

BULLETIN DE LA S. M. F.

MIRELLA KRÉE

Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 141-163

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__141_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉ DE TRACE EN DIMENSION INFINIE
D'ESPACES DU TYPE SOBOLEV**

par

MIRELLA KRÉE

[Paris, Université Pierre-et-Marie-Curie]

RÉSUMÉ. — Soit X un espace de Hilbert réel séparable et s réel quelconque. On donne d'abord une définition équivalente simple des espaces $K^s(X)$ du type Sobolev introduits dans [7], [8]. On démontre pour ces espaces des propriétés d'interpolation et de comportement vis-à-vis des translations; puis une propriété de trace sur les hyperplans, analogue à la propriété de trace des espaces de Sobolev usuels H^s (voir [11]). La propriété est finalement étendue aux espaces $K^s(X, l)$ de protenseurs distributions l fois contravariants sur X .

Introduction

Dans l'espace \mathbf{R}^n , le point générique est noté $x = (x_1, x')$, avec $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Soit k un entier positif ou nul et s réel, $s > 1/2 + k$.

On sait que, pour $j = 0, 1, \dots, k$ et tout élément $f(x) = f(x_1, x')$ de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$, la dérivée $(\partial/\partial x_1)^j f$ définit une application continue bornée $x_1 \rightarrow (\partial/\partial x_1)^j f(x_1, x')$ de \mathbf{R} dans $H^{s-(1/2)-j}(\mathbf{R}^{n-1})$. Ceci permet de définir pour chacune de ces valeurs de j , la trace $\gamma_j f$ d'ordre j de f sur l'hyperplan $x_1 = 0$ par

$$(\gamma_j f)(x') = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^j f(0, x').$$

On sait de plus que l'application

$$H^s(\mathbf{R}^n) \rightarrow \prod_{j=0}^k H^{s-(1/2)-j}(\mathbf{R}^{n-1}) \\ f \mapsto (\gamma_0 f, \gamma_1 f, \dots, \gamma_k f)$$

est continue surjective.

Les propriétés dites de trace ou de valeur au bord sont très utiles dans l'étude des problèmes aux limites, et en particulier dans la théorie générale des problèmes aux limites elliptiques et dans l'interprétation des problèmes

aux limites variationnelles en utilisant des formules de Green [11]. Notre but est de rendre possibles des applications analogues en dimension infinie, les espaces H^s étant remplacés par les espaces K^s introduits par Paul KRÉE dans [7] et [8] pour s réel quelconque, et par N. N. FROLOV [1] et L. GROSS [2] pour s entier positif.

Dans le premier paragraphe, on donne une définition des espaces K^s , équivalente à la définition de [8]. Cette définition est directe en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir la théorie de la dérivation au sens des pro-distributions, ni la représentation des classes de Lebesgue vectorielles par des protenseurs distributions.

On donne quelques propriétés des espaces K^s qui seront utilisées par la suite, et une caractérisation des transformées de Fourier des éléments de K^s . Les théorèmes de trace sont étudiés au paragraphe 3. On notera que les méthodes de démonstration, et en particulier de « relèvement », sont très différentes de celles utilisées en dimension finie. Notons que l'extension vectorielle qui est sans intérêt en dimension finie est essentielle en dimension infinie. En effet, les opérateurs de dérivation dans un nombre fini de direction permettent en dimension finie de caractériser toutes les dérivées d'une fonction. Ceci n'est plus vrai en dimension infinie : l'appartenance à une classe du type K^s des dérivées de f fait intervenir une propriété d'ensemble des dérivées de f dans toutes les directions. Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [4] et [5]. On notera qu'ils ont aussi un intérêt en dimension finie. Par exemple, ils permettent de résoudre le problème de Dirichlet non homogène relatif à l'opérateur $\Delta - x$ grad considéré sur l'ouvert compris entre deux hyperplans parallèles; voir aussi des applications en dimension infinie dans [10].

Je remercie très vivement Laurent SCHWARTZ dont les conseils m'ont permis d'améliorer la forme de ce travail.

1. Espace $K^s(X_i)$ en dimension finie

1.1. Notations et rappels

Soit X_i un espace euclidien de dimension n .

On rappelle que l'espace $\mathcal{O}_c(X_i)$ des fonctions \mathcal{C}^∞ à croissance très lente sur X_i est l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables sur X_i s'écrivant $\varphi = P\psi$, où P est un polynôme (dépendant de φ), et ψ une fonction \mathcal{C}^∞ dont toutes les dérivées tendent vers zéro à l'infini. Le dual de $\mathcal{O}_c(X_i)$ est l'espace $\mathcal{O}'_c(X_i)$ des distributions à décroissance rapide (voir [3]).

On notera $\mathcal{L}'(X_i)$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{O}'_c(X_i)$ dont la transformée de Fourier est analytique. Un élément de $\mathcal{L}'(X_i)$ est appelé distribution à décroissance ultra-rapide. La forme bilinéaire de dualité entre $\mathcal{O}_c(X_i)$ et $\mathcal{O}'_c(X_i)$ est notée $\langle T, \varphi \rangle$. L'espace des formes antilinéaires continues sur $\mathcal{O}_c(X_i)$ est noté $'\mathcal{O}_c(X_i)$; et la forme sesquilinéaire d'antidualité est notée $\langle T | \varphi \rangle$. L'anti-isomorphisme canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{O}'_c(X_i)$ sur $'\mathcal{O}_c(X_i)$ applique $\mathcal{L}'(X_i)$ sur $'\mathcal{L}(X_i)$. Soit ν_i la mesure gaussienne canonique sur X_i :

$$\nu_i = \alpha_i(x) dx \quad \text{avec} \quad \alpha_i(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|^2/2).$$

L'espace de Lebesgue complexe L^2 relatif à ν_i est noté $L^2(X_i, \nu_i)$; cet espace de Hilbert complexe est isomorphe à son antidual. L'adjointe de l'injection continue de $\mathcal{O}_c(X_i)$ dans $L^2(X_i, \nu_i)$ identifie cet espace à un sous-espace de $'\mathcal{O}_c(X_i)$:

$$(1) \quad \mathcal{O}_c(X_i) \subset L^2(X_i, \nu_i) \subset '\mathcal{O}_c(X_i).$$

(2) *Coefficients d'une antidistribution* $T \in '\mathcal{L}(X_i)$. — Si H_0, H_1, \dots est la suite des polynômes d'Hermite, on pose, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathcal{H}_n(t) = 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(t/\sqrt{2}) = (n!)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+ix)^n d\nu_1(x).$$

Soient (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de $x \in X_i$, rapporté à une base orthonormée. Pour tout multi-indice $k = (k_1, \dots, k_n)$, on pose

$$\mathcal{H}_k(x) = \mathcal{H}_{k_1}(x_1) \dots \mathcal{H}_{k_n}(x_n).$$

Les \mathcal{H}_k forment une base orthonormée de $L^2(X_i, \nu_i)$. Pour toute $T \in '\mathcal{L}(X_i)$, on définit la famille $(a_k)_k$ de ses coefficients d'Hermite par

$$a_k = \langle T | \mathcal{H}_k \rangle.$$

Alors toute $T \in '\mathcal{L}(X_i)$ est caractérisée par ses coefficients d'Hermite; car si $a_k = 0$ pour tout $k = 0$, alors la transformée de Fourier de T :

$$\hat{T}(x) = \int \exp(-i \langle x, y \rangle) dT(y)$$

est nulle, ce qui entraîne $T = 0$.

Par exemple sur \mathbf{R} , la distribution de Fresnel (ou de Feynman) $F = \exp(-ix^2) dx$ a pour image de Fourier $\hat{F} = \text{Cte} \exp(ix^2/4)$ qui est une fonction analytique. Vu [12], F appartient à \mathcal{O}'_c , donc F est à

décroissance ultra-rapide au sens ci-dessus; ses coefficients a_k la caractérisent, et ils peuvent être calculés par la formule des résidus. Notons cependant que, vu [12], F n'est pas à décroissance très rapide au sens de [3] (chap. II, § 4, n° 4).

(3) *Dérivation relative.* — Posons

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \check{\partial}_i = \alpha_n^{-1} \partial_i \alpha_n = \partial_i - x_i,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta = \partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}, \quad \check{\partial}^\beta = \check{\partial}_1^{\beta_1} \dots \check{\partial}_n^{\beta_n} \quad \text{si } \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

En prenant l'adjoint de l'opérateur $-\check{\partial}_i$ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on définit un opérateur $\tilde{\partial}_i$ de $'\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, appelé opérateur de dérivation de densité dans la direction x_i , car

$$\tilde{\partial}_i(\varphi v_i) = (\partial_i \varphi) v_i \quad \text{si } \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n).$$

Plus généralement, si $V = \sum_1^n \alpha_i e_i$ est un vecteur quelconque de X_i , on définit l'opérateur $\tilde{\partial}/\partial V$ de dérivation de densité dans la direction V par $\sum_1^n \alpha_i \tilde{\partial}_i$. Notons que $'\mathcal{O}_c(X_i)$ est stable par ces opérateurs.

L'adjoint de $-\partial_i$ opérant dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on définit l'opérateur $\tilde{\partial}_i$ de dérivation absolue $'\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ qui prolonge l'opérateur $\tilde{\partial}_i$ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

1.2. Définition des espaces $K^s(X_i)$

La norme de tout élément φ de $L^2(X_i, v_i)$ est noté $\|\varphi\|$.

Pour s entier ≥ 0 , on définit $K^s(X_i)$ comme l'espace des $f v_i \in '\mathcal{L}(X_i)$ telles que $(\partial/\partial x)^\beta f \in L^2(X_i, v_i)$ pour tout multi-indice β de longueur $\leq s$. On munit $K^s(X_i)$ de la norme

$$(4) \quad \|f v\|'_s = \left(\sum_{i=0}^s \left\| \|D^i f\| \right\|^2\right)^{1/2} \quad \text{avec } \left\| \|D^i f\| \right\|^2$$

$$= \sum_{|\alpha|=i} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f \right\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Développons f selon les $\mathcal{H}_\gamma : f(x) = \sum_\gamma a_\gamma \mathcal{H}_\gamma(x)$, où γ varie dans l'ensemble des multi-indices d'ordre n .

Si on pose $P_0(t) \equiv 1; P_1(t) \equiv t; P_2(t) \equiv t(t-1), \dots$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = \sum_\gamma a_\gamma \sqrt{P_{\alpha_1}(\gamma_1) \dots P_{\alpha_n}(\gamma_n)} \mathcal{H}_{\gamma_1 - \alpha_1}(x_1) \dots \mathcal{H}_{\gamma_n - \alpha_n}(x_n)$$

et

$$(\|f v\|'_s)^2 = \sum_{\gamma} |a|^2 \sum_{l=0}^s \left[\sum_{|\alpha|=l} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} P_{\alpha_1}(\gamma_1) \dots P_{\alpha_n}(\gamma_n) \right].$$

Or le crochet est égal à $P_l(|\gamma|)$, car, pour tout nombre complexe z et tout entier $l \geq 1$, on a la relation

$$P_l(t+z) = \sum_{\beta=0}^l \binom{l}{\beta} P_{\beta}(t) P_{l-\beta}(z),$$

facilement vérifiable par récurrence. D'où :

$$(\|f v_i\|'_s)^2 = \sum_{\gamma} |a_{\gamma}|^2 Q(|\gamma|) \quad \text{avec} \quad Q(t) = t^s + \dots + 1.$$

Or $Q(t) > 0$ pour tout entier $t \geq 0$. On peut donc trouver une constante $C(s)$, indépendante de n , telle que

$$C^{-1} \|f\|'_s \leq \|f\|_s \leq C \|f\|'_s,$$

où l'on a introduit sur $K^s(X)$ la norme équivalente

$$(5) \quad \|f\|_s = \left(\sum_{\gamma} |a_{\gamma}|^2 (1 + |\gamma|)^s \right)^{1/2}.$$

Cette norme permet de définir $K^s(X_i)$ pour s positif quelconque.

(6) DÉFINITION. — Si s est réel et positif, on définit $K^s(X_i)$ comme l'espace des fonctions f telles que

$$f \in L^2(X_i, v_i) \quad \text{et} \quad \sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^s < +\infty,$$

a_k étant les coefficients de la distribution à décroissance ultra-rapide $f v_i$ sur X_i

$$a_k = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) \exp(-\|x\|^2/2) \mathcal{H}_k(x) dx.$$

Si $s > 0$, on a les inclusions suivantes

$$(7) \quad \mathcal{D} \subset K^s \subset_{\text{dense}} L^2(X_i, v_i) \subset '(K^s) \subset '\mathcal{D},$$

les deux dernières inclusions étant les adjointes des premières.

Par conséquent, l'antidualité entre \mathcal{D} et $'\mathcal{D}$ correspondant à ces inclusions n'est pas définie comme d'habitude par $\int f \bar{g} dx$ mais par $\int f \bar{g} d v$.

Avec ces conventions on a le théorème suivant.

(8) THÉORÈME. — Tout élément $T \in '(K^s)$ avec $s \geq 0$ est une antidistribution à décroissance ultra-rapide $T \in '\mathcal{L}(X_i)$.

Ce théorème résulte du lemme suivant :

(9) LEMME. — Toute forme antilinéaire continue T sur K^s s'écrit :

$$T = \sum_{|\alpha| \leq \sigma} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (g_\alpha v_i) \quad \text{avec } g_\alpha \in L^2(X_i, v_i),$$

σ étant un entier non inférieur à s .

En effet, ce lemme entraîne que $\hat{T}(x) = \sum (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{g_\alpha v_i}$.

Preuve du lemme. — La forme antilinéaire T sur K^s est aussi une forme sur K^σ .

Considérons maintenant l'application injective

$$K^\sigma \rightarrow \prod_{|\alpha| \leq \sigma} L^2(X_i, v_i), \\ f \mapsto \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \right\}.$$

Elle identifie K^σ au sous-espace vectoriel normé $\alpha(K^\sigma)$ de

$$\prod_{|\alpha| \leq \sigma} L^2(X_i, v_i).$$

On en déduit, par le théorème de Hahn-Banach, que si T est une forme antilinéaire continue sur K^σ , elle se prolonge en une forme antilinéaire continue sur $\prod_{|\alpha| \leq \sigma} L^2(X_i, v_i)$, donc il existe une famille $(g_\alpha)_\alpha$ d'éléments de $L^2(X_i, v_i)$ telle que, $\forall f \in K^s$,

$$(T, f) = \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \left(g_\alpha \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \right. \right) = \sum_{|\alpha| \leq \sigma} (-1)^{|\alpha|} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha g_\alpha \mid f \right).$$

Soit maintenant $T \in (K^s)'$, $s > 0$, on peut alors définir ses coefficients par rapport au système \mathcal{H}_k , et soit $a_k(T) = (T \mid \mathcal{H}_k)$.

Or K^s est identifié à l'espace des suites $a = (a_k)$ telles que

$$\sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^s < +\infty;$$

c'est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(a \mid b) = \sum_k a_k \bar{b}_k (1 + |k|)^s$ donc, pour le théorème de Riesz, étant donné une forme antilinéaire T sur K^s , il existe $\theta = (\theta_k) \in K^s$ tel que

$$\forall a \in K^s, \quad T(a) = (\theta \mid a) = \sum_k \theta_k \bar{a}_k (1 + |k|)^s.$$

En particulier, si $a = \mathcal{H}_k$,

$$a_k = T(\mathcal{H}_k) = \bar{a}_k (1 + |k|)^s,$$

donc $\theta_k = \bar{a}_k / (1 + |k|)^s$, et θ est tel que

$$\sum_k |\theta_k|^2 (1 + |k|)^s = \sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^{-s} < +\infty.$$

Inversement, en partant de θ , on peut définir un élément $T \in '(K^s)$. On peut donc poser la définition suivante qui prolonge (6).

(10) DÉFINITION. — Pour s réel quelconque, $K^s(X_i)$ est l'espace des anti-distributions T à décroissance ultra-rapide sur X_i , telles que la suite (a_k) de ses coefficients par rapport au système \mathcal{H}_k vérifie

$$\sum_k |a_k|^2 (1 + |k|)^s < +\infty.$$

K^{-s} est l'antidual de K^s , l'antidualité entre ces deux espaces prolongeant celle de $L^2(X_i, \nu_i)$. Pour tout $s \geq 0$, on a toujours les inclusions (7).

Pour tout s , l'espace $\mathcal{P}(X_i)$ des fonctions polynomiales sur X_i est dense dans $K^s(X_i)$.

1.3. Transformée de Fourier dans $K^s(X_i)$

Pour étudier la transformée de Fourier dans $K^s(X_i)$, on introduit les espaces de fonctions holomorphes suivants :

(11) DÉFINITION DE $F^s(X^c)$. — Soit s réel quelconque et X^c le complexifié de l'espace de Hilbert réel séparable X . On note $F^s(X^c)$ l'espace des fonctions entières sur X^c admettant un développement de Taylor à l'origine

$$(12) \quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \Phi(0, z)}{k!}$$

tel que

$$\|\Phi\|_s^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|D^k \Phi(0)\|^2 (1+k)^s}{k!} < \infty,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans le produit tensoriel hilbertien symétrique complété $\hat{\bigotimes}_k X^c$.

Notons que cette définition entraîne (vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz), la convergence normale et uniforme de la série de Taylor (12) sur toute boule de X^c .

(13) LEMME. — Soit s réel quelconque, et $\dim X_i = n$. Alors la transformation $\theta_i : T \mapsto \hat{T}(u) \exp(1/2 \|u\|^2)$ définit une isométrie de $K^s(X_i)$ muni de la norme $\|\cdot\|_s$ sur $F^s(X_i^c)$.

En effet, soit v_i la probabilité normale canonique sur X_i et $T = P v_i$ la distribution correspondant au polynôme $P(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, définie sur X_i . On a

$$P(x) = \sum_{|k| \leq N} a_k \mathcal{H}_k(x) \quad \text{avec } k = (k_1, \dots, k_n).$$

D'après une relation de [13], page 582, si $n \in \mathbf{N}$ et $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{H}_n v_i)(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_n(y) \exp(-i(u, y)) d v_i(y) \\ &= (-1)^n (n!)^{-1/2} u^n \exp(-u^2/2), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{F}(P v) = \exp(-(1/2) \|u\|^2) \Phi(u)$ avec $u = (u_1, \dots, u_n)$, et

$$\Phi(u) = \sum_{k=p}^N (k!)^{-1} \left(k! \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha u^\alpha (\alpha!)^{-1/2} (-i)^{|\alpha|} \right).$$

Considérons le polynôme de la dernière parenthèse comme un élément du produit tensoriel symétrique hilbertien $\odot_k X$, alors on voit que

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^N \frac{D^k \Phi(0, u)}{k!}$$

avec la norme de $D_k \Phi(0)$ dans cet espace égale à

$$\|D^k \Phi(0)\|^2 = \sum_{|j|=k} |a_j|^2,$$

on obtient :

$$\|\Phi\|_{F^s}^2 = \sum_{k=0}^N (\sum_{|j|=k} |a_j|^2) \frac{(1+k)^s}{k!} = \sum_k |a_k|^2 (1+|k|)^s = \|T\|_s^2.$$

D'où l'isométrie, par prolongement continu.

(14) *Remarque importante.* — Désignons par $\mathcal{D}(X_i) v_i$ l'espace des mesures φv_i ayant une densité $\varphi \in \mathcal{D}(X_i)$ par rapport à v_i ; et de même $K^s(X_i) v_i$ pour $s \geq 0$, $\mathcal{O}_c(X_i) v_i \dots$. En toute rigueur, il faudrait écrire en lieu de (1) et de (7) :

$$(15) \quad \mathcal{O}_c(X_i) v_i \subset L^2(X_i, v_i) v_i \subset {}' \mathcal{O}_c(X_i),$$

$$(16) \quad \mathcal{D}(X_i) v_i \subset K^s(X_i) v_i \subset L^2(X_i, v_i) v_i \subset K^{-s}(X_i) \subset {}' \mathcal{D}(X_i).$$

Cette dernière écriture fait apparaître clairement que les éléments de $K^s(X_i)$ et de $K^{-s}(X_i)$ sont de nature différente : toute $\varphi \in K^s(X_i)$ est une classe d'équivalence de fonctions et toute $\varphi \in K^{-s}(X_i)$ est une mesure généralisée. Si l'on voulait adopter un langage en accord avec (15) et (16),

les énoncés des propriétés deviendraient plus compliqués : dans (23), il faudrait distinguer les cas $s \geq 0$ et $s < 0$, dans (26) les trois cas $s \geq 1$, $0 \leq s < 1$ et $s < 0$. . . et la situation deviendrait inextricable pour les énoncés concernant la régularité elliptique des opérateurs différentiels. La même remarque s'applique à la théorie usuelle des espèces $H^s(X_i)$ de Sobolev, v étant remplacé alors par dx . Dans ces conditions, nous proposons de noter une fois pour toutes que la théorie dépend du choix initial d'une mesure (et d'une promesure dans ce qui suit), de bien noter la différence de nature géométrique entre éléments de K^s et de K^{-s} , entre les éléments de $\mathcal{D}(X_i)$ et de $\mathcal{D}(X_i) \vee_i \dots$, et d'adopter l'écriture (7) en la considérant comme une abréviation commode de (16).

2. Espaces $K^s(X)$ si X est de dimension quelconque

2.1. Rappels sur les prodistributions introduites par P. Krée [6]

On se limite au cas des prodistributions bornées sur un espace hilbertien réel séparable X , identifié à son dual. Une bonne famille F_u de sous-espaces de X est une famille filtrante croissante $(X_i)_{i \in I}$ de sous-espaces X_i de dimension finie, dont la réunion Ξ est dense dans X . Si $i \geq j$ (i. e. $X_j \subset X_i$), on note s_{ij} la projection orthogonale de X_i sur X_j . D'où un système projectif $\Pi_u = (X_i, s_{ij})$ d'espaces euclidiens. Pour tout $i \in I$, s_i désigne la projection orthogonale de X sur X_i .

(17) *Exemples de bonnes familles.*

(a) On peut prendre la bonne famille F_m de tous les sous-espaces de dimension finie.

(b) Si X est rapporté à une base orthonormée e_1, e_2, \dots on peut prendre la bonne famille F_v des X_n ($n \geq 1$), où X_n est engendré par e_1, \dots, e_n .

Étant donnée une bonne famille $F_u = (X_i)_i$, une fonction numérique φ définie sur X est dite u -cylindrique (ou simplement cylindrique si $F_u = F_m$) si elle se factorise à travers un X_i :

$$\exists i \in I, \quad \exists \varphi_i : X_i \rightarrow \mathbf{C}, \quad \varphi = \varphi_i \circ s_i$$

et X_i est appelé une base de φ . On définit ainsi l'espace $\mathcal{P}_{u\text{-cyl}}(X)$ des fonctions polynomiales u -cylindriques et l'espace $\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ des fonctions cylindriques à croissance lente sur X .

(18) DÉFINITION. — *L'espace X étant muni d'une bonne famille $F_u = (X_i)$, une u -prodistribution bornée T sur X est une famille $(T_i)_{i \in I}$ de distributions*

intégrables sur les espaces X_i vérifiant la condition de cohérence suivante : pour tout couple (i, j) tel que $i \geq j$, on a $s_{ij}(T_i) = T_j$.

Si $F_u = F_m$, on dit simplement que T est une prodistribution bornée. On note $\mathcal{O}'_{c\text{-cyl}}(X)$ l'espace formé par les prodistributions bornées $T = (T_i)$ telles que $T_i \in \mathcal{O}'_c(X_i)$ pour tout i ; c'est l'espace des prodistributions à décroissance rapide. On définit de même l'espace $\mathcal{L}'_{\text{cyl}}(X)$ des prodistributions à décroissance ultra-rapide sur X .

Pour toute $T \in \mathcal{O}'_{c\text{-cyl}}(X)$ et toute $\varphi \in \mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ de base X_i , on pose

$$(19) \quad \langle T, \varphi \rangle = \int \varphi(x) dT(x) = \langle T_i, \varphi_i \rangle.$$

Cette définition ne dépendant pas de la base choisie pour φ , on a une dualité naturelle entre $\mathcal{O}'_{c\text{-cyl}}(X)$ et $\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$. On définit naturellement l'espace $'\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ des anti-prodistributions à décroissance rapide. La forme sesquilinéaire d'antidualité entre $\mathcal{O}'_{c\text{-cyl}}(X)$ et $\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ est notée

$$\langle T | \varphi \rangle = \langle T, \bar{\varphi} \rangle.$$

(20) *Remarque.* — On a une situation analogue à la situation analysée en théorie des distributions usuelles :

(a) On peut définir le produit fT de $f \in \mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ et de $T \in '\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X), \quad \langle fT | \varphi \rangle = \langle T | \bar{f}\varphi \rangle.$$

En particulier, si $\nu = (\nu_i)_i$ désigne la promesure normale canonique sur X , on peut « identifier » toute $f \in \mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ à l'anti-prodistribution $g\nu$.

(b) Pour toute u -prodistribution bornée $T = (T_i)$ sur X , sa transformée de Fourier \hat{T} est la fonction suivante, définie sur Ξ

$$\forall \xi \in \Xi, \quad T(\xi) = \int \exp(-i \langle u, \xi \rangle) dT(x).$$

Ceci entraîne que, pour tout $j \in I$, la restriction de \hat{T} à X_j coïncide avec \hat{T}_j . Dans le cas où chaque \hat{T}_j se prolonge en une fonction entière sur X_j^c , \hat{T} se prolonge en une fonction Gateaux-analytique sur Ξ^c notée \hat{T} .

(21) DÉFINITION DE $K^s(X)$. — Pour s réel quelconque fixé, $K^s(X)$ désigne l'espace des anti-prodistributions bornées $T = (T_i)_i$ sur X telles que $T_i \in K^s(X_i)$ pour tout i et que

$$(22) \quad \|T\|_s = \sup_i \|T_i\|_s < \infty.$$

Notons que $K^s(X) \subset \mathcal{L}_{\text{cyl}}(X)$ et que $K^s(X)$ est un espace normé. L'espace $K^s(X)$ augmente lorsque s diminue; pour $s = 0$, on retrouve la classe de Segal $L^2(X, \nu)$; ceci résulte de [7] ou [8]. Noter que le lemme (13) montre que la définition de $K^s(X)$ ne dépend pas du choix d'une base orthonormée dans chaque X_i .

(23) THÉORÈME. — *Pour tout s réel, la transformation θ :*

$$T \xrightarrow{\theta} \left(u \mapsto \hat{T}(u) \exp\left(\frac{1}{2}u^2\right) \right)$$

réalise une isométrie de $K^s(X)$ sur $F^s(X^c)$.

Dans cet énoncé, u désigne l'élément générique de X^c et u^2 désigne la forme quadratique sur l'espace complexe X^c , qui prolonge la forme quadratique $x \rightarrow \|x\|^2$ sur l'espace vectoriel réel X .

Démonstration. — Si $u = v + \sqrt{-1}w$, on a

$$(\theta T)(u) = \exp\left(\frac{1}{2}u^2\right) \cdot \int \exp(-i\langle u, x \rangle) dT(x)$$

avec $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle + \sqrt{-1}\langle w, x \rangle$.

Pour simplifier l'écriture, ceci sera parfois noté ux . La restriction $(\theta T)_j$ de θT à X_j^c est définie, pour j quelconque dans I , par

$$\forall u \in X_j^c, \quad (\theta T)_j(u) = \int \exp(-\sqrt{-1}ux + \frac{1}{2}u^2) dT_j(x).$$

Donc $(\theta T)_j = \theta_j T_j$.

Vu le lemme (13), on a donc, pour toute $T \in K^s(X)$,

$$\|T\|_s = \sup_j \|(\theta T)_j\|_{F^s(X_j^c)} = \|\theta T\|_{F^s(X^c)}.$$

Réciproquement, pour toute $\Phi \in F^s(X^c)$, les prodistributions $T_j = \theta_j^{-1}\Phi_j$ (où Φ_j est la restriction de Φ à X_j^c) sont cohérentes, et vérifient

$$\|T\|_s = \sup_j \|T_j\|_s = \sup \|\theta_j T_j\| = \|\Phi\|.$$

(24) COROLLAIRE DU THÉORÈME (23). — *Par transport de structure, on obtient, pour tout s réel,*

(a) $K^s(X)$ est un espace de Hilbert.

(b) L'espace $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$ des fonctions polynomiales cylindriques est dense dans $K^s(X)$.

(c) $K^s(X)$ est invariant par le groupe orthogonal.

(25) *Coefficients d'une prodistribution* $T \in K^s(X)$. — Soit $(e_n)_n$ une base orthonormée quelconque de X , et Π_v le système projectif associé. Toute $\Phi \in F^s(X^c)$ est continue, donc elle est déterminée par l'ensemble $(\Phi_n)_n$ de ses restrictions Φ_n aux sous-espaces X_n . Vu le théorème (23), toute T de $K^s(X)$ est donc définie par la v -prodistribution $(T_n)_n$ avec $\Phi_n = \theta T_n$. Donc, vu (10) et (2), T est définie par la famille des nombres $a_k = \langle T_n | \mathcal{H}_k \rangle$ pour tout multi-indice $k = (k_1, \dots, k_n)$ et tout entier $n \geq 1$. Ces nombres, appelés les coefficients de T , vérifient les relations

$$a_{k_1 \dots k_n 0} = a_{k_1 \dots k_n}.$$

On peut donc considérer la famille des coefficients, comme étant indexée dans l'ensemble J des suites infinies $k = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots)$ d'entiers positifs, nuls à partir d'un certain rang.

On aura alors, pour toute $T \in K^s(X)$,

$$\|T\|_s = (\sum_{k \in J} |a_k|^2 (1 + |k|)^s)^{1/2}.$$

Plus généralement, soit $T = (T_n)$ une v -antiprodistribution à décroissance ultra-rapide sur X . Alors elle admet un développement unique en polynômes d'Hermite

$$T \sim \sum_{k \in J} a_k (\tilde{\mathcal{H}}_k v).$$

L'existence d'un tel développement permet de ramener l'étude des opérations sur les prodistributions à l'étude de suites numériques indexées dans J .

2.2. Opérateur de dérivation de densité dans $K^s(X)$

Soit V un vecteur quelconque de X , muni de la bonne famille maximale. On rappelle la définition de l'opérateur de dérivation de densité $\tilde{\partial}/\partial V$ dans $'\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$ associé à V (voir [8] et [9]). On note V_j la projection orthogonale de V sur un sous-espace X_j quelconque de dimension finie de X , et $\tilde{\partial}/\partial V_j$ l'opérateur de dérivation associé à V_j , opérant dans $'\mathcal{O}_c(X_j)$ [voir (3)]. On peut vérifier que si $T = (T_j)$ est une antiprodistribution quelconque de $'\mathcal{O}_{c\text{-cyl}}(X)$, alors la famille des antiproductions $\tilde{\partial}/\partial V_j T_j \in '\mathcal{O}_c(X_j)$ est cohérente. Elle définit donc une antiprodistribution sur X notée $\tilde{\partial}/\partial V T$.

(26) PROPOSITION. — Pour tout s réel et tout $V \in X$, l'opérateur $\tilde{\partial}/\partial V$ définit par restriction un opérateur continu de $K^s(X)$ dans $K^{s-1}(X)$.

On peut supposer $\|V\| = 1$, et soit (e_n) une base orthonormée de X telle que $e_1 = V$. Vu la densité dans $K^s(X)$ de $\mathcal{P}_{v\text{-cyl}}(X)$, on est amené à démontrer une inégalité

$$\exists C > 0, \left\| \frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1} ((P \circ s_n) v) \right\|_{s-1} \leq C \| (P \circ s_n) \|_s,$$

pour toute fonction polynomiale v -cylindrique du type $P \circ s_n$.

Posons :

$$P(x) = \sum_k a_k \mathcal{H}_k(x), \quad k = (k_1, \dots, k_n) = (k_1, k').$$

Or

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1} ((P \circ s_n) v) = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \circ s_n \right) v.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1} ((P \circ s_n) v) \right\|_{s-1}^2 &= \left\| \sum_k a_k \sqrt{k_1} \mathcal{H}_{k_1-1}(x_1) \mathcal{H}_{k'}(x') \right\|_{s-1}^2 \\ &= \sum |a_{k_1+1, k'}|^2 (1+k_1)(1+k)^{s-1} = \sum |a_{k_1, k'}|^2 k_1 |k|^{s-1}. \end{aligned}$$

Or, pour tout s réel, $a \geq 1$ et $b > 0$, on a

$$a(a+b)^{s-1} \leq C(1+a+b)^s \quad \text{avec } C = \sup \{1, 2^{-s}\},$$

d'où

$$\left\| \frac{\tilde{\partial}}{\partial e_1} ((P \circ s_n) v) \right\|_{s-1}^2 \leq C \| (P \circ s_n) v \|_s^2.$$

2.3. Les isométries Λ^ω

Soit ω un nombre complexe. On a, pour tout s , une isométrie

$$(27) \quad \begin{aligned} F^s(X^c) &\rightarrow F^{s+\Re e(\omega)}(X^c), \\ \Phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \Phi(0, z)}{k!} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k \Phi(0, z)}{k!} (1+k)^{-\omega/2}. \end{aligned}$$

En utilisant la transformation θ [voir théorème (23)], on en déduit pour tout s une isométrie notée Λ^ω de $K^s(X)$ sur $K^{s+\Re e(\omega)}(X)$. Notons qu'elle laisse invariante $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$. Si on choisit une base orthonormée quelconque $(e_n)_n$ de X , on peut expliciter cette application en faisant intervenir les coefficients d'une prodistribution de $K^s(X)$ par rapport à cette base. Plus précisément, si $T \in K^s(X)$ a pour coefficients les nombres a_k , les coefficients correspondants de $\Lambda^\omega T$ sont $(1+|k|)^{-\omega/2} a_k$:

$$a_k(\Lambda^\omega T) = (1+|k|)^{-\omega/2} a_k(T).$$

2.4. Propriété d'interpolation

(28) PROPOSITION. — On se donne deux Hilbert réels X et Y , munis de leurs bonnes familles maximales, et deux couples de réels $(s_0, s_1), (t_0, t_1)$. Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$ à $\mathcal{L}_{\text{cyl}}(Y)$ qui se prolonge par continuité en deux opérateurs linéaires continus : $K^{s_j}(X) \rightarrow K^{t_j}(Y)$, $j = 0, 1$, de normes inférieures respectivement à des constantes positives C_0 et C_1 . Posons :

$$s(\theta) = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad t(\theta) = (1 - \theta)t_0 + \theta t_1, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Alors A se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu de $K^{s(0)}(X)$ à $K^{t(0)}(Y)$ dont la norme est majorée par la constante $C_0^{1-\theta} C_1^\theta$.

Démonstration. — Posons $z = \theta + iy$. Soit $f \in \mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$ et $g \in \mathcal{P}_{\text{cyl}}(Y)$.

Considérons la fonction de la variable complexe z :

$$(29) \quad F(z) = (A \Lambda^{s(z)} f \mid \Lambda^{-\bar{t}(z)} g)$$

avec $s(z) = (1 - z)s_0 + z s_1$ et $t(z) = (1 - z)t_0 + z t_1$, l'antidualité intervenant dans (29) étant celle entre $K^{t(0)}(Y)$ et $K^{-t(0)}(Y)$.

Vu l'hypothèse, on a

$$\mid F(iy) \mid \leq C_0 \mid f \mid_0 \mid g \mid_0 \quad \text{et} \quad \mid F(1 + iy) \mid \leq C_1 \mid f \mid_0 \mid g \mid_0.$$

De plus, F est analytique si $0 < \Re z < 1$, et bornée continue sur la bande fermée. D'après le théorème des trois droites, on a

$$\mid F(\theta) \mid = \mid (A \Lambda^{s(\theta)} f \mid \Lambda^{-\bar{t}(\theta)} g) \mid \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \mid f \mid_0 \mid g \mid_0.$$

En posant,

$$f_1 = \Lambda^{s(0)} f, \quad g_1 = \Lambda^{-\bar{t}(\theta)} g,$$

on obtient

$$\mid (A f_1, g_1) \mid \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \mid f_1 \mid_{s(0)} \mid g_1 \mid_{-t(\theta)},$$

d'où

$$\mid A f_1 \mid_{t(\theta)} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \mid f_1 \mid_{s(0)},$$

car f_1 et f_1 décrivent $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$ et $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(Y)$ respectivement. Cette inégalité prouve la proposition.

2.5. Effet des translations

(30) PROPOSITION. — Soit $a \in X$. L'application

$$U_a : f(x) v \mapsto f(x - a) \exp \left[\frac{1}{2}(a, x) - \frac{1}{4} \parallel a \parallel^2 \right] v,$$

de $\mathcal{P}_{\text{cyl}}(X)$ dans $\mathcal{O}_{\text{c-cyl}}(X)$ se prolonge par continuité en un endomorphisme biunivoque et bicontinu de $K^s(X)$.

Pour la démonstration nous utilisons le lemme suivant :

(31) LEMME. — Soit X de dimension finie, s entier ≥ 0 , et

$$c(s) = \sum_{i=0}^s i! 2^i l \left(\frac{1 + \|a\|^2}{4} \right)^i.$$

Alors :

$$(32) \quad \|U_a f\|_s^2 \leq c(s) \|f\|_s^2,$$

pour tout f dans $K^s(X)$.

Démonstration du lemme. — On rapporte X à une base orthonormée e_1, \dots, e_n telle que a soit co-linéaire à e_1 . On pose $b = a/2$ et $b_1 = a_1/2$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha') \quad \text{avec} \quad \alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)^{\alpha'} = \partial^{\alpha_1, \alpha'}.$$

On a

$$(33) \quad \partial^\alpha (U_a f) = \left[\sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} b_1^i \partial^{\alpha_1-i, \alpha'} f(x-a) \right] \exp(b_1 x_1 - \|b\|^2).$$

On note que U_a est une isométrie dans L^2 , donc (33) montre que $U_a f \in K^s(X)$ dès que $f \in K^s(X)$.

Évaluons la norme de U_a .

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (U_a f)\|^2 &\leq 2^s \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i} \|\partial^{\alpha_1-i, \alpha'} f\|^2, \\ \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha (U_a f)\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} &\leq 2^s \sum_{i, \alpha_1, \alpha'} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i} \|\partial^{\alpha_1-i, \alpha'} f\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \\ &\leq 2^s s! \left(\sum_{\alpha_1, i} \binom{\alpha_1}{i} b_1^{2i} \right) \|f\|_s^2 \leq 2^s s! \sum_{\alpha_1=1}^s (1 + b_1^2)^{\alpha_1} \|f\|_s^2 \\ &\leq s! 2^s s (1 + b_1^2)^s \|f\|_s^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|U_a f\|_s^2 < \|U_a f\|_{s-1}^2 + s! 2^s s (1 + b_1^2)^s \|f\|_s^2.$$

On obtient (32) en additionnant ces relations pour $s = 1, 2, \dots, s$.

Démonstration de la proposition (30). — Comme l'application $a \mapsto U_a$ est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer que chaque U_a est continue.

(a) Supposons d'abord X de dimension finie.

Si s est entier positif, il suffit d'appliquer le lemme (31).

Si s est réel positif, il suffit d'interpoler [voir (28)].

Si s est négatif, on utilise le fait que l'adjoint de l'opérateur U_a de $K^s(X)$ est l'endomorphisme U_{-a} de $K^{-s}(X)$. Notons aussi que, pour s fixé, les applications U_a de $K^s(X)$ décrivent un borné lorsque $\|a\|$ est uniformément majorée.

(b) Supposons maintenant X de dimension infinie, muni de la bonne famille maximale. Soit $\tilde{P} = P \circ s_i$ une fonction polynomiale cylindrique de base X_i . Quitte à remplacer X_i par le sous-espace vectoriel engendré par X_i et a , on peut supposer $a \in X_i$. On note que

$$\tilde{Q}(x) = \tilde{P}(x-a) \exp[(b, x) - \|b\|^2]$$

est une fonction cylindrique de base X_i . Donc on peut écrire $\tilde{Q} = Q \circ s_i$ d'après le (a), on a, pour tout s ,

$$\|Q\|_s \leq C \|P\|_s,$$

où C ne dépend que de s et de $\|b\|$.

Donc

$$\|U_a \tilde{P}\| = \|\tilde{Q}\|_s \leq C \|\tilde{P}\|_s.$$

D'où le résultat puisque les \tilde{P} v sont denses dans $K^s(X)$.

Les translations ordinaires n'opèrent pas dans $K^s(X)$. Cependant on a le lemme suivant :

(34) LEMME. — Soit $\tilde{K}^s(X)$ le sous-espace de $K^s(X)$ formé par les T telles que, pour tout sous-espace X_j de dimension finie passant par $O x_1$, le support de T_j soit contenu dans la bande où $|x_1| \leq 1$.

Alors, pour tout α réel, la translation ordinaire

$$\tau : T(x) \rightarrow T(x_1 - \alpha, x')$$

définit une application linéaire continue de $\tilde{K}^s(X)$ dans $K^s(X)$.

Démonstration. — L'espace X est rapporté à une base orthonormée dont le premier élément est porté par $O x_1$.

$$T(x_1 - \alpha, x') = (U_a T)(x) \times M(x) \quad \text{avec} \quad M(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha x_1\right).$$

L'application τ n'est pas continue dans $K^s(X)$ car la fonction cylindrique $M(x)$ n'est pas un multiplicateur dans $K^s(X)$. Or, pour $T \in \tilde{K}^s(X)$,

on peut remplacer $M(x)$ par $M'(x) = M(x)\zeta(x_1)$ avec $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ valant 1 si $|x_1| \leq |\alpha| + 2$.

Or M' est un multiplicateur dans $K^s(X)$: ceci se démontre comme (30).
Donc τ définit un opérateur linéaire continu de $\tilde{K}^s(X)$ dans $K^s(X)$.

3. Propriétés de trace

On veut définir et étudier la trace des prodistributions T de $K^s(X)$ sur un hyperplan affine H de X . A cet effet, on note X' l'hyperplan de X parallèle à H passant par l'origine, et $x'_1 \in O x_1$ la droite perpendiculaire. Pour toute base orthonormée dont le premier vecteur est porté par $O x_1$, l'équation de H est $x_1 = \alpha$.

Introduisons la bonne famille F_t des sous-espaces vectoriels de dimension finie de X contenant $x'_1 \in O x_1$. Toute prodistribution T de $K^s(X)$ est alors considérée comme une t -prodistribution, donc comme un système cohérent de distributions sur les sous-espaces de dimension finie de X passant par $x'_1 \in O x_1$. On a $v = v_1 \otimes v'$, où v' est la probabilité cylindrique normale canonique relative à X' .

Soit q un entier ≥ 0 . Si $\tilde{\varphi}$ est une fonction polynomiale t -cylindrique sur X , pour tout α réel, on note $\gamma_q^\alpha \tilde{\varphi}$ la fonction

$$\begin{aligned} X' &\rightarrow \mathbf{C}, \\ x' &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^q \tilde{\varphi}(\alpha, x'). \end{aligned}$$

A cette fonction est associée la prodistribution $(\gamma_q^\alpha \tilde{\varphi}) v'$ sur X' . Cette prodistribution appelée trace d'ordre q de $\tilde{\varphi} v$ sur H est encore notée $\gamma_q^\alpha(\tilde{\varphi} v)$.

(36) THÉORÈME. — Soit $s > 1/2$.

(a) Pour α fixé, l'application $\tilde{\varphi} v \mapsto (\gamma_0^\alpha \tilde{\varphi}) v'$ se prolonge par continuité en une application continue de $K^s(X)$ dans $K^{s-1/2}(X')$. Cette application, notée γ_0^α , est appelée application trace d'ordre zéro sur l'hyperplan $x_1 = \alpha$.

(b) Pour toute T dans $K^s(X)$, l'application $\alpha \mapsto \gamma_0^\alpha T$ est continue de \mathbf{R} à valeurs dans $K^{s-1/2}(X')$.

(a) La continuité de l'application γ_0^0 se démontre par des calculs naturels qui sont d'ailleurs détaillés dans [5], d'où la continuité de γ_0^α en utilisant l'opérateur U_{-a}^α avec $a = (\alpha, 0, \dots)$ de la proposition (30). On obtient ainsi une inégalité :

$$(37) \quad \|\gamma_0^\alpha T\|_{s-1/2} \leq \text{Cte} \|T\|_s \quad \text{pour tout } T \in K^s(X).$$

(b) Soit $(\varphi_k U)_k$ une suite de fonctions polynomiales cylindriques convergeant vers un élément fixé T de $K^s(X)$. D'après (37), on a

$$\|\gamma_0^\alpha(\varphi_k v) - \gamma_0^\alpha(\varphi_l v)\|_{s-1/2} \leq C \|\varphi_k v - \varphi_l v\|_s$$

pour tout α tel que $|\alpha| \leq C_2$. La fonction $\alpha \mapsto \gamma_0^\alpha T$ apparaît donc comme limite uniforme, sur tout compact de \mathbf{R} , de fonctions continues à valeurs dans $K^{s-1/2}(X')$. Elle est donc continue.

(38) COROLLAIRE. — Soit q entier ≥ 0 et $s > 1/2 + q$.

(a) Pour α fixé, l'application $\tilde{\varphi} v \mapsto \gamma_q^\alpha(\tilde{\varphi} v)$ se prolonge par continuité en une application, notée γ_q^α , de $K^s(X)$ dans $K^{s-q-1/2}(X')$, qu'on appelle trace d'ordre q sur l'hyperplan $x_1 = \alpha$.

(b) Pour toute $T \in K^s(X)$, l'application $\alpha \mapsto \gamma_0^\alpha T$ est q fois continûment dérivable de \mathbf{R} à valeurs dans $K^{s-q-1/2}(X')$.

Le (a) résulte de (26) et du théorème [36(a)] car on peut écrire $\gamma_q^\alpha = \gamma_0^\alpha \circ (\partial/\partial x_1)^q$.

(39) LEMME (Surjectivité des applications de trace). — Soient q entier ≥ 0 , $s > 1/2 + q$ et α réel. L'application γ_q^α de $K^s(X)$ dans $K^{s-q-1/2}(X')$ est surjective.

La démonstration utilise le lemme suivant :

(40) LEMME. — Soit $\gamma = 0$ ou 1, et k réel ≥ 1 . Posons

$$(41) \quad \beta_l(\gamma, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } l-\gamma \text{ est impair,} \\ 2^{-(l-\gamma)/2} \left[\left(\frac{l-\gamma}{2} \right)! \right]^{-1} (1+k)^{-1/2\gamma} (l!)^{n/2} \left(\frac{-k}{1+k} \right)^{(l-\gamma)/2} & \text{si } l-\gamma \text{ est pair.} \end{cases}$$

Alors :

$$t^\gamma \exp(-kt^2/2) = \sum_{l=\gamma}^\infty \beta_l(\gamma, k) \mathcal{H}_l(t).$$

Prouvons d'abord le lemme pour $\gamma = 0$. Les fonctions \mathcal{H}_l formant une base orthonormée de $L^2_{\mathbb{V}}(\mathbf{R})$, on a

$$\exp(-kt^2/2) = \sum_{l \geq 0} \beta'_l \mathcal{H}_l(t)$$

avec

$$\beta'_l = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_l(t) \exp(-(1+k)t^2/2) dt.$$

En utilisant le changement de variable $t \sqrt{(1+k)/2} = x$, et la représentation intégrale des polynômes d'Hermite ([13] p. 576), on obtient $\beta'_l = \beta_l(0, k)$.

Comme la série au second membre de la relation (42) avec $\gamma = 0$ converge, non seulement dans $L^2_\nu(\mathbf{R})$, mais aussi pour tout t , on obtient la relation (42) pour $\gamma = 1$, en dérivant par rapport à t chaque membre de (42) pour $\gamma = 0$.

Démontrons maintenant le théorème (36).

(a) Supposons $\alpha = 0$. On cherche un relèvement R_q^0 c'est-à-dire une application continue de $K^{s-q-1/2}(X')$ dans $K^s(X)$ telle que

$$(43) \quad \forall \Psi \in K^{s-q-1/2}(X'), \quad \gamma_q^0(R_q^0 \Psi) = \Psi.$$

Comme les fonctions polynomiales cylindriques sont denses dans les espaces K^s , on peut supposer

$$\Psi(x') = \sum_{j'} a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x') \in \mathcal{P}_{\text{cyl}}(X').$$

Tout q entier ≥ 0 s'écrivant sous la forme $q = 2m - \gamma$ avec $\gamma = 0$ ou 1, et m entier ≥ 0 , introduisons pour tout multi-indice j' la fonction suivante f de la variable réelle x_1

$$(44) \quad f_{j'_q}(x_1) = C_{j'_q} \exp\left(-\frac{1+|j'|}{2} x_1^2\right),$$

avec

$$C_{j'_q} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = \gamma = 0 \\ (-1)^{m-\gamma} / (1+|j'|)^{m-\gamma} 1.3 \dots (2m-1) & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

On obtient alors le relèvement cherché en posant

$$(45) \quad (R_q^0 \Psi)(x) = \begin{cases} \sum_{j'} f_{j'_q}(x_1) a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x') & \text{si } q = 2m \text{ est pair,} \\ \sum_{j'} \frac{df_{j'_q}(x_1)}{dx_1} a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x') & \text{si } q = 2m-1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Comme $\gamma_q^0(R_q^0 \Psi) = \Psi$, il suffit de montrer l'existence d'une constante positive C telle que

$$\forall \Psi \in \mathcal{P}_{\text{cyl}}(X'), \quad \|R_q^0 \Psi\|_s \leq C \|\Psi\|_{s-q-1/2}.$$

On a donc :

$$(R_q^0 \Psi)(x) = \sum_{j'} a_{j'} c_{j'_q} x_1^\gamma \exp(-(1+|j'|)x_1^2/2) \mathcal{H}_{j'}(x').$$

D'où en utilisant le lemme (40) :

$$(R_q^0 \Psi)(x) = \sum_{l, j'} b_{l, j'} \mathcal{H}_l(x_1) \mathcal{H}_{j'}(x') \quad \text{avec } b_{l, j'} = a_{j'} c_{j'_q} \beta_l(\gamma, 1+|j'|),$$

$$\|R_q^0 \Psi\|_s^2 = \sum_{l, j'} |b_{l, j'}|^2 (1+l+|j'|)^s = \sum_{j'} \frac{|a_{j'}|^2 C_{j'_q}^2}{(2+|j'|)^{1+2\gamma}} S_l,$$

avec

$$S_l = \sum_{l-\gamma \text{ pair} \geq 0} \frac{l!(1+l+|j'|)^s}{2^{l-\gamma} [((l-\gamma)/2)!]^2} \left(\frac{1+|j'|}{2+|j'|} \right)^{l-\gamma}$$

On a

$$S_l \leq \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)(1+x^\gamma)(2+x+|j'|)^s}{2^x \Gamma^2(x/2+1)} \left(\frac{1+|j'|}{2+|j'|} \right)^x dx,$$

d'où, en utilisant des relations connues sur la fonction Γ , l'inégalité $(\alpha/(1+\alpha))^\alpha \leq 1/2$ si $\alpha \geq 1$, et le changement de variable $x = (1+|j'|) t$, on obtient $S_l \leq \text{Cte } (1+|j'|)^{s+\gamma+1/2}$.

On a donc

$$(46) \quad \|\mathbf{R}_q^0 \Psi\|_s^2 \leq C \sum_{j'} \frac{|a_{j'}|^2 (1+|j'|)^{s-2m+3\gamma+1/2}}{(2+|j'|)^{1+2\gamma}} \leq C \|\Psi\|_{s-q-(1/2)}^2.$$

(b) Dans le cas $\alpha \neq 0$, on ne peut se ramener au cas $\alpha = 0$ par une « translation » U_a avec $a = (\alpha, 0, \dots)$ que pour $q = 0$ ou 1 , car pour $q \geq 2$ une telle translation introduit dans l'expression de $\gamma_q^\alpha (U_a \mathbf{R}_q^0 \Psi)$ des termes supplémentaires en $1+|j'|$. Cependant, on peut se ramener au cas $\alpha = 0$, en utilisant une translation ordinaire, grâce à un artifice de troncature.

En effet, vu le lemme (34), on peut relever la fonction polynomiale cylindrique $\Psi(x') = \sum_{j'} a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x')$ par $(\zeta \cdot (\mathbf{R}_q^0 \Psi))(x_1 - \alpha, x')$.

(47) *Remarque.* — Ce relèvement de Ψ n'est pas une fonction analytique cylindrique. Mais on peut obtenir un relèvement analytique en procédant comme suit.

Si $q = 2m$ est pair, l'idée est de relever $\Psi(x') = \sum_{j'} a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x')$ par une combinaison linéaire des $U_a(\mathbf{R}_l^0 \Psi)$ pour $l = q, q+1, \dots, 2q$. Posons donc

$$\mathbf{R}_q^\alpha \Psi = \sum_{l=q}^{2q} c_l U_a(\mathbf{R}_l^0 \Psi)$$

d'où explicitement :

$$(48) \quad (\mathbf{R}_q^\alpha \Psi)(x) = \exp(-\alpha^2/2) \sum_{j'} \exp\left(-\frac{k}{2}(x_1 - \alpha)^2 + \frac{\alpha}{2}x_1\right) \\ \times \sum_{l=1}^m \frac{c_{2l-1} - (x_1 - \alpha)c_{2l}}{k^{m+l-1}} a_{j'} \mathcal{H}_{j'}(x'),$$

où $k = 1+|j'|$ et où les c_j sont des constantes. Vu (30) et (39), il résulte que l'application \mathbf{R}_q^α est linéaire continue de $K^{s-q-1/2}(X')$ dans $K^s(X)$. Il reste à montrer que \mathbf{R}_q^α est un relèvement, c'est-à-dire qu'on peut choisir les constantes c_j de manière à avoir

$$(49) \quad \gamma_q^0(\mathbf{R}_q^\alpha \Psi) = \Psi \quad \text{pour tout } \Psi \text{ polynomiale cylindrique.}$$

En utilisant la fonction génératrice des polynômes d'Hermite, il vient

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^q \left(\exp\left(-\frac{k}{2}(x_1-\alpha)^2 + \frac{\alpha}{2}x_1\right)\right)\Big|_{x_1=\alpha} = e^{\alpha^2/2} (k/2)^{q/2} H_q(-\alpha/2\sqrt{2k}).$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^q \left(-k(x_1-\alpha)\exp\left(-\frac{k}{2}(x_1-\alpha)^2 + \frac{\alpha}{2}x_1\right)\right)\Big|_{x_1=\alpha} \\ &= -e^{\alpha^2/2} (k/2)^m [(k/2)^{1/2} H_{q+1}(-\alpha/2\sqrt{2k}) \\ &\quad + (\alpha/2) H_q(-\alpha/2\sqrt{2k})] = e^{\alpha^2/2} \left(\frac{k}{2}\right)^m q \sqrt{2k} H_{q-1}(-\alpha/2\sqrt{2k}). \end{aligned}$$

Notons U et V les polynômes suivants de degré $m-1$ de la variable réelle t

$$U(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{l=1}^m c_{2l-1} t^{l-1}, \quad V(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{l=1}^m c_{2l} t^{l-1}.$$

La condition (49) est équivalente à

$$U(t) \cdot A(t) + t V(t) B(t) \equiv 1,$$

où $A(t) = H_q(-\alpha\sqrt{t/2}\sqrt{2})$ et $B(t) = q\sqrt{2/t} H_{q-1}(-\alpha\sqrt{t/2}\sqrt{2})$ sont respectivement des polynômes de degré m et $m-1$ en la variable t . Les polynômes d'Hermite $H_n(t)$ et $H_{n-1}(t)$ étant premiers entre eux pour tout n , il en résulte que $A(t)$ et $t B(t)$ sont aussi premiers entre eux.

Alors U et V existent, et sont uniques d'après l'identité de Bezout.

Pour le cas où $q = 2m-1$ est impair, il suffit de poser

$$(R_q^\alpha \Psi)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) (R_{q+1}^\alpha \Psi)(x).$$

(50) THÉORÈME. — Soit q entier ≥ 0 et $s > 1/2 + q$. L'application linéaire Γ

$$\begin{aligned} K^s(X) &\rightarrow \prod_{j=0}^q K^{s-j-1/2}(X'), \\ T &\mapsto (\gamma_0^\alpha T, \dots, \gamma_q^\alpha T) \end{aligned}$$

est continue et surjective.

Vu le corollaire (38), l'application Γ est continue. Pour prouver la surjectivité, considérons d'abord le cas $\alpha = 0$. On va montrer que, étant donné un élément $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_q)$ avec $\varphi_j \in K^{s-j-1/2}(X')$, il existe, pour tout j fixé appartenant à $\{0, 1, \dots, q\}$, une application ρ_j de $K^{s-j-1/2}$ dans K^s telle que $\gamma_l^0(\rho_j \varphi_j) = \delta_l^j \varphi_j$.

On pourra alors poser, comme relèvement de φ ,

$$R_q^0 \varphi = \sum_{j=0}^q \rho_j \varphi_j.$$

Donc j étant fixé, recherchons $\rho_j \varphi_j$ sous la forme

$$(\rho_j \varphi_j)(x) = \sum_{n=1}^{q+1} a_n (R_j^0 \varphi_j)(n x_1, x'),$$

où les a_n sont des constantes à déterminer. On a, pour l entier, $0 \leq l \leq q$,

$$\gamma_l^0 (\rho_j \varphi_j) = \left(\sum_{n=1}^{q+1} a_n n^l \right) \gamma_l^0 (R_j^0 \varphi_j).$$

Comme $\gamma_j^0 (R_j^0 \varphi_j) = \varphi_j$, on aura $\gamma_l^0 (\rho_j \varphi_j) = \delta_l^j \varphi_j$ si les constantes a_n sont solutions du système linéaire

$$\sum_{n=1}^{q+1} a_n n^l = \delta_l^j \quad \text{pour } l = 0, 1, \dots, q,$$

qui est un système de Cramer car son déterminant est du type Van der Mond.

Il reste à vérifier que, pour n entier > 1 fixé, $(R_q^0 \Psi)(n x_1, x') \in K^s$.

En effet, vu le lemme (40), on peut écrire ($k = 1 + |j'|$) :

$$(R_q^0 \Psi)(n x_1, x') = \sum_{i,j'} a_{j'} \frac{c_{j' q n} \gamma}{n^{2(m-\gamma)}} \beta_l(\gamma, n^2 k) \mathcal{H}(x_1) \mathcal{H}_{j'}(x').$$

D'où encore la relation (46), où C dépendra de n . Le cas $\alpha \neq 0$ se ramène au cas précédent en utilisant une translation ordinaire et l'artifice de troncature, comme dans la preuve du théorème (36) partie (b).

(51) *Cas des classes de Sobolev vectorielles.* — Soit j entier ≥ 0 . On définit l'espace de Sobolev vectoriel $K^s(X, j) = K^s(X) \otimes^\Delta [\odot^\Delta X^c]$ où le crochet désigne le produit tensoriel symétrique hilbertien de j exemplaires du complexifié X^c de X . Les propriétés de trace de ces espaces se déduisent simplement des propriétés de trace déjà étudiées. Par exemple, soit $s > 1/2$. La projection orthogonale π de X sur X' définit, par complexification et produit tensoriel, une projection continue

$$\odot_j^\Delta X^c \xrightarrow{\pi_j} \odot_j^\Delta X'^c.$$

En tensorisant π_j avec l'application continue surjective

$$K^s(X) \xrightarrow{\gamma_0^s} K^{s-(1/2)}(X'),$$

on obtient une application continue surjective.

$$K^s(X, j) \xrightarrow{\gamma_0^s \otimes \pi_j} K^{s-(1/2)}(X', j).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FROLOV (N. N.). — On a coercive inequality for an elliptic operator in infinitely many independent variables, *Math. of U.R.S.S.-Sbornik*, t. 19, 1973, p. 395-406; et [en russe] *Mat. Sbornik*, t. 90, 1973, p. 403-414.
- [2] GROSS (L.). — Logarithmic Sobolev inequality, *Amer. J. of Math.*, t. 97, 1975, p. 1061-1083.
- [3] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, *Amer. math. Soc.*, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).
- [4] KRÉE (M.). — Propriété de trace en dimension infinie d'espace du type Sobolev, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, 1974, série A, p. 157-160.
- [5] KRÉE (M.). — Classes K_s du type Sobolev, *Séminaire Krée : Équations aux dérivées partielles en dimension infinie*, 1^{re} année, 1974/1975, n° 10, 21 p.
- [6] KRÉE (P.). — Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, *Linear operators and approximation* [1971. Oberwolfach], p. 159-174; Basel et Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1972 (*International Series of numerical Mathematics*, 20).
- [7] KRÉE (P.). — Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, série A, p. 753-755.
- [8] KRÉE (P.). — Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, *Séminaire Lelong : Analyse*, 1972/1973, p. 142-181, 1973/1974, p. 16-47, Berlin, Springer-Verlag, 1974 et 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 410 et 474).
- [9] KRÉE (P.). — *Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles* (à paraître).
- [10] LASCAR (B.). — Théorème de Cauchy-Kovalevsky et théorème d'unicité d'Holmgren pour les fonctions analytiques d'une infinité de variables, *Séminaire Krée : Équations aux dérivées partielles en dimension infinie*, 2^e année, 1975/1976, n° 8, 16 p.
- [11] LIONS (J. L.) et MAGENES (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1. Paris, Dunod, 1968 (*Travaux et Recherches mathématiques*, 17).
- [12] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*. Nouvelle édition. Paris, Hermann, 1966 (*Publ. Inst. Math., Univ. Strasbourg*, 9 et 10).
- [13] VILENKIN (N. J.). — *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*. Paris, Dunod, 1969 (*Monographies universitaires de Mathématiques*, 33).

(Texte reçu le 11 octobre 1976.)

Mme Mirella KRÉE,
 Département de Mathématiques, Tour 46,
 Université Pierre-et-Marie-Curie,
 4, place Jussieu,
 75230 Paris Cedex 05.