et soit $f \in \tilde{L}^\Phi(X)$ un représentant de α. On définit $\varphi_*(\alpha)$ comme la classe dans $\tilde{D}^\Phi(Y)$ de l'élément $f_1 = N_{k(X)/k(Y)}(f) \in k(Y)^*$. Il faut vérifier que cet élément est dans $\tilde{L}^\Phi(Y)$, et que sa classe, dans $k(Y)^*/D_{k(Y)}(\Phi)$, ne dépend pas du choix du représentant f de α. Ici nous avons recours au « principe de la norme » de Knebusch-Scharlau (comme Φ est multiplicative, il résulte de [L] (X, 1.7), que les énoncés [L] (VII, 4.3 et 5.1) coïncident) : un autre représentant f' de α diffère de f par multiplication par un élément de $D_{k(X)}(\Phi)$, et donc, d'après le principe de la norme, leurs normes de $k(X)$ à $k(Y)$ diffèrent d'un élément de $D_{k(Y)}(\Phi)$.

Montrons que f_1 appartient à $\tilde{L}^{\Phi}(Y)$. Soit $\{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble fini de points de Y contenus dans un ouvert affine. Soit $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ l'ensemble (fini) des points de X dont l'image par φ est l'un des P_i. Les points Q_j sont dans l'ouvert affine (φ est fini) image réciproque de celui contenant les P_i. Comme f est dans $\tilde{L}^{\Phi}(X)$, on peut écrire, dans $k(X)^*$, $f = u.g$, avec u inversible en chaque Q_j, et g dans $D_{k(X)}(\Phi)$. On a

$$f_1 = N_{k(X)/k(Y)}(f) = N_{k(X)/k(Y)}(u).N_{k(X)/k(Y)}(g).$$

Le dernier facteur est, d'après le principe de la norme, dans $D_{k(Y)}(\Phi)$. Il suffit de voir que le premier facteur est une fonction inversible en chacun des P_i. La fonction u est inversible sur un ouvert Ω contenant tous les Q_j. Soit F le fermé complémentaire de Ω. L'image de F par φ est un fermé (φ est fini) qui ne contient aucun des points P_i (φ est surjectif). Soit V l'ouvert complémentaire de $\varphi(F)$. Sur l'image réciproque de V par φ, la fonction u est inversible. Comme les P_i sont inclus dans un ouvert affine, quitte à rapetisser V, on peut le supposer de la forme Spec A (contenant tous les P_i), et φ de la forme Spec $B \xrightarrow{\varphi}$ Spec A, avec B libre sur A, et $u \in B^*$. On a alors :

$$N_{k(X)/k(Y)}(u) = N_{B/A}(u) \in A^*,$$

et cet élément de $k(Y)^*$ est donc inversible en chaque P_i.

La fonctorialité est laissée au lecteur (transitivité de la norme).

3.1.1. *Remarque.* — C'est ici que l'introduction des groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, en place de $D^{\Phi}(X)$, se révèle particulièrement utile (*cf.* 6.3.1). Je ne sais pas si on a l'analogue de la proposition 3.1 pour les groupes $D^{\Phi}(X)$, le problème étant que, pour $\varphi : X \to Y$ morphisme fini, il peut y avoir plusieurs points de X au-dessus d'un point de Y. Il est cependant un cas où cela ne pose pas de problème : celui d'une extension finie de corps, et c'est ce qui permet d'obtenir l'énoncé 3.2.1, tant avec D^{Φ} qu'avec $\tilde{D}^{\Phi}$.

3.2. ACCOUPLEMENT AVEC LES ZÉRO-CYCLES. — Étant donné X un k-schéma de type fini, on note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles de X, i. e. le groupe libre sur les points fermés de X. Etant donné un k-morphisme

$\varphi : X \to Y$ de tels k-schémas, on définit l'homomorphisme

$$\varphi_* : \quad Z_0(X) \to Z_0(Y)$$

comme l'application qui au zéro-cycle défini par un point fermé P de X associe le zéro-cycle $[k(P) : k(\varphi(P))] \, \varphi(P)$, où $\varphi(P)$ est le point fermé de Y, image de P, et où le coefficient est le degré du corps résiduel de X en P sur le corps résiduel de Y en $\varphi(P)$ (corps qui sont des extensions finies de k).

3.2.1. Proposition. — *Soit X un k-schéma intègre, régulier et de type fini. On a un accouplement bilinéaire :*

$$Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$
$$(\text{resp.}\, Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k))$$

et cet accouplement est fonctoriel, i. e. *si $\varphi : X \to Y$ est un k-morphisme de tels schémas* (resp. *de tels schémas de type semi-local*), *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \arrow[d, shift right=6, "\varphi_*"'] \arrow[dr] & \\
Z_0(Y) \times D^{\Phi}(Y) \arrow[u, shift right=-3, "\varphi^*"'] \arrow[r] & D^{\Phi}(k)
\end{tikzcd}$$

resp.

$$\begin{tikzcd}
Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \arrow[d, shift right=6, "\varphi_*"'] \arrow[dr] & \\
Z_0(Y) \times \tilde{D}^{\Phi}(Y) \arrow[u, shift right=-3, "\varphi^*"'] \arrow[r] & D^{\Phi}(k)
\end{tikzcd}$$

Ces accouplements sont compatibles avec ceux définis en 2.2.3 (*tout k-point définissant un zéro-cycle*).

Démonstration. — Soit P un point fermé de X, soit $i_P : \operatorname{Spec} k(P) \hookrightarrow X$ la k-immersion fermée correspondante, et soit $p_P : \operatorname{Spec} k(P) \to \operatorname{Spec} k$ déduit de la flèche structurale; l'extension $k(P)/k$ est finie, et, comme on l'a noté en 3.1.1, il n'y a pas de difficulté à définir

$$\begin{array}{rcl} p_{P*}: \; D^{\Phi}(k(P)) & \to & D^{\Phi}(k) \\ \| & & \| \\ \tilde{D}^{\Phi}(k(P)) & \to & \tilde{D}^{\Phi}(k) \end{array}$$

(c'est exactement le principe de la norme). Pour α dans $D^{\Phi}(X)$, on définit $\langle P, \alpha \rangle = p_{P*} \circ i_p^* (\alpha)$. Comme p_{P*} et i_P^* sont des homomorphismes de groupes, la bilinéarité de l'accouplement

$$Z_0(X) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

ainsi défini est claire. Le résultat pour $\tilde{D}^{\Phi}$ se déduit de celui pour D^{Φ}. Ainsi $\langle P, \alpha \rangle$ est obtenu de la façon suivante : on prend un représentant u de α dans $L^{\Phi}(X)$, inversible en P, et on définit $\langle P, \alpha \rangle$ comme la classe dans $k^*/D_k(\Phi)$ de la norme (de $k(P)$ à k) de $u(P) \in k(P)^*$. On établit facilement la fonctorialité à partir de cette description explicite et de la formule

$$N_{L/k}(x) = (N_{K/k}(x))^{[L:K]}$$

pour $L/K/k$ extensions finies et x dans K. La compatibilité avec 2.2.3 est claire.

3.3. Rappels sur les familles de zéro-cycles. — (Il n'y a pas de difficulté à vérifier que les définitions ici données coïncident avec les définitions usuelles en théorie des cycles.)

Etant donnés un corps k, et A une k-algèbre commutative de dimension finie, on définit, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, l'entier $n_{\mathfrak{p}} = (\dim_k A_{\mathfrak{p}})/(\dim_k A/\mathfrak{p})$. Pour A comme ci-dessus, et g dans A, on a la formule

$$\det_{A/k}(g) = \prod\nolimits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} (N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(g(\mathfrak{p})))^{n_{\mathfrak{p}}},$$

où $\varkappa(\mathfrak{p})$ est le corps $A/\mathfrak{p}$, et $g(\mathfrak{p})$ l'image de g dans $A/\mathfrak{p}$.

Pour établir cette égalité, on écrit A comme un produit d'algèbres locales, et on utilise Bourbaki ([B 2], chap. 8, § 12, n° 2, prop. 6).

Etant donnés A comme ci-dessus, et $i : \operatorname{Spec} A \hookrightarrow X$ une k-immersion fermée de Spec A dans un k-schéma X, on appelle zéro-cycle sur X, associé à cette immersion, le zéro-cycle $\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} n_{\mathfrak{p}}\, i(\mathfrak{p})$.

Soit X un k-schéma. Une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par un k-schéma T est la donnée d'une k-immersion fermée $j : Z \hookrightarrow X \times_k T$ telle que la flèche composée $p_T \circ j : Z \to T$ soit un k-morphisme fini localement libre. A tout k-point de T, on associe un zéro-cycle $\rho(P)$ de X de la façon suivante : par passage à Spec k *via* le morphisme $\operatorname{Spec} k \to T$ définissant le point P, la flèche de T-schémas j définit une k-immersion fermée $\operatorname{Spec} A \hookrightarrow X$, avec A, k-algèbre finie. On définit $\rho(P)$ comme le zéro-cycle associé à cette immersion.

3.4. Proposition. — *Soient X, T, Z des k-schémas de type fini intègres, avec T régulier, X régulier et de type semi-local, et $j : Z \hookrightarrow X \times_k T$ une k-immersion fermée définissant une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par T. Notons $p : Z \to T$ le k-morphisme fini localement libre induit par la projection sur T, et $q : Z \to X$ le k-morphisme induit par la projection sur X. Pour P dans $T(k)$ et α dans $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, on a la formule*

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, p_* q^* \alpha \rangle,$$

où l'accouplement à valeurs dans $D^{\Phi}(k)$ est celui défini en 3.2.1.

Démonstration. — Soit Spec A le k-schéma fini fibre de p en P, et soit $i : \mathrm{Spec}\, A \hookrightarrow X$ la k-immersion fermée définie par j. Comme X est de type semi-local, les points $i(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$), qui sont en nombre fini, sont dans un ouvert affine de X. On peut donc choisir $f \in k(X)^*$, un représentant de α qui soit inversible en chaque $i(\mathfrak{p})$.

(*a*) *Calcul de* $\langle \rho(P), \alpha \rangle$. — Par définition (3.2.1), on a

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad \langle \rho(P), \alpha \rangle &= \langle \textstyle\sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} n_{\mathfrak{p}}\, i(\mathfrak{p}), \alpha \rangle \\ &= \textstyle\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A} (N_{\varkappa(i(\mathfrak{p}))/k}(f(i(\mathfrak{p}))))^{n_{\mathfrak{p}}},\end{aligned}$$

où l'on désigne, pour $P \in X$ et $f \in \mathcal{O}_{X,P}$, par $\varkappa(P)$ le corps résiduel en P et par $f(P)$ l'image de f dans ce corps résiduel.

(*b*) *Calcul de* $\langle P, p_* q^* \alpha \rangle$. — Par des arguments analogues à ceux utilisés dans 3.1, et par la définition de p_* et q^* sur $\tilde{D}^{\Phi}(.)$, on peut décrire un représentant de $p_* q^* \alpha$ dans $k(T)^*$ inversible en P de la façon suivante : il existe des anneaux A_1, A_2, B définissant des ouverts affines respectivement de T, Z, X, tels que le diagramme suivant de k-morphismes soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Spec}\, B \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\mathrm{Spec}\, A \arrow[r, hook, "t"] \arrow[rrru, bend left, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}\, A_2 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[rru, "\lambda"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[r, "q"] \arrow[d] & X \\
\mathrm{Spec}\, k \arrow[r, hook, "P"] & \mathrm{Spec}\, A_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] & T &
\end{tikzcd}$$

où les $\square$ indiquent des produits fibrés, et où A_2 est libre sur A_1, et f appartient à B^*. Notons λ^*, t^*, i^* les comorphismes de λ, t, i. L'élément $q^*(\alpha)$ de $\tilde{D}^{\Phi}(Z)$ est représenté sur Spec A_2 par l'élément inversible $g = \lambda^*(f)$.

Par définition de p_*, l'élément $p_* q^* (\alpha)$ est représenté sur Spec A_1 par l'élément inversible $h = N_{A_2/A_1}(g) \in A_1^*$. Comme la norme est définie par le déterminant, c'est une propriété évidente que l'on a, dans k^*,

$$h(P) = N_{A/k}(t^*(g))$$

soit encore, puisque $t^*(g) = t^*(\lambda^*(f)) = i^*(f)$,

$$h(P) = N_{A/k}(i^*(f)).$$

D'après 3.3, on a donc :

$$h(P) = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} (N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(i^*(f)(\mathfrak{p})))^{n_\mathfrak{p}}. \tag{3.2}$$

Comme i est une k-immersion fermée, elle induit, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, un isomorphisme de k-algèbres :

$$i^* : \ \varkappa(i(\mathfrak{p})) \xrightarrow{\sim} \varkappa(\mathfrak{p}),$$

qui à la classe de f en $i(\mathfrak{p})$ fait correspondre la classe de $i^*(f)$ en $\mathfrak{p}$. Ceci implique, pour tout $\mathfrak{p}$ dans Spec A, l'égalité

$$N_{\varkappa(i(\mathfrak{p}))/k}(f(i(\mathfrak{p}))) = N_{\varkappa(\mathfrak{p})/k}(i^*(f)(\mathfrak{p})) \tag{3.3}$$

Comme, d'après 3.2.1, la classe de $h(P)$ dans $D^\Phi(k)$ est $\langle P, p_* q^* \alpha \rangle$, la comparaison de (3.1), (3.2) et (3.3) donne l'égalité annoncée.

4. Invariance homotopique; application à l'équivalence rationnelle

Dans ce paragraphe, on établit l'invariance « homotopique » des groupes $D^\Phi(X)$. Le résultat général est 4.1.4, les cas particuliers, démontrés en 4.1.1, puis 4.1.3, sont des ingrédients de la démonstration. Les résultats analogues valent pour $\tilde{D}^\Phi(X)$; ils sont rassemblés en 4.2.1. Joints à 3.4, ils donnent le théorème 4.3. Ce dernier permet de déduire le théorème B du théorème A.

4.1.1. Proposition. — *L'homomorphisme* $D^\Phi(k) \xrightarrow{p^*} D^\Phi(\mathbf{A}_k^1)$ *déduit du morphisme structural* $p : \mathbf{A}_k^1 \to \operatorname{Spec} k$ *via* 2.2.1 (*ou* 2.2.2) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On note $\mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$, de corps des fractions $k(T)$. Si $\alpha \in k^*$ appartient à $D_{k(T)}(\Phi)$, il appartient à $D_k(\Phi)$: c'est un cas particulier trivial de 2.1.1. Ainsi p^* est injectif. Dire que p^* est surjectif, c'est dire que si $f \in k(T)^*$ admet en tout point de $\mathbf{A}_k^1$ une écriture locale, alors f s'écrit $f = \alpha g$, avec $\alpha \in k^*$ et $g \in D_{k(T)}(\Phi)$. Pour démontrer cela, quitte à multiplier par un carré dans $k(T)$, on peut supposer que f est dans $k[T]$, et qu'il est produit :

$$f = \alpha \prod_{i=1}^{m} P_i \tag{4.1}$$

de $\alpha \in k^*$ et de polynômes unitaires irréductibles distincts de 1 et distincts deux à deux. Montrons qu'aucun P_i ne vérifie que Φ est anisotrope sur le corps $k[T]/P_i$. Ceci résulte du lemme plus général suivant, qu'il suffit d'appliquer à la localisation de $\mathbf{A}_k^1$ au point fermé défini par un tel P_i.

4.1.1.1. LEMME. — *Soit A un anneau de valuation discrète contenant k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel l, de corps des fractions K. Si $f \in K^*$ admet une écriture locale en $\mathfrak{m}$, et si Φ est anisotrope sur l, alors la valuation de f est paire.*

Démonstration. — Soit $f = u\,\Phi(y_1, \ldots, y_s)$ avec u dans A^* et y_j $(j = 1, \ldots, s)$ dans K, et soit $n = \inf_j v(y_j)$, où v désigne la valuation de A.

Posons $z_j = t^{-n} y_j$, où t désigne une uniformisante de $\mathfrak{m}$. On a alors :

$$f = u t^{2n} \Phi(z_1, \ldots, z_s)$$

avec $\inf_j v(z_j) = 0$. Ainsi $\Phi(z_1, \ldots, z_s)$, qui est dans A, a une image non nulle dans l (puisque Φ est anisotrope sur l) et est donc inversible, ce qui, au vu de l'égalité ci-dessus, achève la démonstration.

Ainsi, dans la décomposition (4.1), tous les polynômes P_i sont tels que la forme Φ est isotrope sur le corps $k[T]/P_i$. Pour terminer la démonstration de 4.1.1, il suffit de démontrer la proposition suivante, qui est une généralisation immédiate du lemme de [P 2] (p. 234). On pourrait la déduire de [L] (X, 2.9), mais une démonstration directe s'impose.

4.1.1.2. PROPOSITION. — *Si $P \in k[T]$ est un polynôme unitaire irréductible différent de 1 tel que Φ soit isotrope sur le corps $K = k[T]/P$, P appartient à $D_{k(T)}(\Phi)$.*

Démonstration. (Rappelons, conventions précédant 2.2, que Φ est toujours supposée anisotrope sur k; la proposition vaut sans cette condition, mais elle est triviale dans le cas isotrope). — Si P est de degré 1, il n'y a rien à démontrer, car Φ est anisotrope. Supposons l'assertion démontrée pour les polynômes de degré strictement plus petit que $n > 1$, et soit P

de degré n satisfaisant l'hypothèse de l'énoncé (s'il n'y a pas de tel polynôme, il n'y a rien à démontrer !). Soit $K = k[T]/P$, et soit $(a_1, \ldots, a_s) \in K^s$ une solution non triviale de

$$\Phi(a_1, \ldots, a_s) = 0.$$

Soit A_i $(i = 1, \ldots, s)$ un polynôme de $k[T]$ de degré strictement plus petit que n, et d'image a_i dans $k[T]/P$. De l'égalité ci-dessus on tire une égalité :

$$\Phi(A_1, \ldots, A_s) = QP, \tag{4.2}$$

où $Q \in k[T]$ est non nul, car les A_i ne sont pas tous nuls, et Φ, étant anisotrope sur k, l'est aussi sur $k(T)$ (cas particulier de 2.1). Ecrivons

$$Q = \beta \prod_{j=1}^{m} Q_j^{n_j},$$

avec $\beta \in k^*$, avec m entier positif ou nul (nul pour $Q \in k^*$), avec les Q_j polynômes unitaires ($\neq 1$) irréductibles deux à deux distincts, et les n_j entiers strictement positifs. Quitte à diviser chaque membre de l'égalité (4.2) par une puissance convenable de chaque Q_j, on peut supposer que, pour tout $j \in [1, m]$, il existe $i \in [1, s]$ tel que Q_j ne divise pas A_i. L'égalité (4.2) montre alors que Φ est isotrope sur le corps $k[T]/Q_j$, pour $j = 1, \ldots, m$. Par ailleurs, le membre de gauche de (4.2) est de degré au plus $(2n-2)$, et P étant de degré n, on obtient que Q, et donc chaque Q_j, est de degré strictement plus petit que n; l'hypothèse de récurrence montre alors que chaque Q_j est dans $D_{k(T)}(\Phi)$, et Φ étant multiplicative, on déduit de (4.2) que P s'écrit comme le produit d'un élément γ de k^* et d'un élément de $D_{k(T)}(\Phi)$. Posant $U = 1/T$, et raisonnant dans le localisé de $k[U]$ en $U = 0$, on tire, par un argument de valuation facile, du fait que P est unitaire que γ appartient à $D_k(\Phi)$. Utilisant encore une fois le caractère multiplicatif de Φ, on conclut que P est dans $D_{k(T)}(\Phi)$.

4.1.1.3. *Remarque.* — Comme me l'a signalé SANSUC, à qui je dois les références à la littérature, on peut, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration qui précède, ainsi que le théorème de ARTIN-CASSELS-PFISTER ([A], Satz 7, [L], IX, 1.3), établir le théorème suivant (facilement déductible de [L], X, 2.9, mais la démonstration ainsi obtenue est plus élémentaire).

THÉORÈME. — *Pour Φ comme précédemment, et $f \in k[T]$, il y a équivalence entre :*

(i) *f est représenté par Φ dans $k(T)$;*

(ii) *f est représenté par Φ dans $k[T]$;*

(iii) *le coefficient dominant de f est représenté par Φ dans k, et pour chaque facteur irréductible P de f de multiplicité impaire, Φ est isotrope sur $k[T]/P$.*

4.1.2. LEMME. — *Soient X et Y deux k-schémas intègres, η = Spec $k(Y)$ le point générique de Y, et $\pi : X \to Y$ un k-morphisme. Notons $p : X_\eta \to \eta$ la fibre générique de π. Supposons que l'on a :*

(*a*) *localement pour la topologie de Zariski sur Y, π admet une section.*

(*b*) *la fibre générique X_η (qui est donc non vide) est régulière, et l'application $p^* : D^\Phi(k(\eta)) \to D^\Phi(X_\eta)$ est un isomorphisme.*

Alors la flèche (2.2.1) *$\pi^* : D^\Phi(Y) \to D^\Phi(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Notons $i : \eta \to Y$ l'inclusion du point générique de Y dans Y; du produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \eta & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

on tire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D^\Phi(Y) & \xrightarrow{\pi^*} & D^\Phi(X) \\ {\scriptstyle i^*}\downarrow\cap & & \cap\downarrow{\scriptstyle j^*} \\ D^\Phi(k(\eta)) & \xrightarrow[\sim]{p^*} & D^\Phi(X_\eta) \end{array} \tag{4.3}$$

où i^* et j^* sont injectifs, car $i^* : k(Y) \to k(\eta)$ et $j^* : k(X) \to k(X_\eta)$ sont des isomorphismes. Ainsi π^* est injectif, et de plus, pour α dans $D^\Phi(X)$, on peut choisir un représentant f dans $L^\Phi(X) \subset k(X)^* \simeq k(X_\eta)^*$ qui soit de la forme $f = p^*(g)$ avec g dans $k(\eta)^*$. Montrons que la classe de g dans $D^\Phi(k(\eta))$ est dans l'image de $i^* : D^\Phi(Y) \to D^\Phi(k(\eta))$, ce qui, vu (4.3), achèvera de montrer que π^* est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que, pour f et g comme ci-dessus, g appartient à $L^\Phi(Y)$. Soit $P \in Y$, et soit U un ouvert de Y contenant P et tel que $\pi_U : X_U \to U$ admette une section, soit s. Soit $Q = s(P)$. On a le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{X,Q} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{X,s(\eta)} = \mathcal{O}_{X_\eta,s(\eta)} & \xrightarrow{q_1} & k(s(\eta)) \\ {\scriptstyle s^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^*} & \searrow{\scriptstyle s^*} \quad \swarrow{\scriptstyle \sim} & \\ \mathcal{O}_{Y,P} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{Y,\eta} & \xrightarrow[\sim]{q_2} & k(\eta) \end{array} \tag{4.4}$$

où les flèches q_1 et q_2 sont les flèches de passage au corps résiduel. Soit $f = u.h$ une écriture locale de $f \in L^{\Phi}(X)$ en $Q \in X$. Comme f est de la forme $p^*(g)$ avec $g \in k(\eta)^*$, et que u appartient à $\mathcal{O}^*_{X,Q}$, donc à $\mathcal{O}^*_{X,s(\eta)}$, on a

$$h = fu^{-1} \in \mathcal{O}^*_{X_\eta, s(\eta)} \cap D_{k(X_\eta)}(\Phi).$$

Comme X_η est régulier (en $s(\eta)$), il résulte alors de 2.1.1 que l'on a

$$q_1(f)\, q_1(u)^{-1} \in D_{k(s(\eta))}(\Phi).$$

Vu (4.4), cela implique :

$$s^*(f)\, s^*(u)^{-1} = h_1 \in D_{k(\eta)}(\Phi),$$

et donc

$$g = s^*(p^*(g)) = s^*(f) = s^*(u).h_1$$

fournit une écriture locale de g en P, puisque $s^*(u)$ appartient à $\mathcal{O}^*_{Y,P}$, u appartenant à $\mathcal{O}^*_{X,Q}$.

4.1.3. Corollaire. — *Pour n un entier naturel quelconque, les flèches déduites des morphismes structuraux :*

(i) $D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{A}^n_k)$;

(ii) $D^{\Phi}(k) \to D^{\Phi}(\mathbf{P}^n_k)$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — En utilisant des projections $\mathbf{A}^n_k \to \mathbf{A}^{n-1}_k$, on obtient (i) par récurrence à partir de 4.1.1 et 4.1.2. Connaissant (i), pour obtenir (ii), il suffit d'observer que le diagramme commutatif de k-morphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^n_k \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & \mathbf{P}^n_k \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

où les flèches vers $\operatorname{Spec} k$ sont les morphismes structuraux, et où i est une identification de $\mathbf{A}^n_k$ à un ouvert de $\mathbf{P}^n_k$, donne le diagramme commutatif d'homomorphismes de groupes (fonctorialité 2.2.1) :

$$\begin{tikzcd} D^{\Phi}(\mathbf{P}^n_k) \arrow[rr, hook, "i^*"] & & D^{\Phi}(\mathbf{A}^n_k) \\ & D^{\Phi}(k) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où i^* est injectif car i est birationnel.

4.1.4. THÉORÈME. — *Soit X un k-schéma intègre, et $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang fini sur X. Soit* $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ *l'espace total du fibré et soit* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *le fibré projectif associé. Les homomorphismes :*

(i) $D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$;

(ii) $D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$

déduits, via 2.2.1, *des morphismes structuraux des fibrés sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Il résulte de 4.1.3 que les couples $(\mathbf{V}(\mathscr{E}), X)$ et $(\mathbf{P}(\mathscr{E}), X)$ satisfont les hypothèses de 4.1.2.

4.1.5. COROLLAIRE. — *Soit X un k-schéma intègre, régulier et propre sur k. L'accouplement* 2.2.3 *:*

$$X(k) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

définit un accouplement

$$X(k)/R \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k).$$

Démonstration. — Rappelons que, pour X un k-schéma, $X(k)/R$ désigne le quotient de $X(k)$ par la R-équivalence, qui est la relation d'équivalence sur $X(k)$ engendrée par la relation élémentaire : A et B dans $X(k)$ sont liés s'il existe un k-morphisme $\theta : \Omega \to X$, où Ω est un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}_k^1$, tel que A et B sont dans l'image par θ de $\Omega(k)$; cette notion a été introduite par MANIN (*cf.* [M], chap. II, § 14).

Pour X propre sur k, on peut remplacer Ω par $\mathbf{P}_k^1$, et l'assertion résulte de l'isomorphisme $D^{\Phi}(k) \xrightarrow{\sim} D^{\Phi}(\mathbf{P}_k^1)$ et de la fonctorialité (2.2.3) de l'accouplement $X(k) \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$ sur les k-schémas intègres réguliers.

On notera que la démonstration utilise uniquement 2.2.2 et 4.1.1.

4.2. PROPOSITION. — *Les homomorphismes* $D^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$ *et* $D^{\Phi}(k) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{P}_k^1)$, *déduits, via* 2.2.1 *ou* 2.2.2, *des morphismes structuraux sont des isomorphismes. Plus généralement, étant donné un k-schéma intègre X de type semi-local et un fibré vectoriel de rang fini $\mathscr{E}$ sur X, les homomorphismes déduits, via* 2.2.1, *des morphismes structuraux des fibrés :*

$$\tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{V}(\mathscr{E}))$$
$$\tilde{D}^{\Phi}(X) \to \tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — L'assertion sur $\mathbf{A}_k^1$ résulte de l'inclusion

$$\tilde{D}^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1) \subset D^{\Phi}(\mathbf{A}_k^1)$$

et de 4.1.1. Celle sur $\mathbf{P}_k^1$ s'obtient de même (*cf.* l'argument en 4.1.3).

Pour les fibrés, on remarque qu'un fibré vectoriel est « semi-localement » trivial, et on démontre facilement l'analogue pour $\tilde{D}^{\Phi}$ du lemme 4.1.2, où l'on prend X et Y de type semi-local, et où l'on suppose que π admet une section au voisinage de tout ensemble fini de points de X.

4.3. THÉORÈME. — *Soit X une k-variété projective et lisse. L'accouplement* 3.2.1

$$Z_0(X) \times \tilde{D}^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle.

Démonstration. — Soit Z un k-schéma intègre, et $j : Z \hookrightarrow X \times_k \mathbf{P}_k^1$ une k-immersion fermée définissant (3.3) une famille de zéro-cycles sur X paramétrée par $\mathbf{P}_k^1$. Soient P et Q des points de $\mathbf{P}_k^1(k)$, et $\alpha \in \tilde{D}^{\Phi}(X)$. Par définition de l'équivalence rationnelle, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, dans une telle situation, on a :

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle \rho(Q), \alpha \rangle,$$

où ρ est défini comme en 3.3.

D'après 3.4, dont nous reprenons les notations, on a

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, p_* q^* \alpha \rangle,$$
$$\langle \rho(Q), \alpha \rangle = \langle Q, p_* q^* \alpha \rangle.$$

D'après 4.2, il existe $\gamma \in D^{\Phi}(k)$ tel que $\gamma = p_* q^* \alpha$, et on a donc :

$$\langle \rho(P), \alpha \rangle = \langle P, \gamma \rangle = \gamma = \langle Q, \gamma \rangle = \langle \rho(Q), \alpha \rangle.$$

THÉORÈME *B*. — *Soit X une* $\mathbf{R}$*-variété projective et lisse. Si deux points P et Q de $X(\mathbf{R})$ définissent des zéro-cycles rationnellement équivalents, ils sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$.*

Démonstration. — Supposons P et Q non dans la même composante. D'après le théorème A (et sa démonstration), il existe $\alpha \in \tilde{D}^{\Phi_n}(X)$, avec n la dimension de X, tels que $\langle P, \alpha \rangle = 1$ et $\langle Q, \alpha \rangle = -1$. Le théorème 4.3 implique alors que P et Q ne sont pas rationnellement équivalents.

4.4. *Remarques.*

4.4.1. Pour X comme dans le théorème B, il est clair que deux points de $X(\mathbf{R})$ qui sont R-équivalents sont dans la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$: $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ est connexe, et l'image par une application continue d'un connexe est connexe. Mais, pour des points simplement rationnellement équivalents je ne sais pas s'il existe une démonstration du théorème B évitant le long détour des formes quadratiques multiplicatives et du théorème de Stone-Weierstrass.

4.4.2. Je ne sais pas si dans le théorème 4.3, on peut remplacer $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ par $D^{\Phi}(X)$; la question se pose déjà en 3.4 et en 3.1 (*cf.* 3.1.1).

4.4.3. Etant donnée une extension galoisienne K/k de corps, et X une k-variété propre et lisse, il résulte de Hilbert 90 que l'application $A^1(X) \rightarrow A^1(X_K)$ des classes (pour l'équivalence rationnelle) de cycles de codimension 1 sur X dans les classes sur X_K est injective. On peut se demander s'il en est de même des applications naturelles $A^n(X) \rightarrow A^n(X_K)$ en codimension n plus grande que 1. Comme me l'a signalé CORAY, SWINNERTON-DYER a répondu par la négative à cette question, en établissant le résultat suivant (non publié) :

Soit X une k-surface cubique (projective et lisse) possédant une droite définie sur k. La relation d'équivalence sur $X(k)$ induite par l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles de X coïncide avec la R-équivalence.

Ainsi, pour X une $\mathbf{R}$-surface cubique telle que $X(\mathbf{R})$ ait deux composantes connexes, l'application $A^2(X) \rightarrow A^2(X_{\mathbf{C}})$ n'est pas injective : une telle surface possède une droite réelle (27 est impair), deux points de $X(\mathbf{R})$, qui sont dans des composantes connexes différentes, ne sont pas R-équivalents, et deux points de $X_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ sont rationnellement équivalents sur $X_{\mathbf{C}}$, car ils sont même R-équivalents ($X_{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}$-rationnelle).

On voit que notre théorème B permet de généraliser cet exemple : si X est une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse telle que $X_{\mathbf{C}}$ soit $\mathbf{C}$-rationnelle et que $X(\mathbf{R})$ ait au moins deux composantes connexes réelles, l'application naturelle $A^{\dim X}(X) \rightarrow A^{\dim X}(X_{\mathbf{C}})$ n'est pas injective. On en trouvera un exemple dans le paragraphe 5; les surfaces de Châtelet généralisées décrites en détail dans [CS 4], et qui sont reprises d'ISKOVSKIH [I], fournissent d'autres exemples.

5. Un exemple

5.1. Dans [CS 2] (*voir*, pour plus de détails, [CS 4]), SANSUC et l'auteur ont donné un exemple de $\mathbf{R}$-variété X, projective et lisse $\mathbf{R}$-unirationnelle, telle que $X_{\mathbf{C}}$ soit $\mathbf{C}$-rationnelle et que $\operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}$ soit isomorphe comme $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-module au module $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (avec action triviale de Galois) et telle que pourtant (*cf.* [CS 1], prop. 5) X ne soit pas $\mathbf{R}$-rationnelle. L'invariant utilisé est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ dont il est facile de montrer (*cf.* [CS 4]) qu'il est égal à 1 pour une $\mathbf{R}$-variété lisse complète $\mathbf{R}$-rationnelle. Dans l'exemple considéré, ce nombre est égal à 2, ce qui permet de conclure. Une autre façon de montrer que X n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle, également indiquée dans [CS 2], est de remarquer que $X(\mathbf{R})$ n'étant pas connexe, $X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément (*cf.* 4.4.1). Or il a été démontré dans [CS 3] (§ 4, prop. 10), de façon purement algébrique (*via* HIRONAKA), que, pour k un corps de caractéristique zéro, l'ensemble $Z(k)/R$ est un invariant k-birationnel des k-variétés Z lisses complètes, et est donc réduit à un élément si X est k-rationnel. Dans ce paragraphe, on utilise les méthodes des paragraphes 2 à 4 pour montrer de façon purement algébrique que, pour la $\mathbf{R}$-variété X, l'ensemble $X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément : l'avantage de cette façon de démontrer que X n'est pas $\mathbf{R}$-rationnelle est qu'on utilise uniquement les deux propriétés suivantes de $\mathbf{R}$: c'est un corps de caractéristique zéro, et il existe sur ce corps une forme quadratique multiplicative (non singulière) Φ telle que $D^{\Phi}(\mathbf{R})$ soit non nul.

5.2. PROPOSITION. — *Soit φ_2 la forme quadratique définie dans l'introduction, et soit X la $\mathbf{R}$-variété discutée ci-dessus (et dont on va rappeler la définition). Il existe $\alpha \in D^{\varphi_2}(X)$ et deux points A et B de $X(\mathbf{R})$ tels que, dans $D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) \simeq (\pm 1)$, on ait*

$$\langle A, \alpha \rangle \neq \langle B, \alpha \rangle,$$

où l'accouplement est celui défini en 2.2.3.

5.2.1. COROLLAIRE. — *$X(\mathbf{R})/R$ n'est pas réduit à un élément.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de 4.1.5.

5.2.2. *Description de X.* — Soient $e_1 < e_2 < e_3$ trois nombres réels. On définit X_1 comme la sous-variété de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(x, y, z, t; \lambda)$ d'équation :

$$x^2+y^2+z^2 = (\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3)\,t^2,$$

et on définit X_2 comme la sous-variété de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(X, Y, Z, T; \mu)$ d'équation

$$X^2+Y^2+Z^2 = \mu(1-e_1\mu)(1-e_2\mu)(1-e_3\mu)\,T^2.$$

On définit X comme la sous-variété fermée de $Z = \mathbf{P}\ (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1})$, donnée par le recollement :

$$X_1 - \{\lambda = 0\} \xrightarrow{\sim} X_2 - \{\mu = 0\}$$
$$(x, y, z, t; \lambda) \mapsto (\lambda^{-2} x, \lambda^{-2} y, \lambda^{-2} z, t; 1/\lambda).$$

On note $\pi : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ la restriction à X de la flèche structurale $Z \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$.

5.2.3. *Démonstration de la proposition* 5.2.

Assertion. — La fonction rationnelle $(\lambda - e_2) \in \mathbf{R}(X)^*$ est dans $L^{\varphi_2}(X)$. Notons $\Omega_i \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ l'ouvert complémentaire de $\{\lambda = e_i\} \cup \{1/\lambda = \mu = 0\}$. Sur l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_2)$, la fonction $(\lambda - e_2)$ est inversible et admet donc une écriture locale

$$\lambda - e_2 = (\lambda - e_2).1. \tag{5.1}$$

Sur l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_1 \cap \Omega_3)$, qui contient la fibre de π au-dessus de $\{\lambda = e_2\}$, on a l'égalité

$$\lambda - e_2 = \frac{1}{(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)} \times ((x/t)^2 + (y/t)^2 + (z/t)^2)$$

qui est clairement une écriture locale en tout point de l'ouvert considéré. Par ailleurs, de l'identification $(\lambda - e_2) = (1 - e_2\,\mu)/\mu$ et de l'équation de X_2, on tire l'égalité

$$\lambda - e_2 = \frac{1}{(1 - e_1\,\mu)(1 - e_3\,\mu)} \times (\mu^{-2}((X/T)^2 + (Y/T)^2 + (Z/T)^2)),$$

qui est une écriture locale pour $(\lambda - e_2)$ sur l'ouvert complémentaire de $\{\lambda = 0, e_1, e_3\}$. Comme les ouverts considérés recouvrent X, l'assertion est démontrée.

Soit alors α la classe de $(\lambda - e_2)$ dans $D^{\varphi_2}(X)$. Soit A (resp. B) le point de coordonnées $(x, y, z, t; \lambda) = (0, 0, 0, 1; e_1)$ (resp. $(0, 0, 0, 1; e_3)$). De l'écriture locale (5.1), on tire :

$$\langle A, \alpha \rangle = \text{classe de } (e_1 - e_2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^*/D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*+},$$
$$\langle B, \alpha \rangle = \text{classe de } (e_3 - e_2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^*/D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*+}$$

et donc le premier est dans la classe de (-1), et le second dans la classe de $(+1)$, qui est différente.

5.3. *Remarques.* – On a un diagramme commutatif d'homomorphismes évidents :

$$\begin{tikzcd}
D^{\varphi_1}(X) \arrow[r] & D^{\varphi_2}(X) \arrow[r] & D^{\varphi_3}(X) \\
D^{\varphi_1}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_1"'] \arrow[r, "\sim"] & D^{\varphi_2}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_2"'] \arrow[r, "\sim"] & D^{\varphi_3}(\mathbf{R}) \arrow[u, hook, "i_3"'] \\
& \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[ul, "\sim"] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait [CS 2] que le Gal$(\mathbf{C}/\mathbf{R})$-module Pic $X_{\mathbf{C}}$ est de permutation, et ceci implique (*cf.* 6.1.2 et 6.1.3) que i_1 est un isomorphisme. De la non-trivialité des accouplements :

$$X(\mathbf{R}) \times D^{\varphi_2}(X) \to D^{\varphi_2}(\mathbf{R}),$$
$$X(\mathbf{R}) \times D^{\varphi_3}(X) \to D^{\varphi_3}(\mathbf{R})$$

(cette dernière se montrant par le même argument qu'en 5.2.3) résulte que ni i_2 ni i_3 ne sont des isomorphismes. Par ailleurs, $X(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes. Comme X est projective, il résulte du théorème A que l'on a

$$D^{\varphi_3}(X) \simeq (\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^2.$$

Comment calculer $D^{\varphi_2}(X)$?

Posons (avec a et b dans $\mathbf{R}$) :

$$(e_2-e_1)+(e_3-e_1) = a^2,$$
$$(e_2-e_1)\times(e_3-e_1) = b^2.$$

De l'égalité dans $\mathbf{R}(X)$:

$$(\lambda-e_1) = \frac{(\lambda-e_1)^2+b^2}{a^2+(1/(\lambda-e_1)^2)\left[(x/t)^2+(y/t)^2+(z/t)^2\right]}$$

résulte que $(\lambda-e_1)$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbf{R}(X)$. L'équation de X_1 montre alors que $(\lambda-e_3)$ est dans $L^{\varphi_2}(X)$ (ce qu'on aurait d'ailleurs pu voir par la même méthode que pour $(\lambda-e_2)$), et que sa classe dans $D^{\varphi_2}(X)$ est l'inverse de (i. e. égale à !) celle de $(\lambda-e_2)$. On ne trouve donc pas ainsi d'autre élément évident de $D^{\varphi_2}(X)$. Mais je ne vois pas de façon de montrer que $D^{\varphi_2}(X)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^2$: je ne sais même pas si c'est un groupe fini.

6. Passé et avenir

On fixe dans ce paragraphe un corps k de caractéristique zéro (pour simplifier), une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, et on note $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. On note $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine des k-schémas formée des k-variétés, et $\mathcal{D}$ celle formée des k-variétés lisses. Etant donné X dans $\mathcal{C}$, et K une extension de k, on note $X_K = X \times_k K$, et on note $K(X)$ le corps des fractions de X_K. De plus, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Pour Z un schéma noethérien, on note $\operatorname{Div} Z$ le groupe des diviseurs (de Cartier) sur Z.

6.1. Intersection de la théorie des groupes $D^S(X)$ et $D^\Phi(X)$; le théorème de Geyer. — Soit S un k-tore, $\hat{S}$ son groupe des caractères. A toute variété X de $\mathcal{C}$, on associe le groupe :

$$D^S(X) = \operatorname{Ker}[H^1(\mathcal{G}, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{S}, \bar{k}(X)^*)) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}, \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\hat{S}, \operatorname{Div} \bar{X}))].$$

Ces groupes, qui généralisent des groupes introduits par Manin et liés au groupe de Brauer ([M], chap. VI, 1.3.), ont été introduits par Sansuc et l'auteur [CS 1], et étudiés dans [CS 4], auquel je renvoie pour des définitions équivalentes.

Dans le cas où K/k est une extension finie de corps, et où l'on prend pour S le k-tore noyau de la norme $R_{K/k}\, G_m \xrightarrow{N} G_{m/k}$, on obtient :

$$D^S(X) = D_K(X) = \operatorname{Ker}[k(X)^*/NK(X)^* \to \operatorname{Div} X/N \operatorname{Div} X_K],$$

où N désigne la norme de K à k. Ce cas particulier avait été étudié par l'auteur, particulièrement pour K/k galoisien, ce qui donnait une théorie dont le parallélisme avec celle de Manin ([M], chap. VI) est expliqué dans [CS 1] et [CS 4]. Ce cas a aussi servi de modèle pour la théorie développée dans les paragraphes 2 à 4, comme l'expliquent les énoncés 6.1.1 et 6.1.2 ci-après.

Introduisons le groupe :

$$D'_K(X) = \left\{ f \in k(X)^*, \forall P \in X, \begin{Bmatrix} \exists u \in \mathcal{O}^*_{X,P} \\ \exists g \in K(X)^* \end{Bmatrix}, f = u . N(g) \right\} \Big/ NK(X)^*.$$

En utilisant le fait qu'un faisceau inversible sur X_K peut être trivialisé par l'image réciproque (*via* $X_K \to X$) d'un recouvrement ouvert (Zariski) de X (ce qui résulte du fait qu'un faisceau inversible sur un anneau semi-local est libre), on obtient un homomorphisme, évidemment injectif :

$$\rho : \quad D_K(X) \to D'_K(X).$$

6.1.1. PROPOSITION. — *Si X est lisse sur k, la flèche ρ est un isomorphisme, et les deux groupes coïncident encore avec le groupe :*

$$\left\{\begin{matrix} f \in k(X)^*, \forall \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathrm{U} \text{ ouvert affine de } X, \\ \exists u \in k(X)^* \text{ inversible en chaque } P_i, \\ \exists g \in K(X)^*, f = u.N(g) \end{matrix}\right\} \Big/ NK(X)^*.$$

Démonstration. — Le même argument que ci-dessus montre que ρ se factorise à travers le groupe défini dans l'énoncé. Il suffit donc de montrer que ρ est un isomorphisme. Cela résulte par application au diviseur de f du lemme suivant, qui vaut d'ailleurs pour un morphisme fini localement libre de schémas réguliers :

LEMME. — *Soit X/k un k-schéma lisse, et K/k une extension finie de corps. Soit $\pi : X_K \to X$ la projection naturelle. Soit D un diviseur sur X. S'il existe un recouvrement de X par des ouverts (Zariski) U tels que la restriction de D à U soit la norme d'un diviseur sur U_K, alors D est, globalement, la norme d'un diviseur sur X_K.*

Démonstration. — Comme X et X_K sont réguliers, les diviseurs de Cartier s'identifient aux diviseurs de Weil sur ces schémas. Soit :

$$D = \sum\nolimits_{x \in X^{(1)}} n_x x \tag{6.1}$$

la décomposition de D suivant les points de codimension 1 de X. Soit U un ouvert contenant l'un des x apparaissant dans (6.1) avec un coefficient non nul, mais ne contenant aucun des autres, et tel que, sur U, la restriction de D soit la norme d'un diviseur Δ sur U_K. Ecrivons :

$$\Delta = \sum\nolimits_{y \in U_K^{(1)}} m_y y.$$

On obtient donc :

$$n_x x = N_{K/k}\left(\sum\nolimits_{y \in X_K^{(1)};\, \pi(y)=x} m_y y\right). \tag{6.2}$$

Comme ceci vaut pour tous les x apparaissant dans (6.1) avec un coefficient non nul, il suffit d'ajouter les différentes égalités (6.2), et l'assertion est démontrée. (Le point essentiel est qu'un diviseur *de Weil* sur un ouvert d'un schéma « est » un diviseur de Weil sur tout le schéma.)

6.1.2. COROLLAIRE. — *Soit $K = k(\sqrt{a})$ une extension quadratique, et soit X une k-variété lisse. Le groupe $D_K(X)$ coïncide avec les groupes $D^{\Phi_a}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi_a}(X)$ définis par la forme quadratique multiplicative*

$$\Phi_a(x, y) = x^2 - ay^2.$$

C'est ce corollaire, ainsi que les bonnes propriétés des groupes $D^S(X)$, qui justifie l'introduction *a priori* des groupes $D^{\Phi}(X)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(X)$, pour Φ forme quadratique multiplicative quelconque.

6.1.3. LEMME. — *Pour K/k une extension galoisienne finie (de corps) de groupe de Galois G, et X une k-variété lisse complète ayant un k-point, on a une suite exacte scindée :*

$$1 \to k^*/NK^* \to D_K(X) \to H^{-1}(G, \operatorname{Pic} X_K) \to 1.$$

C'est facile, et bien connu (*voir* [CS 4]); le cas particulier, où $k = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$ et X est une courbe, est déjà dans [G 1], et l'argument général est le même.

6.1.4. THÉORÈME (GEYER). — *Soit $X/\mathbf{R}$ une courbe lisse projective et géométriquement intègre, avec $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. On a un isomorphisme*

$$H^{-1}(\operatorname{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}), \operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{s-1}.$$

Démonstration. — On prend $k = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$ dans 6.1.2 et 6.1.3, et on applique le théorème A.

En fait, GEYER démontre plus; en particulier, il étudie le cas $X(\mathbf{R}) = \emptyset$. Je renvoie à son article, où le lecteur trouvera expliqué le lien entre ce théorème et les travaux classiques de WEICHOLD, HARNACK, WITT.

6.2. COMPARAISON DES PROPRIÉTÉS DES GROUPES $D^S(X)$, $D^{\Phi}(X)$ ET $\tilde{D}^{\Phi}(X)$. — Pour X variant dans $\mathscr{D}$ (X lisse), on dispose de plusieurs groupes abéliens $F(X)$ associés. Dans le diagramme suivant, Φ varie parmi les k-formes quadratiques non singulières multiplicatives, et S varie parmi les k-tores. Pour a dans k^*, Φ_a est la forme quadratique introduite en 6.1.2. Les flèches signifient que la théorie d'un groupe se spécialise en la théorie du groupe but :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{D}^{\Phi}(X) \arrow[dl] \arrow[drrr] & & D^{\Phi}(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & D^S(X) \arrow[dl] \\
\tilde{D}^{\varphi_{n/\mathbf{R}}}(X) & & D^{\varphi_{n/\mathbf{R}}}(X) & & \tilde{D}^{\Phi_a}(X) = D^{\Phi_a}(X) &
\end{tikzcd}$$

Voici une liste des propriétés connues des groupes $F(X)$; les assertions concernant D^{Φ} et $\tilde{D}^{\Phi}$ sont dans cet article, celles concernant D^S sont dans [CS 1] et [CS 4] (*cf.* déjà [CS 3], § 3 et 4).

(*a*) Fonctorialité contravariante pour D^S, D^Φ, et, en se limitant aux variétés de type semi-local, pour $\tilde{D}^\Phi$.

(*b*) $F(k) = F(\mathbf{A}_k^n) = F(\mathbf{P}_k^n)$ pour $F = D^S, D^\Phi, \tilde{D}^\Phi$.

(*c*) Accouplement bilinéaire

$$Z_0(X) \times F(X) \to F(k),$$

qui, pour X/k propre, induit un accouplement :

$$X(k)/R \times F(X) \to F(k)$$

pour $F = D^S, D^\Phi, \tilde{D}^\Phi$, et qui, pour X/k projectif, induit un accouplement

$$A_0(X) \times F(X) \to F(k)$$

(où $A_0(X)$ est le groupe des classes de zéro-cycles sur X pour l'équivalence rationnelle) pour $F = D^S, \tilde{D}^\Phi$.

(*d*) Pour X variant parmi les variétés de $\mathscr{D}$ qui sont complètes, $D^S(X)$ est un invariant k-birationnel.

Pour $k = \mathbf{R}$, et X variant parmi les variétés de $\mathscr{D}$ projectives de dimension n, le groupe $\tilde{D}^{\varphi_n}(X) = D^{\varphi_n}(X)$ est un invariant $\mathbf{R}$-birationnel : ceci résulte du théorème A et de l'invariance $\mathbf{R}$-birationnelle du nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$, pour X complète et lisse.

(*e*) Il n'y a pas lieu d'introduire de variante semi-locale de D^S (*voir* par exemple 6.1.1). Il y a coïncidence entre $\tilde{D}^\Phi(X)$ et $D^\Phi(X)$ dans les cas : $\Phi = \Phi_a$; $k = \mathbf{R}$, $\Phi = \varphi_n$, $X/\mathbf{R}$ projective de dimension n.

(*f*) Pour X dans $\mathscr{D}$, X complète, telle que $X(k)$ soit non vide, si $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est un $\mathscr{G}$-module de permutation, les groupes $D^S(X)$ sont réduits à $D^S(k)$ (*cf.* par exemple 6.1.3), mais l'analogue n'est pas vrai pour les groupes $\tilde{D}^\Phi(X)$ ou $D^\Phi(X)$, comme le montre l'exemple du paragraphe 5.

6.3. Questions.

6.3.1. *Question semi-locale.* — Pour X dans $\mathscr{C}$ (ou même dans $\mathscr{D}$), y a-t-il coïncidence entre les groupes $\tilde{D}^\Phi(X)$ et $D^\Phi(X)$? En d'autres termes, si une fonction de $k(X)^*$ admet une écriture locale en tout point de X (par rapport à une forme multiplicative donnée Φ), si l'on se donne un ensemble fini de points de X inclus dans un ouvert affine, existe-t-il une écriture locale pour la fonction simultanément en chacun des points?

On observera qu'un problème analogue se présente dans la théorie de KNEBUSCH ([K 3], chap. III, § 8).

6.3.2. *Invariance birationnelle.* — Au vu de 6.2 (*d*), il est tentant de conjecturer que les groupes $D^{\Phi}(X)$ sont des invariants k-birationnels des variétés de $\mathscr{D}$ qui sont complètes. Ceci fournirait une autre démonstration algébrique de la non **R**-rationalité de la **R**-variété du paragraphe 5 (noter cependant que pour montrer qu'un groupe $D^{\Phi}(X)$ n'est pas réduit à $D^{\Phi}(k)$, la seule méthode générale dont pour l'instant on dispose, mais c'est seulement une condition suffisante, est de montrer que l'accouplement (X complet)

$$X(k)/R \times D^{\Phi}(X) \to D^{\Phi}(k)$$

est non trivial). Il semble déjà non évident d'établir, pour Φ forme quadratique multiplicative quelconque, l'invariance de $D^{\Phi}(X)$ dans l'éclatement en un point rationnel d'une k-surface propre et lisse. Une question voisine est la suivante.

Question. — Soit A un anneau local régulier de dimension $\geqslant 2$, contenant k, et d'idéal $\mathfrak{m}$. Soit f un élément du corps des fractions de A admettant une écriture locale en tout point de $\operatorname{Spec} A - \mathfrak{m}$. En admet-il une aussi en $\mathfrak{m}$?

6.3.3. *Problèmes sur les réels.* — Soit X variant parmi les **R**-variétés lisses complètes avec $X(\mathbf{R})$ non vide. On dispose de groupes $D^{\Phi_i}(X)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n = \dim X$ (ceux pour $i \geqslant \dim X$ sont tous égaux (*cf.* § 1, **R.3**) et d'homomorphismes évidents :

$$\theta_i : \quad D^{\Phi_i}(X) \to D^{\Phi_{i+1}}(X)$$

(*a*) Il résulte de 6.1.2, 6.1.3 et de la finitude de $H^1(\mathbf{R}, A)$ pour une **R**-variété abélienne A que le groupe $D^{\Phi_1}(X)$ est fini. Il résulte de 1.8 que le groupe $D^{\Phi_n}(X)$ est fini. Qu'en est-il des groupes intermédiaires (*cf.* 5.3)?

(*b*) En général, les θ_i ne sont ni injectifs ni surjectifs. Cependant, dans le cas $n = 1$, il résulte de [K 2] (§ 2, prop. 2.4), modulo une traduction du type 6.1, que θ_0 est surjectif. Les quelques exemples dont nous disposons (*cf.* § 5, et les exemples discutés dans [CS 4]) suggèrent la question suivante.

Question. — L'application θ_{n-1} est-elle surjective?

(*c*) Pour k réellement clos quelconque, le même argument qu'en (*a*) (*cf.* [G 2], et [K 2] (2.8)) montre que $D^{\Phi_1}(X)$ est fini. Ceci a été utilisé par KNEBUSCH [K 2] pour étudier les « composantes connexes » des courbes définies sur de tels corps. Pour X/k de dimension n, $D^{\varphi_n}(X)$ est-il fini?

6.3.4. Pour X variant dans $\mathscr{C}$, on dispose d'un homomorphisme *surjectif :*

$$\lambda : \quad H^1_{et}(X, S) \rightarrow D^S(X)$$

et, pour X dans $\mathscr{D}$, l'accouplement naturel

$$X(k) \times H^1_{et}(X, S) \rightarrow H^1_{et}(k, S) \simeq D^S(k),$$

qui à un point et à un torseur associe la fibre du torseur en ce point, ne dépend que de l'image de la classe du torseur par λ, et c'est ainsi qu'on obtient l'accouplement 6.2 (c).

Cette situation permet de manipuler $D^S(X)$ avec souplesse : le point est que le groupe $H^1_{et}(X, S)$ est un foncteur contravariant en X pour X variant dans la catégorie des k-schémas (et pas seulement dans $\mathscr{D}$).

Dans le cas des groupes D^Φ, avec Φ forme quadratique multiplicative quelconque, on ne peut sans doute rien espérer de semblable. Cependant, dans le cas de la forme notée $\langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle$, c'est-à-dire :

$$\varphi_{a,b}(x, y, z, t) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$$

qui est la norme réduite de l'algèbre de quaternions $A = ((a, b)/k)$, que l'on supposera non décomposée sur k, en utilisant la suite exacte de groupes algébriques

$$1 \rightarrow SL(A) \rightarrow GL(A) \xrightarrow{Nred} G_{m/k} \rightarrow 1$$

et le fait que

$$H^1_{Zar}(X, GL(A)) \simeq H^1_{et}(X, GL(A)),$$

on obtient une application d'*ensembles*

$$H^1_{et}(X, SL(A)) \rightarrow D^{\varphi_{a,b}}(X).$$

Mais je ne sais même pas si cette application est *surjective*, faute de disposer dans ce cas d'un analogue de 6.1.1.

6.3.5. La remarque (f) de 6.2, ainsi que ce qui précède, suggère une question générale : quel est le lien entre les groupes $D^\Phi(X)$ et les sous-variétés de X de codimension > 1, et les fibrés vectoriels sur X de rang plus grand que 1? Quel est le lien entre les groupes $D^{\Phi}(X)$ et le groupe de Witt $W(X)$ défini par KNEBUSCH dans [K 3]? Dans le cas $k = \mathbf{R}$, X projective et lisse de dimension n, et $\Phi = \varphi_n$, une réponse à cette question permettrait peut-être, *via* le théorème A, de résoudre le problème 16 de [K 4] (p. 369) : les signatures sur $W(X)$ associées à deux composantes connexes différentes de $X(\mathbf{R})$ sont-elles différentes?

6.3.6. La dernière question est motivée par la théorie de la « descente », la description des torseurs universels ([CS 1, 2, 4]) sur les surfaces de Châtelet et l'analogie entre les équations de ces surfaces et celle de la variété X_1 du paragraphe 5 (qui a d'ailleurs été trouvée ainsi).

Question. — La variété de $\mathbf{A}^7_{\mathbf{R}}$ avec coordonnées $(x, y, z, \lambda, u, v, w, t)$ d'équation

$$x^2+y^2+z^2 = (\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3),$$
$$\lambda-e_2 = u^2+v^2+w^2+t^2,$$

avec $e_1 < e_2 < e_3$ est-elle $\mathbf{R}$-rationnelle?

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARTIN (E.). — Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg*, t. 5, 1927, p. 100-115.

[AS] ARTIN (E.) und SCHREIER (O.). — Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg*, t. 5, 1927, p. 85-99.

[B1] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 5 à 10. Nouvelle édition. — Paris, Hermann, 1974.

[B2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*. Chap. 8. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).

[CL] CHOI (M.-D.) and LAM (T.-Y.). — An old question of Hilbert, "*Conference on quadratic forms* [1976. Kingston]", p. 385-405. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[CS1] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Torseurs sous des groupes de type multiplicatif, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, série A, p. 1113-1116.

[CS2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 284, 1977, série A, p. 967-970.

[CS3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — La R-équivalence sur les tores, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 10, 1977, p. 175-230.

[CS4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — *La première descente sur les variétés rationnelles* (en préparation).

[G1] GEYER (W. D.). — Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichold über reelle algebraische Funktionenkörper, "*Algebraische Zahlentheorie* [1964. Oberwolfach]", p. 83-98. — Mannheim, Bibliographisches Institut, 1966 (*Berichte aus dem mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach*, 2).

[G2] Geyer (W. D.). — Dualität bei abelschen Varietäten über reell abgeschlossenen Körpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 293/294, 1977, p. 62-66.

[I] Iskovskih (V. A.). — Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles [en russe], *Mat. Sbornik*, t. 74, 1967, p. 608-638; et [en anglais] *Math. of the USSR-Sbornik*, t. 3, 1967, p. 563-587.

[K1] Knebusch (M.). — Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 24, 1973, p. 279-299.

[K2] Knebusch (M.). — On algebraic curves over real closed fields, *Math. Z.*, t. 150, 1976, p. 49-70; et t. 151, 1976, p. 189-205.

[K3] Knebusch (M.). — Symmetric bilinear forms over algebraic varieties, *Conference on quadratic forms* [1976. Kingston], p. 103-283. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[K4] Knebusch (M.). — Some open problems, *Conference on quadratic forms* [1976. Kingston], p. 361-370. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in pure and applied Mathematics*, 46).

[L] Lam (T.-Y.). — *The algebraic theory of quadratic forms*. — Reading, Benjamin, 1973 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[M] Manin (Yu. I.). — *Formes cubiques, algèbre, géométrie et arithmétique* [en russe]. — Moskva, 1972; et *Cubic forms, algebra, geometry and arithmetic*. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1974 (*North. Holland mathematical Library*, 4).

[P1] Pfister (A.). — Multiplikative quadratische Formen, *Arch. der Math.*, t. 16, 1965, p. 363-370.

[P2] Pfister (A.). — Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.*, t. 4, 1967, p. 229-237.

[W] Witt (E.). — Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate, Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, *J. für reine und angew. Math.*, t. 171, 1934, p. 4-11.

(Texte reçu le 4 mai 1977.)

Jean-Louis Colliot-Thélène,
Mathématiques, Bât. 425,
Université de Paris-Sud,
Campus universitaire,
91405 Orsay.