PAUL GAUDUCHON

Fibrés hermitiens à endomorphisme de Ricci non négatif

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 113-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__113_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 113-140

FIBRÉS HERMITIENS A ENDOMORPHISME DE RICCI NON NÉGATIF

PAR

PAUL GAUDUCHON

[Paris]

RÉSUMÉ. — La trace K, relative à g, de la courbure canonique Ω d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien $(\mathbf{E}, h)$, au-dessus d'une variété hermitienne compacte (M, g), est appelée endomorphisme de Ricci du fibré; il est montré que si K est non-négatif, toute section holomorphe du dual $\mathbf{E}^*$ de $\mathbf{E}$ s'envoie, par dualité, sur une section holomorphe de $\mathbf{E}$; ce théorème généralise un résultat de S. KOBAYASHI et H. H. WU (« $K > 0 \Rightarrow$ il n'existe aucune section holomorphe non-nulle de $\mathbf{E}^*$ ») et, partiellement, une propriété, démontrée par A. LICHNEROWICZ, des variétés kählériennes compactes à première classe de Chern non-négative. Le cas des variétés semi-kählériennes est traité à part.

Pour un fibré holomorphe hermitien en droites $(\mathbf{L}, h)$, l'endomorphisme de Ricci est un scalaire sur M qui est constant pour un choix judicieux de h, égal par définition à la constante fondamentale $k_g(\mathbf{L})$ de $\mathbf{L}$; il en résulte un théorème d'annulation des « plurigenres » associés à M. Les variétés hermitiennes à excentricité nulle jouent un rôle spécifique dans la théorie; l'auteur ignore s'il existe des variétés qui n'admettent pas de telles métriques, alors qu'il peut montrer que les variétés dites de Calabi-Eckmann sont dépourvues de structures semi-kählériennes.

Introduction

Le présent travail s'articule autour de deux résultats principaux : le *théorème d'inclusion* du paragraphe 4 et le *théorème de classification* du paragraphe 9.

Le *théorème d'inclusion* est un théorème de structure concernant l'espace $\Gamma(\mathbf{E})$ des sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathbf{E}$ au-dessus d'une variété complexe compacte M. L'instrument utilisé est l'*endomorphisme de Ricci* $K = (K_A^B)$ sur $\mathbf{E}$ [*cf.* définition paragraphe 1, formule (2)], lié à une métrique fibrée h sur $\mathbf{E}$ et à une structure hermitienne (M, g) sur M, et opérant comme endomorphisme sur les sections (ξ^A) de $\mathbf{E}$; cet endomorphisme de Ricci a été utilisé par l'auteur, pour la première fois, *lorsque* (M, g) *est kählérienne*, pour démontrer le résultat suivant [3].

Si l'endomorphisme de Ricci K sur E est non-négatif, défini positif en un point de M, l'espace $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ des sections holomorphes du fibré holomorphe dual $\mathbf{E}^*$ *de* $\mathbf{E}$ *est réduit à* 0.

Par une méthode différente S. KOBAYASHI et H. H. WU ont pu démontrer ce dernier résultat pour une variété complexe compacte quelconque, *kählérienne ou non* [12], en supposant toutefois *K défini positif en tout point de M.*

Lorsque K est seulement supposé non-négatif, la conclusion doit évidemment être modifiée, et devient ceci (théorème d'inclusion du paragraphe 4) : *L'image H_h de* $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ *par dualité hermitienne est un sous-espace de* $\Gamma(\mathbf{E})$, *et toutes les sections holomorphes de* $\mathbf{E}^*$ *sont à dérivée covariante nulle pour la connexion canonique liée à h;* $\Gamma(\mathbf{E})$ *est en outre somme directe orthogonale de H_h et de l'annulateur J de* $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ *dans* $\Gamma(\mathbf{E})$.

Brièvement parlant, le théorème d'annulation précédent ($\dim \Gamma(\mathbf{E}^*) = 0$) doit être remplacé lorsque K est seulement non-négatif, par l'inégalité :

$$\dim \Gamma(\mathbf{E}^*) \leqslant \dim \Gamma(\mathbf{E}).$$

La démonstration du théorème d'inclusion (qui vaut pour toute variété complexe compacte) s'appuie sur un calcul inspiré de [12], sur l'utilisation des opérateurs agissant sur les formes à valeurs dans le fibré $\mathbf{E}$ et sur un théorème d'analyse, le théorème de E. HOPF qui, dans le cas compact, peut s'énoncer comme suit :

Soit L un opérateur différentiel elliptique du second ordre, à coefficients réels C^∞, opérant sur les scalaires et dépourvu de terme d'ordre zéro (i. e. tel que $L(1) = 0$); *les seuls scalaires (réels) f vérifiant l'inégalité $L(f) \geqslant 0$ (ou $L(f) \leqslant 0$) sur tout M compacte sont les scalaires constants* (*cf.* [10], ou [15] p. 26).

Lorsque, pour $\mathbf{E}$, nous choisissons le fibré tangent holomorphe $\mathscr{T}$ de M, ou l'une de ses puissances extérieures $\Lambda^p \mathscr{T}$ (*cf.* § 5), nous retrouvons, dans le cas où M admet une structure hermitienne à tenseur de Ricci hermitien non-négatif (ou, plus généralement, p-non-négatif), une décomposition de l'espace T^p des p-tenseurs analogue à celle de A. LICHNEROWICZ ([13] p. 62) obtenue dans le cadre des *variétés compactes kählériennes à première classe de* CHERN *non-négative;* le théorème que nous obtenons au paragraphe 5 est à la fois plus général que ce dernier, puisque M n'est pas supposée kählérienne, et plus restrictif, puisque tous les représentants de la première classe de CHERN de M ne sont pas les tenseurs de Ricci d'une structure hermitienne sur M (*cf.* remarque 3 du paragraphe 5, et aussi l'Introduction de [9]).

Un traitement original de la théorie se présente lorsque M peut être munie d'une structure hermitienne *semi-kählérienne* (ou *de type spécial,* les deux termes sont employés de façon équivalente dans la littérature), définies au paragraphe 3 (définition 2); l'endomorphisme de Ricci n'est autre, dans ce cas, que la différence des deux opérateurs Δ'_h et Δ''_h opérant sur les sections de $\mathbf{E}$; le théorème d'inclusion s'en déduit sans qu'il soit besoin de recourir au théorème de E. Hopf (*cf.* § 7).

Dans le cas où $\mathbf{E}$ est un fibré en droites $\mathbf{L}$, i. e. un fibré vectoriel holomorphe de dimension fibrée complexe 1, l'étude comparée de $\Gamma(\mathbf{L})$ et de $\Gamma(\mathbf{L}^*)$ se laisse ramener à *trois* situations seulement suivant le signe d'une certaine *constante fondamentale* $k_g(\mathbf{L})$ relative à une structure hermitienne (quelconque) sur M : c'est le *théorème de classification* du paragraphe 9; les deux premières correspondent à des théorèmes d'*annulation* de $\Gamma(\mathbf{L}^*)$ et $\Gamma(\mathbf{L})$ respectivement, et la troisième ne laisse que deux possibilités : ou bien le fibré en droites est analytiquement trivial, ou bien $\Gamma(\mathbf{L})$ *et* $\Gamma(\mathbf{L}^*)$ sont réduits à zéro. Le champ des possibilités est donc considérablement plus restreint que dans le cas général d'un fibré de dimension fibrée quelconque.

Lorsque le théorème de classification est appliqué au fibré en droites $\mathscr{K}^*$, où $\mathscr{K}$ est le *fibré en droites canonique* de M, et à ses puissances tensorielles, nous retrouvons au paragraphe 7 (*cf.* aussi [4]) une répartition des *plurigenres* et *plurigenres duaux* de M, analogue à celle de [11], obtenu dans le cas où (M, g) est kählérienne; la *constante fondamentale* de $\mathscr{K}^*$ relative à g coïncide alors avec la *constante fondamentale de la variété* (M, g) de [11].

Là encore, les variétés semi-kählériennes offrent un cadre d'étude original, dans lequel la constante fondamentale d'un fibré en droites est susceptible d'une définition à la fois plus simple et plus explicite (*cf.* § 11). Cette définition vaut également pour une catégorie plus large, *les variétés hermitiennes d'excentricité nulle* définies au paragraphe 8.

I. Éléments préliminaires

1. L'endomorphisme de Ricci d'un fibré hermitien

Dans la suite du texte, M désignera une variété complexe, connexe, compacte, de dimension complexe n, et $\mathbf{E}$ un espace fibré vectoriel holomorphe (plus brièvement, un fibré holomorphe) au-dessus de M, de dimension fibrée complexe r.

Une section ξ de $\mathbf{E}$ est représentée localement par un r-uple (ξ^A), $A = 1, \ldots, r$ de scalaires locaux relativement à un repère homorlophe local $\{s_A\}$. Les éléments génériques correspondants du fibré dual complexe $\mathbf{E}^*$ sont notés de façon covariante : une section τ de $\mathbf{E}^*$ est localement représentée par le r-uple (τ_A) relativement au repère holomorphe dual $\{\sigma^A\}$ de $\{s_A\}$.

L'espace des sections C^∞ d'un fibré holomorphe $\mathbf{E}$ est noté $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$.

Un *fibré hermitien* $(\mathbf{E}, h)$ est un fibré holomorphe $\mathbf{E}$ muni d'une métrique hermitienne fibrée h, c'est-à-dire d'un champ C^∞ de métriques hermitiennes sur les fibres $\mathbf{E}_z$ de $\mathbf{E}$, $z \in M$; cette métrique fibrée est représentée localement par une matrice régulière d'ordre r (que nous noterons également h s'il n'y a pas lieu de préciser plus) d'élément générique $h_{A\bar{B}}$, $A, B = 1, \ldots, r$; elle induit un anti-isomorphisme σ_h de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}^*$ qui s'écrit localement

$$\sigma_h(\xi)_A = h_{A\bar{B}}.\overline{\xi^B}, \tag{1}$$

et une métrique fibrée hermitienne duale h^* sur $\mathbf{E}^*$, dont la matrice relative au repère dual $\{\sigma^A\}$ est la matrice h^{-1}, inverse de h.

A h est associée une connexion *unique* ω sur $\mathbf{E}$, compatible avec h, et dont la matrice représentative, relativement à un repère local *holomorphe*, a pour éléments des formes de type (1, 0); pour un tel repère $\{s_A\}$ les matrices h et ω sont liées par la relation

$$\omega = d'h.h^{-1}.$$

Cette connexion est la *connexion canonique* de $(\mathbf{E}, h)$ (*cf.* [2] par exemple, ou [3]); la connexion canonique ω^* de $(\mathbf{E}^*, h^*)$ est localement représentée par la matrice $-\omega$ relativement au repère dual $\{\sigma^A\}$.

La courbure Ω de $(\mathbf{E}, h)$ est une 2-forme de type (1, 1) à valeurs dans le fibré holomorphe $\operatorname{End}\mathbf{E} \simeq \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$; elle s'exprime localement au moyen d'une matrice de 2-formes déduite de ω par la relation

$$\Omega = d''\omega.$$

Supposons M munie d'une structure hermitienne (M, g). On pose :

DÉFINITION 1. — *Le tenseur (ou endomorphisme) de Ricci K de $(\mathbf{E}, h)$ (relatif à g) est la trace, relative à g, de la courbure Ω de la connexion canonique liée à h.*

K est un élément de $\mathscr{A}^0(\operatorname{End}\mathbf{E})$ qui s'écrit localement :

$$K_A^B = \textstyle\sum_{\lambda,\mu=1}^n g^{\lambda\bar{\mu}}\Omega_{A\lambda\bar{\mu}}^B = \sum_{\lambda=1}^n \Omega_{A\lambda}^{B\ \lambda}, \qquad A, B = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

où $(g^{\lambda\bar{\mu}})$ est la matrice inverse de g. La restriction K_z de K à $\mathbf{E}_z$, $z \in M$, est un *endomorphisme hermitien :* nous dirons que K est *non-négatif* si les valeurs propres (réelles) de K_z sont *positives ou nulles* quel que soit $z \in M$, soit encore si

$$(K_z(\xi_z), \xi_z)_h \geqslant 0, \qquad \forall \xi_z \in \mathbf{E}_z, \qquad \forall z \in M,$$

où $(\ ,\ )_h$ note le produit scalaire hermitien ponctuel lié à h; dans la suite, la référence explicite à z dans une telle écriture sera supprimée. K est non-négatif si, et seulement si K^* est non-positif (notation évidente).

La métrique fibrée hermitienne h induit une semblable métrique $h^{(m)}$, pour m entier positif quelconque, sur le fibré holomorphe $\Lambda^m \mathbf{E}$, puissance extérieure m-ième de $\mathbf{E}$. Nous dirons que *K est m-non-négatif*, si l'endomorphisme de Ricci $K^{(m)}$ de $(\Lambda^m \mathbf{E}, h^{(m)})$ est non-négatif; cela revient à dire que, pour tout $z \in M$, la somme partielle de m valeurs propres quelconques de K est positive ou nulle, d'où résulte immédiatement que si K est m-non-négatif, K est aussi m'-non-négatif, pour tout entier $m' \geqslant m$; en particulier, si K est non-négatif, il est m-non-négatif pour tout entier m positif.

2. Opérateurs sur les E-formes

Une $\mathbf{E}$-forme de type (p, q), ou une forme de type (p, q) à valeurs dans $\mathbf{E}$, est une section C^∞ du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathbf{T} \otimes \Lambda^q \overline{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{E}$, où $\mathbf{T}$ est le fibré cotangent holomorphe de M; l'ensemble de ces formes constitue un espace vectoriel complexe noté $\mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E})$; $\mathscr{A}^{0,0}(\mathbf{E})$ s'identifie à $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, et nous considérons que $\mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E}) = \{0\}$ si p ou q est négatif; $\mathscr{A}^{p,q}$ note l'espace des formes scalaires de type (p, q).

L'opérateur d, dérivée extérieure, définie sur les formes scalaires se décompose en $d = d' + d''$, où d' envoie $\mathscr{A}^{p,q}$ dans $\mathscr{A}^{p+1,q}$ et d'' $\mathscr{A}^{p,q}$ dans $\mathscr{A}^{p,q+1}$, pour tout entier p et q; une structure hermitienne sur M induit un opérateur δ, codérivée, égal à $\delta' + \delta''$ où l'image de $\mathscr{A}^{p,q}$ par δ' (resp. δ'') est $\mathscr{A}^{p-1,q}$ (resp. $\mathscr{A}^{p,q-1}$). Si $\mathbf{E}$ est muni d'une métrique fibrée hermitienne h, nous définissons, sur les $\mathbf{E}$-formes, les opérateurs correspondants de la manière suivante; pour $\varphi \in \mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E})$ nous posons :

$$(3) \qquad \begin{cases} (d'_h \varphi)^A = d' \varphi^A + \sum_{B=1}^r \omega_B^A \wedge \varphi^B, & (d''_h \varphi)^A = d'' \varphi^A \\ (\delta'_h \varphi)^A = \delta' \varphi^A, & (\delta''_h \varphi)^A = \delta'' \varphi^A - \sum_{B=1}^r i(\omega_B^A) \varphi^B, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} d_h = d'_h + d''_h, \qquad \delta_h = \delta'_h + \delta''_h \\ \Delta'_h = d'_h \delta'_h + \delta'_h d'_h, \qquad \Delta''_h = d''_h \delta''_h + \delta''_h d''_h \qquad \Delta_h = d_h \delta_h + \delta_h d_h. \end{cases}$$

Les deux opérateurs δ'_h et d''_h ne dépendent pas de h, mais nous conservons néanmoins dans leur écriture la référence explicite à h en indice pour les distinguer des opérateurs correspondants agissant sur les formes scalaires.

Pour plus de détails sur ce qui précède et ce qui suit, nous renvoyons le lecteur à [6].

On a les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} (d'_h)^2 = (d''_h)^2 = (\delta'_h)^2 = (\delta''_h)^2 = 0, \\ d_h^2 \varphi = \Omega \wedge \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E}), \qquad \forall p, q. \end{cases}$$

De semblables opérateurs, indicés par h^*, sont définis sur les $\mathbf{E}^*$-formes; par ailleurs, l'anti-isomorphisme σ_h, défini par (1), s'étend naturellement en un anti-isomorphisme de $\mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E})$ sur $\mathscr{A}^{p,q}(\mathbf{E}^*)$.

Un calcul simple, utilisant (1) et (3), montre le théorème suivant (*cf.* [6] p. 38).

LEMME DE COMMUTATION. — *L'opérateur σ_h vérifie la relation*

$$(5) \qquad \sigma_h \circ d_h = d_{h^*} \circ \sigma_h.$$

Si M est munie d'une structure hermitienne (M, g), nous formons de façon naturelle le produit scalaire ponctuel $(\varphi, \psi)_h$ de deux $\mathbf{E}$-formes φ et ψ de même type, et leur produit scalaire global $\langle \varphi, \psi \rangle_h$, défini par

$$(6) \qquad \langle \varphi, \psi \rangle_h = \int_M (\varphi, \psi)_h \, v_g,$$

où v_g est la forme-volume de (M, g).

Pour $\langle \, , \rangle_h$, les couples (d'_h, δ'_h), (d''_h, δ''_h) et (d_h, δ_h) sont formellement adjoints; en particulier, une $\mathbf{E}$-forme φ est annulée par Δ'_h (resp. Δ''_h, Δ_h) si, et seulement si, elle est annulée par d'_h *et* δ'_h (resp. d''_h et δ''_h, d_h et δ_h); une telle forme est dite Δ'_h-harmonique (resp. Δ''_h-harmonique, Δ_h-harmonique). L'espace $H^{p,q}(M, \mathbf{E})$ des $\mathbf{E}$-formes de type (p, q) Δ''_h-harmonique est isomorphe à $H^q(M; \Lambda^p \mathbf{T} \otimes \mathbf{E})$, q-ième groupe de cohomologie à valeurs dans le faisceau des germes de sections analytiques du fibré holomorphe $\Lambda^p \mathbf{T} \otimes \mathbf{E}$.

Dans la suite, nous bornerons notre attention aux sections de $\mathbf{E}$: un élément ξ de $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$ est Δ'_h-harmonique (resp. Δ''_h-harmonique, Δ_h-harmonique) si, et seulement si, ξ est annulé par d'_h (resp. d''_h, d_h); *en particulier, l'espace des sections Δ''_h-harmoniques coïncide avec l'espace* $\Gamma(\mathbf{E})$ *des sections holomorphes de* $\mathbf{E}$. Par ailleurs, l'opérateur d_h, restreint à $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, n'est autre que l'*opérateur dérivée covariante* de la connexion canonique de $(\mathbf{E}, h)$.

3. Connexion de Chern. Variétés semi-kählériennes

Une structure hermitienne (M, g) sur M induit une métrique fibrée hermitienne h sur le fibré tangent holomorphe $\mathscr{T}$ de M. Les constructions précédentes s'appliquent sans modifications au couple $(\mathscr{T}, h)$. La connexion canonique de $(\mathscr{T}, h)$ s'étend de façon unique en une connexion réelle sur le fibré tangent complexifié $\mathscr{T}^c$ de M, la *connexion de* CHERN liée à g.

Soient $\{ e_\alpha \}$, $\alpha = 1, \ldots, n$ un repère local *holomorphe* de $\mathscr{T}$, déduit d'un système de coordonnées complexes sur M, et $\{ \theta^\alpha \}$ le repère dual de $\mathbf{T}$; si ∇ note l'opérateur dérivée covariante de la connexion de CHERN, la matrice locale ω de celle-ci est définie par

$$\nabla e_\alpha = \textstyle\sum_{\beta=1}^n \omega_\alpha^\beta . e_\beta, \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, n,$$

où ω_α^β est une forme de type (1, 0) qui s'écrit

$$\omega_\alpha^\beta = \textstyle\sum_{\mu=1}^n \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\mu . \theta^\mu, \qquad \forall \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

La *torsion* T de la connexion canonique a pour composantes relatives aux mêmes repères :

$$T_\alpha{}^\gamma{}_\beta = \Gamma_\beta{}^\gamma{}_\alpha - \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta, \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n,$$

la *2-forme fondamentale* F de (M, g) s'écrit

$$F = \textstyle\sum_{\alpha, \beta=1}^n i\, g_{\alpha\bar\beta}\, \theta^\alpha \wedge \overline{\theta^\beta},$$

où $(g_{\alpha\bar\beta})$ sont les composantes locales de g.

Le *vecteur de torsion* V est le vecteur réel de composantes $V^\lambda = \sum_{\mu=1}^n T_{\bar\mu}{}^{\bar\mu\lambda}$, $V^{\bar\lambda} = \overline{V^\lambda}$ relatives au repère $\{ e_\lambda, e_{\bar\lambda} \}$; la *forme de torsion* v est la 1-forme associée par dualité riemannienne.

Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe 1 pour la démonstration des deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soient* φ *et* ψ *deux formes scalaires sur* M *de types respectifs* (1, 0) *et* (0, 1)*; on a*

$$\left\{\begin{aligned} \delta\varphi &= \delta'\varphi = -\textstyle\sum_{\lambda=1}^n \nabla^\lambda \varphi_\lambda - \sum_{\lambda=1}^n V^\lambda . \varphi_\lambda . \\ \delta\psi &= \delta''\psi = -\textstyle\sum_{\mu=1}^n \nabla^{\bar\mu} \psi_{\bar\mu} - \sum_{\mu=1}^n V^{\bar\mu} \psi_{\bar\mu} . \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$(d''\varphi)_{\lambda\bar\mu} = -\nabla_{\bar\mu}\varphi_\lambda, \qquad (d'\psi)_{\lambda\bar\mu} = +\nabla_\lambda \psi_{\bar\mu} . \tag{8}$$

LEMME 2. — *Si* F *est la 2-forme fondamentale de* (M, g), *on a*

$$(\delta' F)_{\bar\beta} = -i\, v_{\bar\beta}, \qquad (\delta'' F)_\alpha = i\, v_\alpha, \tag{9}$$

d'où résulte la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Soient* (M, g) *une variété hermitienne de dimension complexe* $n \geqslant 2$, F *sa 2-forme fondamentale,* ∇ *la connexion de* CHERN *liée à* g, *de torsion* T; *les quatre propriétés sont équivalentes :*

(S_1) $\delta F = 0$, *i. e.* F *est cofermée;*

(S_2) *Le vecteur de torsion* V *est nul;*

(S_3) *La forme* F^{n-1} *est fermée;*

(S_4) $\Delta' f = \Delta'' f = 1/2\, \Delta f$ *pour toute fonction scalaire* f *sur* M.

Démonstration. — Le lemme 2 exprime l'équivalence de (S_1) et (S_2). (S_1) équivaut à dire que la forme adjointe de F, égale à $(1/n-1)!)\, F^{n-1}$, est fermée; d'où l'équivalence de (S_1) et (S_3).

L'équivalence de (S_1) et (S_4) résulte de la relation

$$i(\Delta'' - \Delta') f = -i(\delta F)\, df \tag{10}$$

établie, pour tout scalaire f sur M, à partir du lemme 1 (*cf.* annexe 1) [le lecteur se gardera de confondre dans (10) le i du premier membre, qui désigne un nombre complexe, et le i du deuxième membre qui note le produit contracté des deux formes δF et df].

DÉFINITION 2. — *Une variété hermitienne* (M, g) *de dimension complexe* n *vérifiant l'une quelconque des propriétés* (S_1), (S_2), (S_4), *ou* (S_3) *si* $n \geqslant 2$, *est dite variété hermitienne de type spécial ou encore variété semi-kählérienne.*

(M, g) est kählérienne si, et seulement si, la connexion de CHERN coïncide avec la connexion riemannienne associée à g, si, et seulement si, la torsion T est nulle; une variété kählérienne est donc *a fortiori* semi-kählérienne.

Pour $n = 1$, toute surface de Riemann est kählérienne, et donc semi-kählérienne.

Pour $n = 2$, il résulte de (S_3) que toute variété hermitienne, semi-kählérienne est kählérienne.

Pour $n > 2$, il existe des variétés hermitiennes compactes semi-kählériennes qui ne sont pas kählériennes.

Exemple de variété hermitienne compacte semi-kahlérienne. — Le groupe $\mathbf{C}^3$ est plongé dans le groupe $GL(3, \mathbf{C})$ des matrices régulières de rang 3 à éléments complexes lorsque à $(z^1, z^2, z^3) \in \mathbf{C}^3$ est associée la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & z^1 & z^2 \\ 0 & 1 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

nous obtenons ainsi une structure de groupe non abélien sur $\mathbf{C}^3$, dont nous considérerons le sous-groupe G constitué de telles matrices dont les éléments sont des entiers de Gauss; le quotient de $\mathbf{C}^3$ par l'action à droite de G est une variété complexe compacte M ([14] p. 115); le fibré cotangent $\mathbf{T}$ holomorphe de M est trivialisé par trois formes holomorphes θ^1, θ^2 et θ^3 qui s'écrivent localement :

$$\theta^1 = dz^1, \qquad \theta^2 = dz^2 - z^3 . dz^1, \qquad \theta^3 = dz^3$$

et telles par conséquent que

$$d\theta^1 = d\theta^3 = 0, \qquad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \theta^3.$$

En particulier, M n'est pas kählérienne ([14] p. 116). Ces trois formes constituent en chaque point z de M un repère pour T_z; la 2-forme réelle $F = i \sum_{\alpha=1}^{3} \theta^\alpha \wedge \overline{\theta^\alpha}$ est donc de rang maximum, i. e. est la 2-forme fondamentale d'une structure hermitienne sur M; il est immédiat que $dF \wedge F$ est nul.

On peut montrer, plus généralement, que toute variété hermitienne compacte *localement plate*, i. e. dont la courbure hermitienne est nulle en tous points, est semi-kählérienne; cela vaut en particulier pour les variétés analytiquement parallélisables (*cf.* démonstration en annexe 3).

II. Théorème d'inclusion

4. Le théorème d'inclusion pour les sections d'un fibré holomorphe

Soit $(\mathbf{E}, h)$ un fibré hermitien au-dessus de M. L'image de $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ par dualité hermitienne, c'est-à-dire par σ_h^{-1}, est un sous-espace de $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$ que nous noterons H_h. Les éléments de $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ sont caractérisés par le fait que leur image par d''_{h^*} est nulle; il résulte donc du lemme de commutation (5) du paragraphe 2 la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — *Pour* $\xi \in \mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, *on a*

$$\xi \in H_h = \sigma_h^{-1}(\Gamma(\mathbf{E}^*)) \;\Leftrightarrow\; d'_h \xi = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta'_h \xi = 0.$$

En d'autres termes, les éléments duaux de $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ sont les sections Δ'_h-harmoniques de $\mathbf{E}$; on remarquera que H_h varie avec h dans $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, mais que *sa dimension complexe reste constante*, égale à $\dim \Gamma(\mathbf{E}^*)$.

L'intersection, dans $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, de H_h et $\Gamma(\mathbf{E})$ sera notée U_h, avec la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *Pour* $\xi \in \mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, *on a*

$$\xi \in \mathrm{U}_h = \Gamma(\mathbf{E}) \cap \sigma_h^{-1}(\Gamma(\mathbf{E}^*)) \;\Leftrightarrow\; d_h \xi = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta_h \xi = 0.$$

L'espace U_h est donc l'espace des sections Δ_h-harmoniques de E, c'est-à-dire l'espace des sections de $\mathbf{E}$ *à dérivée covariante nulle pour la connexion canonique.*

COROLLAIRE 1. — *Les éléments de U_h ont une norme constante sur M.*

COROLLAIRE 2. — *Pour $\xi \in U_h$, $\Omega(\xi)$ est la 2-forme scalaire nulle, et $K(\xi)$ est nul sur M.*

Le corollaire 2 résulte immédiatement de la relation (4).

Supposons maintenant M pourvue d'une structure hermitienne (M, g); l'espace $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$ possède un produit scalaire hermitien, le produit scalaire global $\langle\ ,\ \rangle_h$ défini par (6); nous notons J le *sous-espace des éléments de* $\Gamma(\mathbf{E})$ *qui sont orthogonaux, dans* $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, *à l'ensemble des éléments de H_h.*

Pour τ, élément quelconque de $\Gamma(\mathbf{E}^*)$, et ξ, élément de J, on a

$$0 = \langle \xi, \sigma_h^{-1}(\tau) \rangle_h = \int_M (\xi, \sigma_h^{-1}(\tau))_h . v_g.$$

Le produit scalaire ponctuel en $z \in M$, $(\xi, \sigma_h^{-1}(\tau))_h$ n'est autre que $\tau_z(\xi_z)$, où $\tau_z \in \mathbf{E}_z$ et $\xi_z \in \mathbf{E}_z$ sont les valeurs en z de τ et ξ respectivement; comme τ et ξ sont des sections holomorphes, $\tau(\xi)$, scalaire holomorphe globalement défini sur M compacte, est constant, égal, par définition, au *produit intérieur* de τ et ξ; on a donc :

PROPOSITION 4. — *L'espace J s'identifie au sous-espace des éléments de* $\Gamma(\mathbf{E})$ *qui annulent par produit intérieur l'ensemble des sections holomorphes de* $\mathbf{E}^*$.

COROLLAIRE. — *J ne dépend pas de h.*

Remarque. — La théorie de Hodge-De Rham-Kodaira vaut pour l'opérateur de cohomologie d'_h et le laplacien correspondant Δ'_h; nous avons donc, dans $\mathscr{A}^0(\mathbf{E})$, une décomposition unique :

$$\xi = \delta'_h d'_h \eta + H'(\xi),$$

où $\eta \in \mathscr{A}^0(\mathbf{E})$ et $H'(\xi) \in H_h$. Si $\xi \in J$, ξ est orthogonal, en particulier, à $H'(\xi)$, lui-même orthogonal à $\delta'_h d'_h \eta$, et nul par conséquent; inversement, tout élément ξ de la forme $\delta'_h d'_h \eta$ est orthogonal à H_h, d'où nous conclurons que *l'espace J s'identifie à l'image par δ'_h de l'espace* $\mathscr{A}^{1,0}(\mathbf{E})$. Comme δ'_h ne dépend pas de h, ceci constitue une autre façon de voir que J lui-même n'en dépend pas.

Plus généralement, nous considérerons un sous-espace complexe quelconque Q de $\Gamma(\mathbf{E}^*)$, d'image duale Q_h dans $\Gamma(\mathbf{E})$ et le sous-espace J_Q des éléments de $\Gamma(\mathbf{E})$ qui annule par produit intérieur l'ensemble des sections de Q.

Le théorème que nous voulons montrer est le suivant (*cf.* aussi [5]).

THÉORÈME D'INCLUSION. — *Soient* $(\mathbf{E}, h)$ *un fibré hermitien au-dessus d'une variété hermitienne compacte* (M, g), K *l'endomorphisme de Ricci sur* $\mathbf{E}$ *relatif à* h *et* g.

Si K *est non-négatif,*

(*a*) *l'image, par dualité hermitienne, de toute section holomorphe de* $\mathbf{E}^*$ *est une section holomorphe de* $\mathbf{E}$*; en particulier,*

$$\dim \Gamma(\mathbf{E}^*) \leqslant \dim \Gamma(\mathbf{E}); \tag{11}$$

(*b*) *les sections holomorphes de* $\mathbf{E}^*$ *sont à dérivées covariantes nulles pour la connexion canonique; en particulier, elles ont une norme constante sur* M *et ne peuvent s'y annuler en dehors de la section nulle.*

COROLLAIRE 1. — *Avec les hypothèses du théorème, on a, pour tout sous-espace complexe* Q *de* $\Gamma(\mathbf{E}^*)$, *la décomposition orthogonale suivante*

$$\Gamma(\mathbf{E}) = J_Q \oplus Q_h,$$

où Q_h *est l'image anti-isomorphe de* Q *par dualité hermitienne, et* J_Q *l'annulateur de* Q *dans* $\Gamma(\mathbf{E})$ *par produit intérieur.*

Démonstration du théorème. — Nous voulons montrer que H_h est inclus dans $\Gamma(\mathbf{E})$ [partie (*a*) du théorème], d'où résultera que H_h coïncide avec U_h, ce qui démontrera la partie (*b*) en vertu de la proposition 3.

Soit $\xi \in H_h$; la connexion canonique est compatible avec h, d'où, si $\{e_\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, n$, est un repère local de $\mathcal{T}$ lié à un système de coordonnée complexes $\{z^\mu\}$, et si ∂_μ, $\partial_{\bar\mu}$ désigne respectivement les opérateurs $\partial/\partial z^\mu$ et $\partial/\partial \bar z^\mu$ opérant sur les scalaires :

$$\begin{aligned}\partial_{\bar\mu}(\xi, \xi)_h &= ([d''_h \xi](\bar e_\mu), \xi)_h + (\xi, [d'_h \xi](e_\mu))_h \\ &= ([d''_h \xi](\bar e_\mu), \xi)_h\end{aligned}$$

et

$$\partial_\lambda \partial_{\bar\mu}(\xi, \xi)_h = (d'_h d''_h \xi(e_\lambda, \bar e_\mu), \xi)_h + (d''_h \xi(\bar e_\mu), d''_h \xi(\bar e_\lambda))_h$$

comme $d'_h \xi = 0$, on a, compte tenu de (4),

$$d'_h d''_h \xi = \Omega(\xi),$$

de sorte qu'en contractant par g nous obtenons :

$$g^{\lambda\bar\mu} . \partial_\lambda \partial_{\bar\mu}(\xi, \xi)_h = (K(\xi), \xi)_h + (d''_h \xi, d''_h \xi)_h \qquad \forall \xi \in H_h. \tag{12}$$

Le premier membre de cette égalité est l'opposé du *laplacien complexe* $L[(\xi, \xi)_h]$ du scalaire réel $(\xi, \xi)_h$; l'opérateur L est *elliptique* et *sans terme constant* (i. e. tel que $L(1) = 0$) : il résulte alors du théorème de E. HOPF (*cf.* Introduction) que si $L[(\xi, \xi)_h]$ est partout non-positif sur M compacte, $(\xi, \xi)_h$ *est constant.* Cela se produit en particulier si K est non-négatif.

Dans ce cas, les deux membres de (12) sont nuls, ainsi donc que $d''_h \xi$, ce qui implique que ξ appartient à $\Gamma(\mathbf{E})$.

C.Q.F.D.

Démonstration du corollaire 1. — Q_h étant inclus dans H_h est, *a fortiori*, inclus dans $\Gamma(\mathbf{E})$; J_Q est donc le supplémentaire orthogonal, dans $\Gamma(\mathbf{E})$, de Q_h, ce qui démontre le corollaire 1.

COROLLAIRE 2. — *Si K est partout non-négatif (non-positif), défini-positif (défini-négatif) en un point z_0 de M, $\Gamma(\mathbf{E}^*)$ $(\Gamma(\mathbf{E}))$ est réduit à zéro.*

Démonstration. — Si $K \geqslant 0$, nous avons vu que le produit scalaire $(K(\xi), \xi)_h$ est nul sur M pour tout élément ξ de H_h; cet élément ξ est donc nul en z_0, et nul, par conséquent, sur M entière puisque $(\xi, \xi)_h$ est constant; démonstration identique pour $K \leqslant 0$ et < 0 en z_0. Le corollaire 2 généralise un théorème de [12] où les mêmes faits sont établis quand K est supposé partout défini-positif (défini-négatif); nous nous sommes d'ailleurs étroitement inspirés de [12] pour établir (12).

Pour tout $\xi \in \Gamma(\mathbf{E})$, on montre de façon analogue :

$$(13) \qquad -L[(\xi, \xi)_h] = -(K(\xi), \xi)_h + (d'_h \xi, d'_h \xi)_h \qquad \forall \xi \in \Gamma(\mathbf{E});$$

soit ξ une section holomorphe de $\mathbf{E}$ telle que $(K(\xi), \xi)_h$ soit nul sur M; il suit de (13) et du théorème de E. HOPF que $d'_h \xi$ est nulle, i. e. que ξ appartient à U_h, d'où nous concluons que $K(\xi)$ *lui-même* est nul sur M (cor. 2 de prop. 3); nous avons donc la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — *Si $K(\xi)$ est partout orthogonal (pour la métrique fibrée hermitienne h sur $\mathbf{E}$) à ξ, pour $\xi \in \Gamma(\mathbf{E})$, $K(\xi)$ est nul sur M. L'espace U_h des sections de $\mathbf{E}$ à dérivée covariante nulle s'identifie à l'espace des sections holomorphes de $\mathbf{E}$ annulées par l'endomorphisme de Ricci K.*

COROLLAIRE. — *Si K est à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$ sur M, sa restriction à $\Gamma(\mathbf{E})$ est nulle.*

5. Application aux p-tenseurs et aux p-formes

Les considérations du paragraphe 4 s'appliquent en particulier au fibré tangent holomorphe $\mathscr{T}$ de M, muni de la métrique fibrée hermitienne h

induite par une structure hermitienne (M, g) sur M (*cf.* § 3). L'endomorphisme de Ricci de $(\mathscr{T}, h)$ sera notée R qu'on appellera *tenseur de Ricci hermitien* de (M, g).

Une *p-forme* (resp. un *p-tenseur*) est une section C^∞ du fibré holomorphe $\Lambda^p \mathbf{T}$ (resp. $\Lambda^p \mathscr{T}$).

Soit $\mathscr{P}_p$ l'ensemble des p-uples ordonnés $[\tau] = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$ numérotés de 1 à $\binom{p}{n} = n!/[p!\,(n-p)!]$; si $\{e_\tau\}$, $\tau = 1, \ldots, n$, est un repère local holomorphe de $\mathscr{T}$, $\{ e_{[\tau]} \}_{[\tau] \in \mathscr{P}_p}$, où $e_{[\tau]} = e_{\tau_1} \wedge \ldots \wedge e_{\tau_p}$, est un repère local holomorphe de $\Lambda^p \mathscr{T}$; par rapport à un tel repère, un p-tenseur A est représenté par le $\binom{p}{n}$-uple $(A^{[\tau]})$, et on a

$$\begin{aligned} [d_{h(p)} A]^{[\tau]} &= dA^{[\tau]} + \textstyle\sum_{[\sigma] \in \mathscr{P}_p} \omega^{(p)}{}^{[\tau]}_{[\sigma]} A^{[\sigma]}, \\ &= dA^{\tau_1 \ldots \tau_p} + \textstyle\sum_{k=1}^{p} \sum_{\rho=1}^{n} \omega_\rho^{\tau_k} A^{\tau_1 \ldots (\rho)_k \ldots \tau_p}, \\ &= \nabla A^{\tau_1 \ldots \tau_p}, \end{aligned}$$

où ∇ est l'opérateur dérivée covariante de la connexion de CHERN agissant sur le *tenseur scalaire A*, ce qui s'exprime par l'énoncé suivant.

LEMME. — *Pour un p-tenseur* $A \in \mathscr{A}^0(\Lambda^p \mathscr{T})$, *la forme de degré* 1 $d_{h(p)} A$, *à valeurs dans le fibré* $\Lambda^p \mathscr{T}$ *s'identifie à la dérivée covariante* (*pour la connexion de* CHERN) *de A considérée comme tenseur scalaire sur M, de type* $(p, 0)$.

Il en va de même pour les p-formes.

Suivant [13], nous noterons T^p l'espace $\Gamma(\Lambda^p \mathscr{T})$ des p-tenseurs holomorphes, H^p celui des p-formes holomorphes $\Gamma(\Lambda^p \mathbf{T})$; l'espace J du paragraphe 4 s'identifie, en vertu de la proposition 4, à l'espace des p-tenseurs holomorphes A tels que

$$\textstyle\sum_{[\tau] \in \mathscr{P}_p} A^{[\tau]} \varphi_{[\tau]} = 0, \qquad \forall \varphi \in H^p.$$

C'est donc l'espace I^p de [13]; si $Q \subset H^p$, nous écrirons I^p_Q au lieu de J_Q.

L'espace $H_h(p)$ dans $\mathscr{A}^0(\Lambda^p \mathscr{T})$ est, en vertu du lemme précédent, l'espace des p-tenseurs A tels que

$$\nabla_\lambda \mathrm{A}^{\tau_1 \ldots \tau_p} = 0, \qquad \forall \lambda, \tau_1, \ldots, \tau_p = 1, \ldots, n$$

et *l'espace* $U_h(p)$ *est l'espace des p-tenseurs à dérivée covariante nulle pour la connexion de* CHERN.

Ceci étant, le théorème d'inclusion et son corollaire s'écriront dans ce cas comme suit.

THÉORÈME. — *Soit (M, g) une variété hermitienne compacte à tenseur de Ricci hermitien R q-non-négatif; on a, pour tout entier $p \geqslant q$,*

(*a*) *l'image par dualité hermitienne (= dualité riemannienne conjuguée) d'une p-forme holomorphe est un p-tenseur holomorphe. En particulier,*

$$\dim H^p \leqslant \dim T^p, \qquad \forall p \geqslant q;$$

(*b*) *toute p-forme holomorphe φ est à dérivée covariante nulle pour la connexion de* CHERN, *et sa norme sur M est constante; en particulier, si φ n'est pas nulle, elle ne peut s'annuler en aucun point de M.*

(*c*) *si Q est un sous-espace complexe quelconque de H^p, on a la décomposition orthogonale suivante*

$$T^p = \mathrm{I}_Q^p \oplus Q_{h(p)}, \qquad \forall p \geqslant q \tag{14}$$

où $Q_{h(p)}$ est l'image anti-isomorphe duale de Q dans T^p, et où I_Q^p est l'annulateur dans T^p de Q par produit intérieur.

Remarque 1. — L'espace H^p s'identifie à $H^{p,0}(M, \mathbf{O})$, où $\mathbf{O}$ est le faisceau des germes de fonctions analytiques sur M; si M admet une structure hermitienne à tenseur de Ricci hermitien q-non-négatif sur M, et q-défini-positif en un point de M, $H^{p,0}(M, \mathbf{O})$ est réduit à 0, $\forall p \geqslant q$, en vertu de la remarque du paragraphe 4.

Faisons $q = 2$; R satisfait la condition susdite, avec $q = 2$, dans le cas particulier où R est partout non-négatif et où la dimension complexe de son noyau est inférieure ou égale à 1 en un point de M, car, en ce point, la somme partielle de deux valeurs propres quelconques de r est alors strictement positive; dans ce cas, on a donc

$$H^{p,0}(M; \mathbf{O}) = \{0\}, \qquad \forall p \geqslant 2.$$

Supposons maintenant que (M, g) soit *kählérienne*; $H^{2,0}(M; \mathbf{O})$ et $H^{0,2}(M; \mathbf{O})$ sont isomorphes; par conséquent $H^2(M, \mathbf{O}) \simeq H^{0,2}(M, \mathbf{O})$ est lui-même réduit à (0) ce qui prouve ([14], p. 143) que M est une variété de Hodge :

PROPOSITION 6. — *Si la courbure de Ricci d'une variété kählérienne compacte (M, g) est non-négative, et si son noyau est, en un point au moins de M, de dimension complexe inférieure à 2, M est une variété de Hodge.*

Cette proposition généralise un résultat bien connu lorsque la courbure de Ricci est supposée positive en tout point de M.

Remarque 2. — Pour $p = 1$, on note usuellement (*cf.* [13]) L l'espace T^1 des *champs de vecteurs holomorphes*, H l'espace H^1 des 1-formes holomorphes, I l'espace I^1; l'espace I^1_Q sera noté I_Q pour Q sous-espace de H. D'après le théorème ci-dessus, si R est non-négatif, la décomposition (14) vaut pour tout entier p positif; en particulier,

$$L = \mathrm{I}_Q \oplus Q_h,$$

où Q_h est anti-isomorphe à Q. L est une *algèbre de Lie* par le crochet usuel des champs de vecteurs.

Soit B le sous-espace, dans H, des 1-formes holomorphes *fermées* de M; l'algèbre dérivée $[L, L]$ est contenue dans I_B, car

$$\beta([X, Y]) = -d\beta(X, Y) - Y\beta(X) + X\beta(Y) = 0,$$
$$\forall X, Y \in L, \qquad \forall \beta \in B.$$

Autrement dit, I_B est un idéal de L et le quotient L/I_B est *abélien*; il en va de même pour tout sous-espace Q de B, en particulier pour l'espace F *des formes d'Albanese* de M (*cf.* [6] et [9]). En revanche, I lui-même n'est pas nécessairement un idéal de L comme dans le cas kählérien.

Remarque 3. — Le corollaire du « théorème d'inclusion » est à rapprocher de [13] où une semblable décomposition est obtenue dans le cas où (M, g) *est kählérienne, à première classe de* CHERN $c_1(M)$, *non-négative*, i. e. possédant un représentant non-négatif. Si (M, g) est kählérienne, le tenseur de Ricci hermitien R est aussi la courbure de Ricci usuelle (riemannienne) de sorte que si R est non-négatif il en va de même de $c_1(M)$. Mais, dans le cas kählérien, $c_1(M)$ peut avoir, *a priori*, un représentant non-négatif qui ne soit le tenseur de Ricci d'aucune structure hermitienne sur M; dans ce cas, la décomposition obtenue dans [13] ne résulte pas de notre théorème; elle n'est d'ailleurs pas orthogonale en général. En ce sens, la situation kählérienne est plus riche que la situation générale (*cf.* aussi l'introduction de [9]).

6. Cas où M est une variété semi-kählérienne

Soit $\xi = (\xi^A)$, $A = 1, \ldots, r$, une section d'un fibré hermitien $(\mathbf{E}, h)$, au-dessus d'une variété-hermitienne (M, g); on a les relations :

$$(\Delta'_h \xi)^A = \Delta' \xi^A + \textstyle\sum_{B=1}^r \delta'(\omega^A_B \xi^B), \qquad A = 1, \ldots, r$$
$$(\Delta''_h \xi)^A = \Delta'' \xi^A - \textstyle\sum_{B=1}^r i(\omega^A_B) d'' \xi^B,$$

que l'on tire immédiatement de (3).

Si (M, g) *est semi-kählérienne*, il résulte de (S_4) que

$$(\Delta'_h \xi - \Delta''_h \xi)^A = (\delta' \omega^A_B) \xi^B.$$

Par ailleurs, le lemme 1 nous permet d'écrire dans ce cas

$$\delta' \omega_B^A = -\sum_{\lambda=1}^n \nabla^\lambda \omega_{B\lambda}^A = -\sum_{\lambda,\mu=1}^n g^{\lambda\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\mu}} \omega_{B\lambda}^A.$$

Comme, d'autre part

$$\Omega_{B\lambda\bar{\mu}}^A = (d'' \omega_B^A)_{\lambda\bar{\mu}} = -\nabla_{\bar{\mu}} \omega_{B\lambda}^A$$

(relation qui vaut d'ailleurs, que (M, g) soit ou non semi-kählérienne), nous concluons que

$$K_B^A = \delta' \omega_B^A; \tag{15}$$

soit donc la proposition suivante.

PROPOSITION 7. — *Soit* (**E**, h) *un fibré hermitien au-dessus d'une variété hermitienne* (M, g) *semi-kählérienne. La restriction à* $\mathscr{A}^0$ (**E**) *de l'opérateur* $\Delta_h' - \Delta_h''$ *est égale à l'endomorphisme de Ricci* K*:*

$$K(\xi) = (\Delta_h' - \Delta_h'')(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathscr{A}^0(\mathbf{E}). \tag{16}$$

Si M est compacte, la relation (16) implique la suivante :

$$\langle d_h' \xi, d_h' \xi \rangle_h - \langle d_h'' \xi, d_h'' \xi \rangle_h = \langle K(\xi), \xi \rangle_h, \tag{17}$$

qui nous redonne aisément, dans ce cas particulier où (M, g) est de type spécial, le théorème d'inclusion du paragraphe 4, sans recourir au théorème de E. HOPF.

III. La constante fondamentale d'un fibré en droites

7. Cas où E est un fibré en droites

Nous supposerons désormais que **E** est un *fibré en droites*, c'est-à-dire un fibré vectoriel holomorphe de dimension fibrée 1, que nous noterons **L** de façon générique.

Une métrique fibrée hermitienne h sur **L** est déterminée localement par un scalaire positif, également noté h; nous avons ([6], p. 84) le lemme suivant.

LEMME. — *Toute métrique fibrée hermitienne h sur un fibré en droites* **L** *est conforme à l'une d'entre elle* h_0, *i. e. est égale à* $f.h_0$, *pour une fonction scalaire* f *positive sur* M.

La connexion canonique ω de $(\mathbf{L}, h)$ est localement représentée par la forme scalaire $d' \log h$, et la courbure Ω *est une forme scalaire de type* (1, 1) *globalement définie* sur M, localement déterminée par

$$\Omega = d'' d' \log h.$$

La 2-forme réelle $-i\,\Omega = \tilde{\Omega}$ est un représentant de $2\pi\, c_R(L)$, où $c_R(L)$ est la classe de Chern réelle de $\mathbf{L}$.

L'endomorphisme de Ricci K est localement défini par

$$K(\xi) = k\,\xi \qquad \forall\, \xi \in \mathscr{A}^0(\mathbf{L})$$

où, par abus de langage, la même lettre ξ désigne un élément de $\mathscr{A}^0(\mathbf{L})$ et le scalaire local représentatif.

Le scalaire k ainsi défini est la *trace* de Ω et, comme tel, *est un scalaire réel globalement défini sur M*, qu'on appellera *scalaire de Ricci associé* à h.

Le scalaire de Ricci k est, *localement*, le laplacien complexe $L(\log h)$ de $\log h$ relatif à la structure hermitienne g sur M.

Note. — L'opérateur L, que nous appelons ici laplacien complexe, *est le même opérateur* que celui qui a été baptisé hessien complexe, et noté H en [7] et [8]; cette dernière appellation est plus couramment réservée à la matrice des dérivées secondes mixtes, i. e. à la 2-forme réelle de courbure $\tilde{\Omega} = i\, d'\, d''(\log h)$.

Si $h' = f.h$ est une seconde métrique hermitienne fibrée sur $\mathbf{L}$, son scalaire associé k' s'écrit

$$k' = k + L(\log f). \tag{18}$$

8. L'excentricité d'une structure hermitienne

Nous aurons besoin, dans un premier temps, d'établir brièvement, quelques propriétés du laplacien complexe L et de son *adjoint* L^* pour le produit scalaire hermitien global $\langle\, ,\, \rangle$ défini sur l'espace $\mathscr{A}^0$ des scalaires (complexes) de M.

Nous avons déjà noté au paragraphe 4 que L *satisfait aux conditions du théorème de* E. Hopf; en particulier *le noyau* $\operatorname{Ker} L$ *de* L *est le sous-espace* $\mathbf{C}$ *de* $\mathscr{A}^0$ *des scalaires constants sur M.* Par définition $L(f)$ s'écrit :

$$L(f) = -(id'\,d''\,f, F), \qquad \forall\, f \in \mathscr{A}^0,$$

de sorte que

(19) $$L^*(f) = -i\,\delta'\,\delta''(fF); \qquad \forall f \in \mathscr{A}^0,$$

où F est la 2-forme fondamentale de (M, g).

PROPOSITION 8. — *On a*

(20) $$L(f) - L^*(f) = V.f - \alpha f, \qquad \forall f \in \mathscr{A}^0$$

où α *est le scalaire réel* $L^*(1) = -i\,\delta'\,\delta''F = 1/2\,\delta v$.

Cette proposition se démontre simplement en utilisant les lemmes 1 et 2 du paragraphe 3 (*cf.* annexe).

COROLLAIRE. — *Le laplacien complexe est auto-adjoint si, et seulement si,* (M, g) *est semi-kählérienne.*

Démonstration. — Si (M, g) est semi-kählérienne α et V sont nuls par définition, donc L et L^* sont égaux à cause de (20); inversement, si $L = L^*$, $\alpha = L^*(1) = L(1) = 0$; $V.f$ est donc nul pour tout $f \in \mathscr{A}^0$, i. e. $V = 0$, ce qui est la définition même des variétés semi-kählériennes [prop. 1, (S_2)].

Remarque. — Si (M, g) est semi-kählérienne L est égal à la moitié du laplacien riemannien Δ, soit encore à $\Delta' = \Delta''$; inversement, si $L = 1/2\,\Delta$, (M, g) est semi-kählérienne puisque Δ est auto-adjoint; la conclusion demeure si L est égal à l'un des deux opérateurs Δ' ou Δ'' (auquel cas, il est nécessairement égal à l'autre) (*cf.* annexe 1).

DÉFINITION. — *La structure hermitienne* (M, g) *est d'excentricité nulle si* $\alpha = L^*(1)$ *est identiquement nulle sur* M, ou, de façon équivalente, *si l'intégrale sur* (M, g) *de* $L(f)$ *est nulle, quel que soit* $f \in \mathscr{A}^0$.

EXEMPLE. — *Les structures hermitiennes semi-kählériennes* (a fortiori *kählériennes*) *sont d'excentricité nulle,* comme il résulte immédiatement du corollaire de la proposition 8.

Un résultat-clé de ce paragraphe est le suivant :

PROPOSITION 9. — *Il existe une fonction* (*réelle*) f_0, *et une seule, vérifiant les deux conditions*

$$L^*(f_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle f_0, 1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \mathrm{vol}(M, g).$$

Démonstration. — L et L^* sont des opérateurs elliptiques au-dessus d'une variété compacte; nous avons donc *les deux décompositions orthogonales de Hodge :*

(21) $$\mathscr{A}^0 \simeq \mathrm{Ker}\,L \oplus \mathrm{Im}\,L^* \simeq \mathbf{C} \oplus \mathrm{Im}\,L^*,$$

(22) $$\mathscr{A}^0 \simeq \mathrm{Ker}\,L^* \oplus \mathrm{Im}\,L,$$

où Ker et Im désignent respectivement le noyau et l'image de l'opérateur. De (21), nous déduisons que *la dimension* (*complexe*) *du conoyau de* L^* *est* 1; par ailleurs, les indices de L et L^* sont égaux puisque leur symbole principal est commun (prop. 8); *cet indice commun est donc nul*; il en résulte que *Ker* L^* *est de dimension* (*complexe*) *égale à* 1. Soit f un élément quelconque non-nul de Ker L^* que nous pouvons supposer réel puisque L^* est un opérateur réel; $\langle f, 1 \rangle$ *est différent de zéro*; si tel n'était pas le cas en effet, le scalaire constant 1 serait orthogonal à f, donc à Ker L^* tout entier; 1 devrait donc appartenir à Im L à cause de (22) ce qui est interdit par le théorème de E. Hopf appliqué à L; *il existe donc, dans Ker* L^* *un scalaire* (*unique*) f_0 *tel que* $\langle f_0, 1 \rangle$ *ait une valeur donnée arbitraire.*

Définition. — *Le scalaire* f_0 *de la proposition* 9 *est dit scalaire d'excentricité de la structure hermitienne* (M, g).

Il résulte immédiatement des définitions que *le scalaire d'excentricité* f_0 *de* (M, g) *est égal à* 1 *si, et seulement si,* (M, g) *est d'excentricité nulle.*

Lorsque g est remplacée par une métrique *conforme* $\varphi . g$, $\varphi > 0$, le nouveau laplacien complexe L_φ est égal à $\varphi^{-1}.L$, et son adjoint L_φ^* (relativement à $\varphi . g$) s'écrit

$$(23) \qquad L_\varphi^*(f) = \varphi^{-n} . L^*(\varphi^{n-1}.f), \qquad \forall f \in \mathscr{A}^0,$$

de sorte que si f_0 est le scalaire d'excentricité de (M, g), *le scalaire* $\varphi^{1-n}.f_0$ *est un générateur* (en général non-normalisé) *de Ker* L^*. En particulier, nous avons le résultat suivant.

Proposition 10. — *Si* $n > 1$, *il existe, dans chaque famille conforme de structures hermitiennes sur* M, *au plus une structure hermitienne* (*à une homothétie positive près*) *d'excentricité nulle.*

Une telle structure en particulier existe dans la famille conforme de g si f_0 n'a pas de zéro sur M.

On a la proposition suivante :

Proposition 11. — *La fonction d'excentricité* f_0 *de* (M, g) *est non-négative; l'ensemble de ses zéros est d'intérieur vide.*

Démonstration. — L'ensemble des points de M où f_0 est négatif est un ouvert U distinct de M puisque $\langle f_0, 1 \rangle$ est positif par définition; supposons que U ne soit pas vide, et soit ψ une fonction réelle C^∞ non-négative (mais non identiquement nulle) de support contenu dans U; considérons la transformation conforme définie par le scalaire positif $\varphi_t = 1 + t.\psi$, où t est un paramètre réel non-négatif; le noyau de $L_{\varphi_t}^*$ est engendré par $\varphi_t^{1-n}.f_0$ dont l'intégrale, relative à $(M, \varphi_t g)$, est égale à

$\langle \varphi_t . f_0, 1 \rangle$, i. e. à la somme $\langle f_0, 1 \rangle + t . \langle \psi f_0, 1 \rangle$, dont les deux termes sont *de signes opposés*; il existe donc un réel $t_0 > 0$ tel que cette somme soit nulle, ce qui est impossible puisque $\varphi_{t_0}^{-1n} . f_0$ n'est pas identiquement nul (*cf.* démonstration de prop. 9); U est donc vide. La seconde partie de la proposition résulte d'un théorème général de N. ARONSZAJN [1] concernant les solutions des équations elliptiques réelles du second ordre; dans le cas présent, nous pouvons démontrer ce fait de la manière suivante : soit U un ouvert non-vide de M où f_0 s'annule; soit ψ une fonction réelle C^∞ non-négative, mais non identiquement nulle, à support dans U; une telle fonction *est orthogonale à* f_0, donc orthogonale à Ker L^*, et comme telle appartient à Im L à cause de (22), ce qui est impossible puisque la seule fonction réelle non-négative de Im L est la fonction nulle (théorème de E. HOPF).

9. La constante fondamentale d'un fibré en droites. Le théorème de classification (ou des plurigenres généralisés)

THÉORÈME DE LA CONSTANTE FONDAMENTALE. — *Soit k le scalaire de Ricci, relatif à g, d'un fibré en droites hermitien* ($\mathbf{L}$, h) *au-dessus d'une variété hermitienne compacte* (M, g) *de fonction d'excentricité* f_0 :

(*a*) *la valeur moyenne* $k_g(\mathbf{L})$ *de* $f_0 . k$ *sur* (M, g) *est indépendante de la métrique fibrée h;*

(*b*) *il existe sur* $\mathbf{L}$ *une métrique fibrée unique* h_0 (*à une homothétie positive près*) *telle que le scalaire de Ricci associé* k_0 *soit constant, égal à* $k_g(\mathbf{L})$.

Démonstration. — Compte tenu de (22) et de la proposition 9, tout scalaire réel de M, en particulier k, s'écrit de façon unique

$$k = k_1 . f_0 + L(\log f_1),$$

où k_1 est une constante réelle, et f_1 un scalaire positif; de même,

$$1 = C . f_0 + L(\log f_2),$$

avec $C = \langle f_0, 1 \rangle . \langle f_0, f_0 \rangle^{-1}$; en combinant les deux égalités nous obtenons

$$k = k_0 + L\,(\log f), \tag{24}$$

avec $k_0 = k_1/C$ et $f = f_1 . f_2^{1/2}$; cette décomposition est *unique* (théorème de E. HOPF), mais *non-orthogonale en général*, sauf si (M, g) est d'excentricité nulle. Par définition de f_0, *l'intégrale sur* (M, g) *de* $f_0 . L(\log f)$

est nulle de sorte que k_0 est égal à $\langle 1, 1 \rangle^{-1}.\langle f_0.k, 1 \rangle$, i. e. *à la valeur moyenne de k sur* (M, g); ceci démontre le théorème compte tenu de (18) et du lemme du paragraphe 7.

DÉFINITION. — *Le nombre réel* $k_g(\mathbf{L})$ *est appelé constante fondamentale de* $\mathbf{L}$ *relative à* g.

PROPOSITION 12. — *Pour g fixé,* k_g *définit un homomorphisme de groupes abéliens du groupe* $H^1(M; \mathbf{O}^*)$ *des classes d'isomorphisme des fibrés en droites sur M dans le groupe additif* $\mathbf{R}$ *des réels.*

Démonstration. — Soit φ un isomorphisme analytique de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{L}'$, et h' une métrique fibrée hermitienne sur $\mathbf{L}'$; $h = h' \circ \varphi$ est une métrique fibrée hermitienne sur $\mathbf{L}$, et les formes de courbures de $(\mathbf{L}, h)$ et $(\mathbf{L}', h')$ coïncident sur M, de sorte que $k_g(\mathbf{L})$ est égal à $k_g(\mathbf{L}')$; le reste de la proposition résulte de ce que la courbure du *produit tensoriel* $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{L}', h \otimes h')$ de deux fibrés en droites hermitiens $(\mathbf{L}, h)$ et $(\mathbf{L}', h')$ est la somme des courbures de chacun d'eux.

En particulier, on a

$$k_g(\mathbf{L}^*) = -k_g(\mathbf{L}), \qquad k_g(\mathbf{L}^l) = l.k_g(\mathbf{L}), \qquad \forall\, l \in \mathbf{N}, \tag{25}$$

où $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers positifs.

Note. — La même lettre $\mathbf{L}$ désignera un fibré en droites et sa classe d'isomorphisme dans $H^1(M; \mathbf{O}^*)$.

PROPOSITION 13 :

(*a*) *Le signe de* $k_g(\mathbf{L})$ *est égal à celui de* $k_{\varphi.g}(\mathbf{L})$ *quel que soit le scalaire positif* φ.

(*b*) *Si* $\mathbf{L}$ *admet une métrique fibrée h à scalaire de Ricci non-négatif* (*non-positif*) *sur M, non identiquement nul,* $k_g(\mathbf{L})$ *est positif* (*négatif*).

Démonstration. — On a $k_{\varphi.g}(\mathbf{L}) = \langle \varphi^n, 1 \rangle.\langle \varphi.f_0, 1 \rangle^{-1}.k_g(\mathbf{L})$; (*b*) se déduit immédiatement de la détermination de $k_g(\mathbf{L})$ comme valeur moyenne de k et de la proposition 11.

La courbure Ω de $(\mathbf{L}, h)$ détermine un endomorphisme C du fibré tangent holomorphe, de composantes locales $C_\alpha^\beta = \sum_{\mu=1}^n g^{\beta\bar{\mu}}\, \Omega_{\alpha\bar{\mu}}$; nous disons que la courbure de $\mathbf{L}$ est non-négative (non-positive) si le produit scalaire hermitien $(C(X), X) = \sum_{\lambda, \mu=1}^n \Omega_{\lambda\bar{\mu}}\, X^\lambda\, \overline{X^\mu}$ est non-négatif (non-positif) pour une métrique fibrée h sur $\mathbf{L}$; cette définition ne dépend pas de g. Si $\{ e_\alpha \}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, est un repère orthonormé (pour le produit scalaire hermitien) de $\mathcal{T}_z$ en un point z de M, on a, en ce point,

$$k = \sum_{\alpha=1}^n (C(e_\alpha), e_\alpha), \tag{26}$$

d'où ce corollaire de la proposition 13 :

COROLLAIRE. — *Si la courbure de* **L** *est non-négative* (*non-positive*) *la constante fondamentale* k_g (**L**) *est positive ou nulle* (*négative ou nulle*) *quelle que soit la structure hermitienne g; s'il existe, en outre, un point z de M et un élément X de* $\mathcal{T}_z$ *tel que* $(C(X), X)$ *soit positif* (*négatif*), k_g (**L**) *est lui-même positif* (*négatif*).

On observera qu'en général les divers représentants de la classe de CHERN réelle c_R (**L**) de **L** ne sont pas tous exprimables en termes de courbure de **L**, de sorte que le précédent corollaire ne s'applique pas en général si on se borne à supposer c_R (**L**) $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$; il reste vrai pourtant, avec cette hypothèse plus faible, si M est semi-kählérienne, ou bien si la variété de Picard de M est compacte, *a fortiori* si M est kählérienne (*cf.* [8]).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME DE CLASSIFICATION (*ou des plurigenres généralisés*). — *Soient* **L** *un fibré en droites au-dessus d'une variété hermitienne compacte* (M, g), k (**L**, g) *la constante fondamentale relative à g; trois seules possibilités existent qui sont :*

(*a*) $k(\mathbf{L}, g) > 0 \Rightarrow \Gamma(\mathbf{L}^*) = \{0\}$, *et toute section holomorphe de* **L** *possède un zéro au moins sur M.*

(*b*) $k(\mathbf{L}, g) < 0 \Rightarrow \Gamma(\mathbf{L}) = \{0\}$, *et toute section holomorphe de* **L*** *possède un zéro au moins sur M.*

(*c*) $k(\mathbf{L}, g) = 0 \Rightarrow \dim \Gamma(\mathbf{L}) = \dim \Gamma(\mathbf{L}^*) \leqslant 1$, *et aucune section holomorphe non nulle de* **L** *ou* **L*** *n'a de zéro sur M.*

Démonstration. — La relation (12) du paragraphe 4, appliquée au fibré en droites L, s'écrit

$$(27)\qquad -L[(\xi, \xi)_h] = k(\xi, \xi)_h + (d''_h \xi, d''_h \xi)_h, \qquad \forall \xi \in Hh;$$

cette relation est vérifiée pour n'importe quelle métrique fibrée h, en particulier pour $h = h_0$ du *théorème de la constante fondamentale*, partie (*b*), pour laquelle $k_0 = k_g$ (**L**) est *constant*; si k_g (**L**) > 0, le théorème de E. HOPF, appliqué à L, implique alors que les deux membres de (27) sont nuls, d'où suit que ξ *est nul*, i. e. que H_h, *donc aussi* Γ (**L***), *est réduit à zéro.* Si k_g (**L**) < 0, nous concluons de même que Γ (**L**) est réduit à zéro à cause de (25). Si k_g (**L**) $= 0$, le *théorème de* E. HOPF implique que $d''_h\, \xi$ est nul, et que $(\xi, \xi)_h$ est constant, d'où nous concluons que H_h *coïncident avec* Γ (**L**), et que *toute section holomorphe non-nulle de* **L** *est dépourvue de zéro* sur M, ce qui ne laisse place qu'à *deux* possibilités : ou bien **L** et **L*** *ne possèdent* *aucune section holomorphe non-triviale*, ou bien $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}^*$ *sont* (*analytiquement*) *triviaux*. Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Remarque 1. — Il résulte du théorème de classification que si $\mathbf{L}$ possède une section holomorphe non nulle, sans être analytiquement trivial, $\Gamma(\mathbf{L}^*)$ est réduit à zéro. Il est facile de retrouver ce résultat directement sur une variété complexe compacte quelconque; soit en effet une section ξ de $\mathbf{L}$ possédant un zéro au moins sur M; le produit intérieur de ξ avec un élément quelconque τ de $\mathbf{L}^*$ est nul, de sorte que τ est nul lui-même sur le complémentaire (ouvert) des zéros de ξ; τ est donc identiquement nul.

Remarque 2. — La constante fondamentale $k(\mathbf{L}, g)$ dépend effectivement de g, mais son signe n'en dépend pas toujours; nous avons en effet le tableau réciproque suivant qui découle immédiatement du théorème de classification :

$$-\dim\Gamma(\mathbf{L}) > 1 \quad\Rightarrow\quad k(\mathbf{L}, g) > 0 \quad \text{et} \quad \Gamma(\mathbf{L}^*) = \{0\},$$

$$-\dim\Gamma(\mathbf{L}^*) > 1 \quad\Rightarrow\quad k(\mathbf{L}, g) < 0 \quad \text{et} \quad \Gamma(\mathbf{L}) = \{0\},$$

$$-\left.\begin{array}{l}\dim\Gamma(\mathbf{L}) = 1\\ \dim\Gamma(\mathbf{L}^*) = 0\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad k(\mathbf{L}, g) > 0,$$

$$-\left.\begin{array}{l}\dim\Gamma(\mathbf{L}^*) = 1\\ \dim\Gamma(\mathbf{L}) = 0\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad k(\mathbf{L}, g) < 0,$$

$$-\dim\Gamma(\mathbf{L}) = \dim\Gamma(\mathbf{L}^*) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{L}\,\text{analytiquement trivial} \;\Rightarrow\; k(\mathbf{L}, g) = 0,$$

pour toute structure hermitienne (M, g).

La seule situation où le signe de $k(\mathbf{L}, g)$ n'est pas déterminable *a priori* est celle où

$$\dim(\mathbf{L}) = \dim(\mathbf{L}^*) = 0.$$

10. Plurigenre et plurigenre dual d'une variété

Dans ce paragraphe, nous considérerons le fibré en droites $\mathbf{L} = \mathscr{K}^*$, où $\mathscr{K}$ est *le fibré en droite canonique* $\Lambda^n \mathbf{T}$ de M, et les puissances tensorielles de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}^*$.

Pour l entier positif, une section de $\mathscr{K}^l$ est appelée une (l, n)-*forme*, et une section de $\mathscr{K}^{*l}$ un (l, n)-*tenseur*. La dimension complexe de l'espace $\Gamma(\mathscr{K}^l)$ des (l, n)-*formes holomorphes* est le *l-ième plurigenre* P_l de M, celle de l'espace $\Gamma(\mathscr{K}^*_l)$ des (l, n)-*tenseurs holomorphes* son *l-ième plurigenre dual* Q_l (*cf.* [11]).

Si M est munie d'une structure hermitienne (M, g), $k(\mathcal{K}^*, g)$ sera dite *constante fondamentale* de M relative à g, notée $k(M, g)$. Quand (M, g) est kählérienne, $k(M, g)$ coïncide avec la constante fondamentale de [11].

Il résulte de (19) que le signe de $k(\mathbf{L}^l, g)$, pour un fibré en droites quelconque L et un entier positif l, ne dépend pas de l. Par ailleurs, s'il advient que L^l soit analytiquement trivial, L^{ml} est lui-même analytiquement trivial pour tout entier m positif; inversement, si l_0 est le plus petit entier positif tel que L^{l_0} soit analytiquement trivial (en supposant qu'il existe), L^l ne peut à son tour être trivial (analytiquement) que si $l = m.l_0$ pour un entier positif m, car si $l = m.l_0 + l_1$, $l_1 < l_0$, $\mathbf{L}^{l_1}$ est trivial.

Le théorème de classification devient donc, compte tenu de ce qui précède, le théorème suivant.

THÉORÈME DES PLURIGENRES. — *Soit (M, g) une variété hermitienne compacte, de constante fondamentale $k(M, g)$, on a :*

(*a*) $k(M, g) > 0 \Rightarrow P_l = 0$, $\forall\, l > 0$, *et tout (l, n)-tenseur holomorphe s'annule en un point au moins de M.*

(*b*) $k(M, g) < 0 \Rightarrow Q_l = 0$, $\forall\, l > 0$, *et toute (l, n)-forme holomorphe s'annule en un point au moins de M.*

(*c*) $k(M, g) = 0 \Rightarrow P_l = Q_l$, $\forall\, l > 0$. *Un (l, n)-tenseur ou une (l, n)-forme holomorphes non nuls ne peuvent s'annuler sur M. S'il existe un plus petit entier positif l_0 tel que $P_{l_0} = Q_{l_0} = 1$, et si $P_l = Q_l = 1$, alors $l = m.l_0$ pour un entier m positif.*

Remarque 1. — Ce théorème étend, du cas kählérien au cas général, le théorème analogue de [11]. Dans le cas kählérien, le signe de $k(M, g)$ reste constant lorsque g subit une déformation kählérienne [11]; dans le cas général, la dépendance effective du signe de $k(M, g)$ par rapport à g n'est pas claire (*cf.* remarque 2, § 9).

Remarque 2. — La classe de CHERN réelle $c_R(\mathcal{K}^*)$ de $\mathcal{K}^*$ n'est autre que la première classe de CHERN réelle $c_1(M)$ de M; par conséquent,

$$c_{\mathbf{R}}(\mathcal{K}^{*l}) = l.c_{\mathbf{R}}(\mathcal{K}^*) = l.c_1(M), \qquad \forall\, l > 0.$$

Il en résulte que s'il existe un entier positif l tel que $P_l = Q_l = 1$, *en particulier s'il existe un (l, n)-tenseur holomorphe ou une (l, n)-forme holomorphe non-nulle à dérivée covariante nulle pour la connexion de* CHERN *associée à une structure hermitienne (M, g) quelconque* (de type spécial ou non), *la première classe de* CHERN *de M est nulle,* et même la courbure de $\mathcal{K}^*$, relative à g, est nulle, ainsi donc que $k(M, g)$.

11. Le cas particulier des variétés hermitiennes d'excentricité nulle

Si (M, g) est *d'excentricité nulle*, la constante fondamentale $k_g(\mathbf{L})$ est simplement la *valeur moyenne du scalaire de Ricci* attaché à n'importe quelle métrique fibrée hermitienne sur $\mathbf{L}$; c'est le cas en particulier si (M, g) est *semi-kählérienne*. Si, en outre, (M, g) est *kählérienne*, le *scalaire de Ricci du fibré en droites* $\mathscr{K}^*$ *n'est autre que la courbure scalaire* (*riemannienne*) de (M, g), et la constante fondamentale $k(M, g)$ de la variété *la valeur moyenne de la courbure scalaire* : nous retrouvons ainsi le théorème de classification des plurigenres dans le cas kählérien de [11] (*cf.* aussi remarque 1 du paragraphe 10).

Dans le cas général, nous avons pu montrer l'existence d'une constante fondamentale attachée à tout fibré en droites, mais non pas d'algorithme pour la déterminer explicitement puisqu'un tel algorithme n'existe pas pour la détermination du scalaire d'excentricité f_0; nous pouvons d'ailleurs nous poser le problème suivant :

Problème. — Existe-t-il des variétés complexes compactes n'admettant aucune structure hermitienne d'excentricité nulle? (1)

Le cas où (M, g) est semi-kählérienne est remarquable à plusieurs titres; dans ce cas, en effet, les *deux décompositions* (22) *et* (24) *coïncident, le laplacien complexe* L *est égal à la moitié du laplacien riemannien* Δ, et le théorème de la constante fondamentale est établi sans recours au théorème de E. Hopf; de même, le théorème de classification est établi dans ce cas en appliquant la méthode du paragraphe 6 au fibré en droites $\mathbf{L}$, i. e. en utilisant la relation (17) avec, en place de h, la métrique fibrée h_0 du *théorème de la constante fondamentale*, partie (*b*). Nous avons par ailleurs la proposition suivante :

PROPOSITION 14. — *Si (M, g) est semi-kählérienne, et si la classe de* CHERN *réelle $c_R(\mathbf{L})$ de L est nulle, la constante fondamentale $k_g(\mathbf{L})$ est nulle.*

COROLLAIRE. — *Un fibré en droites trivial différentiablement, mais non trivial analytiquement, au-dessus d'une variété semi-kählérienne compacte, ne possède aucune section holomorphe non-triviale.*

Démonstration de la proposition 14. — De la définition résulte immédiatement la relation

$$k_g(L) = -\langle \tilde{\Omega}, f_0 . F \rangle, \tag{28}$$

(1) L'auteur a montré récemment qu'une telle structure existe (unique) dans la classe conforme d'une métrique hermitienne donnée *a priori* sur M; le résultat s'étend au cas presque-complexe.

où g a été choisi tel que vol $(M, g) = 1$; si $c_R(\mathbf{L}) = 0$, $\tilde{\Omega}$ s'écrit $d\beta$, où β est une 1-forme réelle; nous avons donc

$$k_g(\mathbf{L}) = -\langle \beta, \delta(f_0 . F) \rangle;$$

si (M, g) est semi-kählérienne, $\delta(f_0 . F) = \delta(F) = 0$, d'où le résultat.

La proposition 14 fournit un critère de « semi-kählérianité », grâce auquel il est possible de montrer par exemple que *les variétés de Calabi-Eckmann ne sont pas semi-kählériennes*, i. e. n'admettent aucune structure hermitienne semi-kählérienne (*cf.* [8]).

ANNEXES (pour les détails, *cf.* [6])

Annexe 1 : *Démonstration des lemmes* 1 *et* 2 *du paragraphe* 3. — Soit A le tenseur 2 fois covariant et 1 fois contra-variant, défini par

$$A(X, Y) = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y, \qquad \forall X, Y \in \mathscr{A}^0(\mathscr{T}^{\mathbf{C}}), \tag{29}$$

où ∇ et $\tilde{\nabla}$ désignent respectivement la connexion de Chern et la connexion riemannienne attachées à la structure hermitienne (M, g). Soit $\{ e_i \}$, $i = 1, \ldots, 2n$, un repère local de $\mathscr{T}^{\mathbf{C}}$; les composantes de A s'écrivent

$$A_i{}^k{}_j = \Gamma_j{}^k{}_i - \tilde{\Gamma}_j{}^k{}_i, \tag{30}$$

où Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont les coefficients de ∇ et $\tilde{\nabla}$ respectivement. Soit φ une r-forme (complexe) de M; on a

$$(\delta\varphi)_{i_2 \ldots i_r} = -\textstyle\sum_{i, j=1}^{2n} g^{ij} \tilde{\nabla}_j \varphi_{i i_2 \ldots i_r},$$

soit donc

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)_{i_2 \ldots i_r} = {} & \textstyle\sum_{i, j=1}^{2n} g^{ij} \nabla_j \varphi_{i i_2 \ldots i_r} - \sum_{i, j, l=1}^{2n} g^{ij} A_j{}^l{}_i . \varphi_{l i_2 \ldots i_r} \\ & - \textstyle\sum_{i, j, l=1}^{2n} g^{ij} \sum_{m=2}^{r} A_j{}^l{}_{i_m} . \varphi_{i i_2 \ldots (l)_m \ldots i_r}\end{aligned} \tag{31}$$

où le symbole $(l)_m$ veut dire que l'on a substitué l à i_m.

Si, pour $\{ e_i \}$, nous choisissons une base adaptée à la structure complexe $\{ e_\alpha, \bar{e}_\alpha \}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, les composantes de A s'expriment en fonction de celles de la torsion T de ∇ (*cf.* § 3) par

$$\begin{aligned} & A_\alpha{}^\gamma{}_\beta = \frac{1}{2} T_\alpha{}^\gamma{}_\beta, && A_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\gamma}}{}_{\bar{\beta}} = \overline{A_\alpha{}^\gamma{}_\beta}, \\ & A_\alpha{}^{\bar{\gamma}}{}_{\bar{\beta}} = A_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}{}_\alpha = \frac{1}{2} T_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}, && A_\alpha{}^{\bar{\gamma}}{}_\beta = A_{\bar{\alpha}}{}^\gamma{}_{\bar{\beta}} = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

expressions qui se déduisent simplement de (30) (*cf.* [6] p. 25 et 26 pour des détails).

Les lemmes 1 et 2 résultent immédiatement de (31) compte tenu, pour le lemme 2, de ce que ∇F est nulle.

Du lemme 1 nous déduisons sans peine les relations

$$(33)\qquad \begin{cases} \Delta' f = L(f) - d'f(V), \\ \Delta'' f = L(f) - d''f(V), \\ \Delta\ f = 2L(f) - df(V), \end{cases}$$

qui démontrent la relation (10) et aussi les implications

$$(L = \Delta' \Rightarrow V = 0) \qquad \text{et} \qquad L = \Delta'' \Rightarrow V = 0)$$

du paragraphe 8 (prop. 8, remarque).

Annexe 2 : *Démonstration de la relation* (20) (*prop.* 8 *du* § 8). — $L^* f$ se calcule soit directement à partir de (19), soit à partir de (33), d'où l'on tire

$$L = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} V, \qquad \text{d'où} \qquad L^* = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} V^*,$$

où V^* est l'opérateur adjoint du champ de vecteur V; on se persuade aisement que

$$V^*(f) = \delta(f.v) = 2\alpha f - V.f, \qquad \forall f \in \mathscr{A}^0,$$

où, rappelons-le, v est la forme de torsion, et $\alpha = 1/2\, \delta v = L^*(1)$, ce qui démontre (20).

Annexe 3 : *L'identité de Bianchi*, en géométrie hermitienne, s'écrit, par un repère adapté à la structure hermitienne,

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\lambda\bar\mu} - R_\lambda{}^\beta{}_{\alpha\bar\mu} = \nabla_{\bar\mu} T_\alpha{}^\beta{}_\lambda, \qquad \forall \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, \ldots, n,$$

où R est la courbure hermitienne et T la torsion; on en déduit :

$$(34)\qquad \textstyle\sum_{\alpha,\lambda=1}^n R_\alpha{}^{\alpha\lambda}{}_\lambda - \sum_{\alpha,\lambda=1}^n R_\lambda{}^{\alpha\lambda}{}_\alpha = k - \hat{k} = \sum_{\alpha,\lambda=1}^n \nabla^\lambda T_\alpha{}^\alpha{}_\lambda,$$

où k est le scalaire de Ricci de (M, g), et $\hat{k} = \sum_{\alpha,\lambda=1}^n R_\lambda{}^{\alpha\lambda}{}_\alpha$ par définition; le membre de droite de (34) s'écrit, en vertu du lemme 1, paragraphe 3 et de la définition de la forme de torsion v (*cf.* § 3) :

$$\textstyle\sum_{\alpha,\lambda=1}^n \nabla^\lambda T_\alpha{}^\alpha{}_\lambda = -\frac{1}{2}\delta v - \frac{1}{2}|v|^2 = -\alpha - \frac{1}{2}|v|^2,$$

de sorte que (34) devient, après intégration sur (M, g),

$$(35)\qquad \int_M (k - \hat{k}).v_g = -\frac{1}{2}\int_M |v|^2.v_g,$$

où v_g est la forme volume de (M, g). De (35), on tire immédiatement les résultats suivants :

PROPOSITION. — *Si* $\int_n (k-\hat{k}).v_g \geqslant 0$, (M, g) *est semi-kählérienne.*

COROLLAIRE. — *Si la courbure hermitienne est nulle,* (M, g) *est semi-kählérienne.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.). — An unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. pures et app.* Série 9, t. 36, 1957, p. 235-249.

[2] CHERN (S. S.). — Complex manifolds without potential theory. — Princeton, Van Nostrand Company, 1967 (Van Nostrand Mathematics Studies, 15).

[3] GAUDUCHON (P.). — Sur les formes à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété kählérienne, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 1971, série A, p. 398-401.

[4] GAUDUCHON (P.). — Plurigenres et plurigenres duaux sur certaines variétés complexes compactes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, série A, p. 787-790.

[5] GAUDUCHON (P.). — Tenseurs holomorphes et formes holomorphes sur une variété hermitienne compacte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, 1974, série A, p. 17-20.

[6] GAUDUCHON (P.). — *Sur quelques problèmes concernant les variétés complexes compactes et les fibrés vectoriels holomorphes associés*, Thèse S. math., Paris 1975.

[7] GAUDUCHON (P.). — La constante fondamentale d'un fibré en droites au-dessus d'une variété hermitienne compacte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 281, 1975, série A, p. 393-936.

[8] GAUDUCHON (P.). — La classe de Chern pluriharmonique d'un fibré en droites, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, série A, p. 479-482.

[9] GAUDUCHON (P.). — *Variétés de type surjectif et variétés partiellement parallélisables* (à paraître).

[10] HOPF (E.). — Elementare Bemerkungen über die Lösung partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Physik. Math. Kl.*, t. 19, 1927, p. 147-152.

[11] JORGA IBRAHIM (R.) et LICHNEROWICZ (A.). *Tenseurs holomorphes sur une variété* kählérienne compacte, *C. R. Acad. Sc Paris.* t. 277, 1973, série A, p. 801-805.

[12] KOBAYASHI (S.) and WU (H. H.). — On holomorphic sections of certain hermitian vector bundles, *Math. Annalen*, t. 189, 1970, p. 1-4.

[13] LICHNEROWICZ (A.). — Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative, *J. of diff. Geom., t.* 6, 1971, p. 47-94.

[14] MORROW (J.) and KODAIRA (K.). — *Complex manifolds.* — New York, Holt, Rinehart and Winston, 1971 (*Athena Series selected Topics in Mathematicas*).

(Texte reçu le 19 juin 1975.)

Paul GAUDUCHON
53, rue de Lyon,
75012 Paris