

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-JACQUES RISLER

**Sur la divisibilité des fonctions de classe C^r par
les fonctions analytiques réelles**

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 97-112

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__97_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA DIVISIBILITÉ DES FONCTIONS DE CLASSE C^r
PAR LES FONCTIONS ANALYTIQUES RÉELLES**

PAR

JEAN-JACQUES RISLER

[C.N.R.S. L.R.A. 169, École Polytechnique, Palaiseau]

RÉSUMÉ. — Soit X un germe d'ensemble analytique réel en $0 \in \mathbf{R}^n$, $I(X)$ l'idéal de $\mathcal{O}_n = \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ des germes de fonctions analytiques réelles nulles sur X ; si f est une fonction de classe C^r sur \mathbf{R}^n nulle sur X , on montre qu'il existe une fonction $\lambda(r)$ de r (qui tend vers l'infini avec r) telle que $T_{\lambda(r)} f \in I(X)$ ($m^{\lambda(r)+1}$), $T_{\lambda(r)} f$ désignant le développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre $\lambda(r)$ et m l'idéal maximal de \mathcal{O}_n .

De plus, si X est un germe de courbe plane irréductible telle que

$$I(X) = (\varphi(x, y)) \subset \mathbf{R}\{x, y\},$$

on montre que f/φ est une fonction différentiable de classe $\mathcal{C}^{\lambda(r)}$ (avec $\lambda(r) \rightarrow +\infty$ si $r \rightarrow +\infty$).

1. Préliminaires

Rappelons le théorème suivant, dû à MALGRANGE (cf. [MA] ou [T1] p. 127) :

THÉORÈME 1.1. — Soient X un germe d'ensemble analytique réel cohérent en $0 \in \mathbf{R}^n$, $I(X) = (g_1, \dots, g_p) \subset \mathcal{O}_n$ l'idéal des germes de fonctions analytiques réelles nulles sur X , et f une fonction de classe C^∞ nulle sur X ; on peut alors écrire $f = \sum \lambda_i g_i$ dans l'anneau des germes de fonctions de classe C^∞ à l'origine de \mathbf{R}^n .

L'énoncé que l'on peut espérer dans le cas des fonctions de classe C^r ($r \leq +\infty$) est le suivant :

CONJECTURE 1.2. — Soient X un germe d'ensemble analytique réel cohérent en $0 \in \mathbf{R}^n$, $I(X) = (g_1, \dots, g_p) \subset \mathcal{O}_n$ l'idéal des germes de fonctions analytiques réelles nulles sur X . Il existe alors une fonction $\lambda(r) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ne dépendant que de X et telle que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda(r) = +\infty$, telle que, si f est une fonction de classe C^r nulle sur X , on ait $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$, les λ_i étant des germes de fonctions de classe $C^{\lambda(r)}$.

Note. — La conjoncture 1.2 a été démontrée par l'auteur après la rédaction de cet article (cf. C.R.A.S., juin 1977).

Nous montrerons cette conjecture dans le cas où X est un germe de courbe plane irréductible réelle (une courbe est toujours un ensemble analytique cohérent).

Nous noterons systématiquement de la même manière un germe d'espace analytique (ou un germe de fonction) et un représentant de ce germe dans un ouvert suffisamment petit.

Rappelons qu'un espace analytique réel X est cohérent si le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles nulles sur X est un faisceau cohérent (i. e. avec les notations du théorème 1.1 si l'idéal $I(X)$ engendre l'idéal des germes en x des fonctions analytiques réelles nulles sur X pour $x \in X$ assez proche de 0).

Considérons maintenant le problème de la divisibilité formelle; dans le cas C^∞ , on a le théorème suivant, où les notations sont les mêmes que dans le théorème précédent, et où $F_n = \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$:

THÉORÈME 1.3. — *Soit X un germe d'ensemble analytique réel (pas nécessairement cohérent), f une fonction de classe C^∞ nulle sur X . Si $Tf \in F_n$ désigne la série de Taylor de f à l'origine, on a $Tf \in I(X)F_n$.*

Nous généraliserons ce théorème (beaucoup moins profond que le théorème 1.1) au cas des fonctions de classe C^r (cf. § 3).

La démonstration du théorème 1.3 est essentiellement contenue dans le livre de MALGRANGE ([MA]). Soit ξ_n l'anneau des germes de fonctions de classe C^∞ à l'origine de \mathbf{R}^n . On remarque d'abord que comme $I(X)\xi_n$ est un idéal de Lojasiewicz, la série Tf est nulle (au sens formel) sur la variété formelle $V_f(I(X))$ (cf. par exemple [R], proposition 2.2.).

On en déduit que $Tf \in I(X)F_n$, car MALGRANGE ([MA], p. 90) montre que $I(X)F_n$ est l'idéal de toutes les séries formelles nulles sur $X \subset V_f(I(X))$.

Donnons maintenant deux définitions :

DÉFINITION 1.4. — Soient X un sous-ensemble de \mathbf{R}^n , f une fonction sur \mathbf{R}^n à valeurs réelles (ou complexes), μ un entier > 0 . On dit que f est μ -plate sur X en 0 s'il existe un voisinage V de 0 dans \mathbf{R}^n et une constante C tels que $|f(x)| \leq C \|x\|^\mu, \forall x \in V \cap X$.

Si f est une fonction de classe C^r sur \mathbf{R}^n , et si p est un entier positif $\leq r$, $T_p f$ désignera le polynôme de degré p en x_1, \dots, x_n égal au développement de Taylor de f à l'origine jusqu'à l'ordre p .

Si X est un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de \mathbf{R}^n , nous poserons $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n/I(X)$ (avec $\mathcal{O}_n = \mathbf{R} \{x_1, \dots, x_n\}$).

DÉFINITION 1.5. — Soient X un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de \mathbf{R}^n , μ un entier positif. On dit qu'une fonction f de classe C^r (avec $r \geq \mu$) au voisinage de l'origine de \mathbf{R}^n est μ -fortement plate sur X en 0 si $T_\mu f \in I(X) + \mathfrak{m}^\mu$ dans \mathcal{O}_n (ou si $(T_\mu f) \mathcal{O}_X \subset \mathfrak{m}_X^\mu$ dans \mathcal{O}_X).

REMARQUE 1.6. — Si f est μ -fortement plate sur X en 0, elle est évidemment μ -plate sur X en 0; la réciproque est vraie si X est lisse, mais pas nécessairement pour un espace analytique réel quelconque.

Par exemple, si X est défini par l'équation $y^3 - x^{10} = 0$ dans \mathbf{R}^2 , $f = y - x^{10/3}$ est de classe C^3 sur \mathbf{R}^2 , infiniment plate sur X (car nulle sur X) alors qu'elle n'est que 1-fortement-plate sur X en 0.

2. Le cas des courbes

Soit X un germe de courbe irréductible réelle à l'origine de \mathbf{R}^n ; ceci signifie que $I(X) \subset \mathcal{O}_n$ est un idéal premier de hauteur $n-1$, et que le normalisé $\overline{\mathcal{O}_X}$ de $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n/I(X)$ s'identifie à l'anneau $\mathbf{R} \{t\}$, ce qui donne un homomorphisme $h : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{R} \{t\}$, de noyau $I(X)$ (h est une paramétrisation de X).

Nous noterons m la multiplicité de X à l'origine (m est égal à l'inf des ordres des séries $h(x_i)$ si les x_i sont les coordonnées de \mathbf{R}^n), et c l'ordre du conducteur de \mathcal{O}_X dans $\overline{\mathcal{O}_X} = \mathbf{R} \{t\}$; c est défini comme étant le plus petit entier > 0 tel que l'idéal (t^c) soit contenu dans \mathcal{O}_X ; on a alors le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

LEMME 2.1. — Soit $\varphi \in \mathbf{R}[[t]]$ une série formelle d'ordre $r \geq c$; il existe alors une série formelle $\psi \in F_n = \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ d'ordre $\geq [r/c]$ (partie entière de r/c) telle que si l'on pose $h(x_i) = x_i(t) \in \mathbf{R} \{t\}$, on ait

$$\psi(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \varphi(t).$$

THÉORÈME 2.2. — Soit f une fonction de classe C^r p -plate sur X en 0 (avec $p \leq r$); f est alors $[pm/c]$ -fortement plate sur X en 0 (autrement dit, $T_p f \in I(X) \bmod \mathfrak{m}^{[pm/c]}$).

Démonstration. — Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x|$ désignera une norme de x . Il existe par hypothèse une constante C et un voisinage V de 0 tels que l'on ait

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \leq C|x|^p, \quad \forall x \in V \cap X.$$

Comme par hypothèse $r \geq p$, on peut prendre le développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre p que l'on note $T_p f$; il existe alors une constante C' telle que l'on ait

$$|T_p f(x)| \leq C' |x|^p, \quad \forall x \in V \cap X,$$

d'où

$$|T_p f(x(t))| \leq C'' |t|^{mp}$$

pour t dans un voisinages de 0 dans \mathbf{R} , ce qui entraîne que l'ordre de la série $T_p(x(t))$ (avec $x(t) = x_1(t), \dots, x_n(t)$) est $\geq mp$; il existe donc, d'après le lemme 2.1, une série formelle $\psi(x_1, \dots, x_n)$ d'ordre $\geq [mp/c]$ telle que l'on ait

$$T_p f(x(t)) = \psi(x(t)).$$

La série formelle

$$\varphi = T_p f(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]] = F_n$$

vérifie donc $\varphi \circ h = 0$, ce qui implique $\varphi \in I(X) F_n$, puisque l'application $\hat{\mathcal{O}}_X \xrightarrow{\hat{h}} \mathbf{R}[[t]]$ est injective (car le morphisme $h : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$ est fini) et que $\hat{\mathcal{O}}_X \xrightarrow{\sim} F_n/I(X) F_n$. Comme $\psi \in \mathfrak{m}^{[mp/c]} F_n$, on a

$$T_p f \in (I(X) + \mathfrak{m}^{[mp/c]}) F_n \cap \mathcal{O}_n,$$

d'où

$$T_p f \in I(X) + \mathfrak{m}^{[mp/c]}$$

puisque F_n est fidèlement plat sur \mathcal{O}_n .

COROLLAIRE 2.3. — *Soit f une fonction de classe C^r nulle sur un germe de courbe analytique réelle X ; alors $T_r f \in I(X) \bmod \mathfrak{m}^{[rm/c]}$ (où m désigne la multiplicité et c l'ordre du conducteur de la courbe X).*

Nous allons maintenant démontrer une généralisation du théorème 1.1 aux fonctions de classe C^r dans le cas des courbes planes.

THÉORÈME 2.4. — *Soit X un germe de courbe analytique plane réelle d'équation réduite $\varphi(x, y) = 0$. Soit f une fonction de classe C^r nulle sur X . On a alors une égalité $f = \varphi f_1$, f_1 étant de classe $C^{\lambda(r)}$ au voisinage de l'origine, avec $\lambda(r) = (r/2c^2) - 2$, c désignant l'ordre du conducteur de la courbe X .*

Démonstration. — On peut supposer, grâce au théorème de préparation de Weierstrass, que φ est un polynôme distingué en y de degré m , m étant la multiplicité de X (i. e. l'ordre de la série convergente $\varphi(x, y)$).

Le théorème de Puiseux montre qu'il existe une représentation paramétrique de X :

$$x = t^m$$

$$y = \psi(t) = \sum_{j=p}^{+\infty} a_j t^j \quad \text{avec } p > m;$$

X étant réelle, tous les a_j sont réels.

Rappelons que m et les nombres j tels que $a_j \neq 0$ n'ont pas de diviseur commun, et que si ω_i et ω_j sont deux racines m -ièmes de l'unité distinctes, la valuation γ (dans l'anneau $\mathbf{C}\{t\}$) de la série $\psi(\omega_i t) - \psi(\omega_j t)$ est un entier qui fait partie de la caractéristique de la courbe; on a donc $\gamma < c$.

Rappelons enfin que l'on peut écrire :

$$\varphi(t^m, y) = \prod_{i=0}^{m-1} (y - \psi(\omega_i t))$$

dans $\mathbf{C}\{t\}$, ω_i étant la i -ième racine m -ième de l'unité (Pour ces propriétés du développement de Puiseux, cf. [Z]).

Nous définirons une fonction φ_1 analytique réelle en t et y par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(t^m, y) &= (y - \psi(t)) \varphi_1(t, y) && \text{si } m \text{ est impair,} \\ \varphi(t^m, y) &= (y - \psi(t))(y - \psi(-t)) \varphi_1(t, y) && \text{si } m \text{ est pair.} \end{aligned}$$

LEMME 2.5. — $\varphi_1(t, y)$ est un germe de fonction analytique réelle en t et y qui ne s'annule qu'à l'origine et qui vérifie l'inégalité :

$$|\varphi_1(t, y)| \geq K |t, y|^{mc}$$

dans un voisinage de l'origine, K étant une constante convenable.

Démonstration. — Soit ω_i une racine m -ième de l'unité non réelle; il existe alors un entier j tel que $a_j \neq 0$ et que ω_i^j ne soit pas réel : m et les nombres j tels que $a_j \neq 0$ n'ont en effet pas de diviseur commun. Soit j_1 le plus petit entier j tel que $a_j \neq 0$ et que ω_i^j soit non réel : comme tous les a_j sont réels, $\sum_{j=p}^{j_1} a_j (\omega_i)^j t^j$ n'est pas réel pour $t \in \mathbf{R}$, et il en est donc de même pour $\psi(\omega_i t) = \sum_{j=p}^{+\infty} a_j (\omega_i)^j t^j$ pour t assez petit. Ceci montre que le germe $\varphi_1(t, y)$ ne s'annule qu'à l'origine.

En groupant chaque racine de l'unité non réelle avec sa conjuguée, on peut écrire :

$$\varphi_1(t, y) = \prod_{i=1}^{[m/2]} (y - \psi(\omega_i t))(y - \psi(\bar{\omega}_i t)),$$

d'où, en posant $\lambda_i = \psi(\omega_i t)$:

$$\varphi_1(t, y) = \prod_{i=1}^{[m/2]} (y - \lambda_i)(y - \bar{\lambda}_i).$$

Mais

$$(y - \lambda_i)(y - \bar{\lambda}_i) = \left(y - \frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_i - \bar{\lambda}_i}{2} \right)^2.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, $\lambda_i - \bar{\lambda}_i$ a une valuation finie $\leq c$ (ordre du conducteur); on a donc

$$(y - \lambda_i)(y - \bar{\lambda}_i) \geq K_i |y, t^c|^2 \geq K_i |y, t|^{2c}$$

dans un voisinage de l'origine, d'où

$$|\varphi_1(t, y)| \geq K |t, y|^{mc}.$$

C.Q.F.D.

Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de classe C^r définie au voisinage de l'origine \mathbf{R}^2 . Si l'on suppose $r > m$, le théorème de division pour les fonctions de classe C^r ([L]) permet d'écrire :

$$f(x, y) = \lambda(x, y)\varphi(x, y) + \alpha_1(x)y^{m-1} + \dots + \alpha_m(x),$$

les fonctions λ et α_i étant de classe $C^{\lceil r/m \rceil - 1}$.

$$\text{Posons } R(x, y) = \alpha_1(x)y^{m-1} + \dots + \alpha_m(x).$$

LEMME 2.6. — *Sous l'hypothèse que f est nulle sur la courbe X , $\alpha_i(x)$ est β -fortement plate à l'origine ($1 \leq i \leq m$) avec $\beta = ((m-1)^2 r/mc) - m$ (autrement dit, $T^{\lceil r/m \rceil - 1} \alpha_i(x) \in (x)^\beta$ dans $\mathbf{R}\{x\}$).*

Démonstration. — Prenons les développements de Taylor jusqu'à l'ordre $\gamma = \lceil r/m \rceil - 1$ dans l'égalité ci-dessus; on obtient :

$$T_\gamma f = (T_\gamma \lambda)\varphi + T_\gamma R \pmod{\mathfrak{m}^{(\gamma+1)}}.$$

Il existe d'autre part un polynôme $\mu(x, y)$ tel que

$$T_\gamma f = \mu\varphi \pmod{\mathfrak{m}^{\lceil mr/c \rceil}}$$

d'après le corollaire 2.3.

Comme $c > (m-1)^2$ (cf. par exemple [Z]), soit

$$\frac{r}{m} > \frac{(m-1)^2 r}{mc},$$

on en déduit :

$$T_\gamma R = v\varphi \pmod{\mathfrak{m}^{\beta_1}},$$

v étant un polynôme en x et y , et $\beta_1 = (m-1)^2 r/mc$.

Mais $\varphi(x, y)$ est par hypothèse un polynôme distingué en y de degré m , et $R(x, y)$ est un polynôme en y de degré $\leq m-1$; ceci implique immédiatement que $v(x, y) \in \mathfrak{m}^{\beta_1 - m}$, d'où $T_\gamma R \in \mathfrak{m}^{\beta_1}$, soit

$$T_\gamma^\dagger \alpha_i(x) \in (x)^{\beta_1 - (m-i)} \subset (x)^{\beta_1 - m} \quad (1 \leq i \leq m)$$

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant montrer que le quotient de $R(x, y)$ par $\varphi(x, y)$ est suffisamment différentiable : nous commencerons par diviser $R(t^m, y)$ par $(y - \psi(t))$, puis le résultat par $\varphi_1(t, y)$, et montrerons que le quotient est en fait différentiable si on le considère comme fonction de x et y .

Nous poserons

$$R_1(t, y) = \frac{R(t^m, y)}{(y - \psi(t))} \quad \text{si } m \text{ est impair,}$$

$$R_1(t, y) = \frac{R(t^m, y)}{(y - \psi(t))(y - \psi(-t))} \quad \text{si } m \text{ est pair.}$$

LEMME 2.7. — Supposons f nulle sur X . $R_1(t, y)$ est alors une fonction de classe $C^{[2/m]-3}$, et l'on a

$$T_{[r/m]-3} R_1(t, y) \in (t)^{m\beta} \quad \text{avec } \beta = \frac{(m-1)^2 r}{mc} - m.$$

Démonstration. — $y_1 = y - \psi(t)$ est une coordonnée analytique de \mathbf{R}^2 au voisinage de l'origine, et par hypothèse $R'(t, y_1) = R(t^m, y)$ vérifie $R'(t, 0) = 0$ puisque f est supposée nulle sur X . On peut donc diviser $R'(t, y_1)$ par y_1 grâce à la formule classique :

$$\frac{R'(t, y_1)}{y_1} = \int_0^1 \frac{\partial R'(t, u y_1)}{\partial y_1} du$$

qui montre que $R'(t, y_1)/y_1 = R(t^m, y)/y - \psi(t)$ est de classe $C^{[r/m]-2}$; dans le cas où m est pair, on recommence avec la coordonnée $y - \psi(-t)$.

D'autre part, le fait que $TR_1(t, y) \in (t)^{m\beta}$ résulte immédiatement du lemme 2.6.

C.Q.F.D.

Posons $R_1(t, y) = t^\beta h(t, y)$; $h(t, y)$ est une fonction différentiable de classe $C^{\delta'}$ avec $\delta' = [r/m] - 3 - \beta$ qui est $\beta(m-1)$ -plate à l'origine; d'autre part la fonction analytique $\varphi_1(t, y)$ vérifie des inégalités :

$$K_1 |t, y|^{mc} \leq |\varphi_1(t, y)| \leq K_2 |t, y|^{m-2}$$

dans un voisinage de l'origine (ceci d'après le lemme 2.5 et le fait que φ est d'ordre m à l'origine).

Nous allons maintenant appliquer à la fonction $h(t, y)/\varphi_1(t, y)$ le lemme suivant :

LEMME 2.8. — Soient $g(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions de classe C^r au voisinage de l'origine de \mathbf{R}^n ($x = (x_1, \dots, x_n)$) et α_1, α_2 et α_3 trois nombres entiers positifs. Supposons g α_1 -plate à l'origine, et que φ vérifie les inégalités

$$K_1 |x|^{\alpha_2} \leq |\varphi(x)| \leq K_2 |x|^{\alpha_3}$$

au voisinage de l'origine (K_1 et K_2 sont des constantes, et l'on a $\alpha_3 < \alpha_2$). La fonction $\psi(x) = g(x)/\varphi(x)$ est alors de classe C^λ au voisinage de l'origine avec $\lambda = \inf(r, (\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_2 - \alpha_3 + 1))$.

Démonstration. — La fonction $\psi(x)$ est de classe C^r en dehors de l'origine, puisque φ ne s'annule qu'en 0. Soit $\psi'(x)$ une dérivée partielle première de ψ (définie pour $x \neq 0$) : on a

$$\psi'(x) = \frac{\varphi g' - g \varphi'}{\varphi^2} \quad \text{pour } x \neq 0;$$

cela montre que $\psi'(x)$ est $(\alpha_1 - 1 + \alpha_3 - 2\alpha_2)$ -plate à l'origine. Il en résulte que $\psi'(x)$ est définie à l'origine (avec $\psi'(0) = 0$) et continue. On voit de même par récurrence qu'une dérivée p -ième de ψ est $(\alpha_1 + p(\alpha_3 - 1) - (p + 1)\alpha_2)$ -plate à l'origine, ce qui montre que ψ est de classe C^λ avec $\lambda = [(\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_2 - \alpha_3 + 1)]$ si l'on suppose $r \geq \lambda$.

C.Q.F.D.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2.4 : il résulte du lemme 2.8 que $\theta(t, y) = h(t, y)/\varphi_1(t, y)$ est différentiable de classe $C^{\delta''}$ avec $\delta'' = \inf(\delta', [(\beta(m-1) - mc)/(mc - m + 3)])$.

On a donc

$$\frac{R(x, y)}{\varphi(x, y)} = \frac{R_1(x^{1/m}, y)}{\varphi_1(x^{1/m}, y)} = x^{\beta/m} \theta(x^{1/m}, y).$$

Pour calculer l'ordre de différentiabilité de $R(x, y)/\varphi(x, y)$, il suffit maintenant d'appliquer le lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur :

LEMME 2.9. — Soit $\theta(t, y)$ une fonction de classe C^k au voisinage de l'origine de \mathbf{R}^2 . Alors la fonction $\mu(x, y) = x^\alpha \theta(x^{1/m}, y)$ est différentiable de classe $\inf(\alpha, k)$ au voisinage de l'origine.

$(R(x, y)/\varphi(x, y))$ est donc différentiable de classe $C^{\delta''}$ avec

$$\delta''' = \inf\left(\frac{\beta}{m}, \delta', \left[\frac{(m-1)\beta - mc}{mc - m + 3}\right]\right),$$

$$\beta = \frac{(m-1)^2 r}{mc} - m,$$

$$\delta' = \left[\frac{r}{m}\right] - 3 - \beta.$$

On peut donc prendre $\lambda(r) = (r/2 c^2) - 2$ par exemple, puisque $c > (m-1)^2$.

C.Q.F.D.

3. Fonctions de deux variables

Nous allons maintenant démontrer un théorème pour les fonctions différentiables de deux variables réelles qui procède d'un état d'esprit un peu différent de celui des autres paragraphes.

Ce théorème est une généralisation au cas C^r d'un résultat démontré dans [R] pour le cas C^∞ (proposition 5.1).

La démonstration étant une simple adaptation au cas C^r de la démonstration faite dans [R] pour le cas C^∞ , nous ne la ferons pas en détails ici.

THÉORÈME 3.1. — Soit $P \in \mathbf{R}[X, Y]$ un polynôme de degré p , tel que $P = P_1 P_2$, P_1 et P_2 étant deux polynômes de degrés respectifs p_1 et p_2 , premiers entre eux dans l'anneau $\mathbf{R}[[X, Y]]$. Il existe alors une fonction à valeurs entières $r \mapsto \mu(r)$, telle que $\mu(r) \rightarrow +\infty$ si $r \rightarrow +\infty$ et telle que si f est une fonction de classe C^r au voisinage de $0 \in \mathbf{R}^2$ (à valeurs réelles ou complexes) vérifiant $T_p f = P_1 P_2$, il existe deux fonctions f_1 et f_2 de classe $C^{\mu(r)}$ à valeurs complexes, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{p_1} f_1 = P_1, \\ T_{p_2} f_2 = P_2, \\ f = f_1 f_2. \end{array} \right.$$

Démonstration. — Supposons $r > p$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que f est régulière d'ordre n en y (n étant l'ordre de f à l'origine). On peut donc écrire, grâce au théorème de préparation pour les fonctions différentiables ([L], cf. aussi [W]),

$$f(x, y) = u(x, y)f_1(x, y),$$

f_1 étant un polynôme distingué en y de degré n , $u(x, y)$ et $f_1(x, y)$ étant des fonctions différentiables de classe $C^{[r/n]-1}$, et u vérifiant $u(0, 0) \neq 0$; il suffit donc de montrer le théorème lorsque f est un polynôme distingué en y de degré n .

La démonstration du théorème 3.1 se fait alors par récurrence sur le nombre d'éclatements ponctuels nécessaire pour séparer P_1 et P_2 ; le lemme ci-dessous constituera le premier pas de la récurrence :

LEMME 3.2. — Soit $f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)$ une fonction de classe C^r avec $r \geq p$ telle que $T_p f = P = P_1 P_2$.

Supposons que les termes de plus bas degré de P_1 et P_2 soient sans facteur commun dans $\mathbf{R}[[x, y]]$. Il existe alors deux polynômes distingués en y de degrés n_1 et n_2 (avec $n_1 + n_2 = n$) :

$$f_1(x, y) = y^{n_1} + b_1(x)y^{n_1-1} + \dots + b_{n_1}(x),$$

$$f_2(x, y) = y^{n_2} + b_2(x)y^{n_2-1} + \dots + b_{n_2}(x)$$

différentiables de classe C^{r-n} en x , tels que

$$\begin{cases} T_{p_1} f_1 = P_1, \\ T_{p_2} f_2 = P_2, \\ f = f_1 f_2. \end{cases}$$

Démonstration. — On procède comme dans [R] en remarquant que $a_i(x)$ est i -plat à l'origine, puisque f est supposée d'ordre n à l'origine, ce qui permet de définir une fonction \hat{f} par la formule : $f(x, xy') = x^n \hat{f}(x, y')$. \hat{f} est un polynôme en y' et une fonction de classe C^{r-n} en x , qui peut donc être considérée comme un élément de $\xi_{r-n}[y']$, ξ_{r-n} désignant l'anneau des germes de fonctions de classe C^{r-n} à l'origine de \mathbf{R} .

Si l'on pose de même

$$\begin{cases} P_1(x, xy') = x^{n_1} \hat{P}_1(x, y'), \\ P_2(x, xy') = x^{n_2} \hat{P}_2(x, y'), \end{cases}$$

l'hypothèse implique que \hat{P}_1 et \hat{P}_2 sont étrangers dans l'anneau $\mathbb{R}[[x]][[y']]$; l'anneau ξ_{r-n} étant hensélien ([RA], p. 79), la décomposition $T_p \hat{f} = \hat{P}_1 \hat{P}_2$ se relève dans $\xi_{r-n}[[y']]$ en une décomposition

$$\hat{f}(x, y) = \hat{f}_1(x, y') \hat{f}_2(x, y')$$

(avec \hat{f}_1 de degré n_1 et \hat{f}_2 de degré n_2).

On a donc

$$f(x, y) = x^n \hat{f}(x, y') = x^{n_1} \hat{f}_1(x, y') x^{n_2} \hat{f}_2(x, y'),$$

d'où la décomposition voulue en posant

$$f_1(x, y) = x^{n_1} \hat{f}_1\left(x, \frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = x^{n_2} \hat{f}_2\left(x, \frac{y}{x}\right).$$

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant raisonner par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaire pour séparer P_1 et P_2 (i. e. pour arriver dans la situation du lemme 3.2); ce nombre est fini à cause du théorème sur la résolution des singularités des courbes par éclatements.

Si f est à valeurs complexes, le lemme 2.3 permet de supposer que la forme initiale de f (ensemble des termes de plus bas degré de $T_p f = P$) est la puissance n -ième d'une forme linéaire par exemple y^n .

On suppose alors par hypothèse de récurrence que l'on peut écrire $\hat{f}(x, y') = g_1(x, y') g_2(x, y')$, g_1 et g_2 étant des fonctions différentiables de classe $\lambda_1(r)$ au voisinage de l'origine (mais pas nécessairement des polynômes en y') vérifiant $T_{p_1} g_1 = \hat{P}_1$ et $T_{p_2} g_2 = \hat{P}_2$.

g_1 et g_2 sont des fonctions régulières en y' d'ordre n_1 et n_2 respectivement; le théorème de Lassalle permet donc d'écrire :

$$g_1 = U_1 \hat{f}_1, \\ g_2 = U_2 \hat{f}_2,$$

d'où

$$\hat{f} = U \hat{f}_1 \hat{f}_2 \quad \text{avec} \quad U = U_1 U_2,$$

les fonctions U, \hat{f}_1 et \hat{f}_2 étant de classe $C^{[\lambda_1(r)/n]-1}$, \hat{f}_1 et \hat{f}_2 étant des polynômes distingués en y' et U vérifiant $U(0, 0) \neq 0$.

Si l'on pose maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = x^{n_1} \hat{f}_1\left(x, \frac{y}{x}\right), \\ f_2(x, y) = x^{n_2} \hat{f}_2\left(x, \frac{y}{x}\right), \\ U_1(x, y) = U\left(x, \frac{y}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \\ U_1(0, y) = 1, \end{array} \right.$$

on a au voisinage de l'origine l'égalité

$$f(x, y) = U_1(x, y) f_1(x, y) f_2(x, y),$$

et il suffit pour montrer le théorème 3.1 de montrer que la fonction $U_1(x, y)$ est de classe $C^{\lambda(r)}$ (avec un $\lambda(r)$ convenable) au voisinage de l'origine, ce qui se fait avec un raisonnement en tous points analogue à celui de [R] (proposition 4.6).

C.Q.F.D.

4. Dimension quelconque

Nous allons généraliser le théorème 2.2 au cas où X est un germe d'espace analytique réel de dimension quelconque; comme dans les paragraphes précédents, nous noterons de la même manière un germe d'espace analytique à l'origine (ou un germe de fonction analytique) et un représentant de ce germe dans un voisinage suffisamment petit de 0. Signalons que K. SPALLEK ([SP 1] et [SP 2]) obtient un résultat analogue par une méthode différente (cf. aussi [BL-R] et [B-R]).

THÉORÈME 4.1. — *Soit X un germe d'espace analytique réel irréductible à l'origine de \mathbf{R}^n , $I(X)$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_n = \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ des germes de fonctions analytiques nulles sur X . Il existe alors une fonction λ de \mathbf{N} dans \mathbf{N} , telle que $\lambda(r) \rightarrow +\infty$ si $r \rightarrow +\infty$ et telle que toute fonction f de classe C^r -plate sur X en 0 (avec $r \geq p$) soit $\lambda(p)$ -fortement plate sur X en 0.*

COROLLAIRE 4.2. — *Sous les hypothèses précédentes, si f de classe C^r est nulle, sur X , $T_{\lambda(r)} f \in I(X) \pmod{m^{\lambda(r)}}$, m désignant l'idéal maximal de \mathcal{O}_n .*

Démonstration du théorème. — Par hypothèse X est irréductible : $I(X)$ est donc un idéal premier; si d est la dimension de X à l'origine

($d = \dim \mathcal{O}_n/I(X)$), l'on sait par le théorème de préparation de Weierstrass (cf. par exemple [N] ou [T]) que l'on peut choisir les coordonnées x_1, \dots, x_n de \mathbf{R}^n de façon à ce que l'homomorphisme naturel $\mathbf{R}\{x_1, \dots, x_d\} = \mathcal{O}_d \rightarrow \mathcal{O}_n/I(X) = \mathcal{O}_X$ soit injectif et fasse de \mathcal{O}_X un \mathcal{O}_d -module fini.

De plus, on peut supposer que l'image $\overline{x_{d+1}}$ de x_{d+1} dans \mathcal{O}_X engendre le corps des fractions de \mathcal{O}_X sur celui de \mathcal{O}_d ; notons Δ le discriminant du polynôme minimal de $\overline{x_{d+1}}$ ($\Delta \in \mathcal{O}_d$). Soit X_{reg} l'ensemble des points lisses de dimension d de X .

Si $\pi : X \rightarrow \mathbf{R}^d$ est la projection correspondant à l'homomorphisme : $\mathcal{O}_d \rightarrow \mathcal{O}_X$, π est alors de rang d sur l'ouvert $V \subset X_{\text{reg}}$ formé des points $x \in X_{\text{reg}}$ tels que $\Delta \circ \pi(x) \neq 0$. Si $U = \pi(V)$, U est un ouvert semi-analytique non vide de \mathbf{R}^d tel que $0 \in \overline{U}$.

Une courbe dans X sera toujours donnée sous forme paramétrique, i. e. par un homomorphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$.

LEMME 4.3. — Soit q la multiplicité de X à l'origine (q est la multiplicité de l'idéal maximal dans l'anneau \mathcal{O}_X). Alors toute courbe C de \mathbf{R}^d telle que $C - \{0\} \subset U$ se relève dans $\overline{X_{\text{reg}}}$ en une courbe analytique en $t^{1/q}$. Autrement dit, si $h : \mathcal{O}_d \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$ définit la courbe C , il existe un homomorphisme $h' : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{R}\{t^{1/q}\}$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{h'} & \mathbf{R}\{t^{1/q}\} \\ \uparrow & & \uparrow \theta \\ \mathcal{O}_d & \xrightarrow{h} & \mathbf{R}\{t\} \end{array}$$

soit commutatif (θ désigne l'application naturelle définie par $\theta(t) = t$).

Démonstration. — L'analogie complexe de ce lemme est le théorème de Puiseux (cf. [T 1], p. 49) : On sait donc qu'il existe q homomorphismes distincts $h_i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{C}\{t^{1/q}\}$ relevant l'homomorphisme donné $h : \mathcal{O}_d \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$; soit \tilde{X} le germe complexifié de X à l'origine, $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{C}^d$ la projection complexifiée de π . Si $a \in \mathbf{C}$ est suffisamment proche de 0, $\tilde{\pi}^{-1}(a)$ est formé de q points distincts de \tilde{X} par lesquels passent les q courbes correspondant aux homomorphismes h_i ;

Si aucun des h_i n'était à valeurs réelles, cela entraînerait que $\tilde{\pi}^{-1}(C - \{0\})$ n'aurait aucun point réel, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que $C - \{0\} \subset U \subset \pi(X_{\text{reg}})$.

C.Q.F.D.

Soient C et C' deux courbes dans \mathbf{R}^d définies par des homomorphismes h et $h' : \mathcal{O}_d \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$; posons

$$\begin{cases} h \circ x_i = h_i(t) \\ h' \circ x_i = h'_i(t) \end{cases} \quad (1 \leq i \leq d).$$

On dit que C et C' ont un contact d'ordre $\geq v$ si

$$h_i(t) - h'_i(t) \in (t^v) \quad (1 \leq i \leq d).$$

LEMME 4.4. — Soit C une courbe de \mathbf{R}^d telle que $C - \{0\} \subset U$. Il existe un entier v tel que toute courbe C' ayant un contact d'ordre $\geq v$ avec C soit telle que $C' - \{0\} \subset U$.

Démonstration. — Les ensembles C et $W = \mathbb{C} U$ sont semi-analytiques et tels que $C \cap W = \{0\}$ par hypothèse (on se place dans une petite boule compacte K contenant 0). Il existe donc un nombre α et une constante λ tels que l'on ait

$$\lambda d(x, 0)^\alpha \leq d(x, C) + d(x, W), \quad \forall x \in K$$

(c'est l'inégalité de Lojasiewicz; cf. [LO] ou [B-R]).

Si C est définie par $h : \mathcal{O}_d \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$, posons $x(t) = (h(x_1), \dots, h(x_d))$. Si e est la multiplicité de C à l'origine (e est le plus petit des ordres des séries $h(x_1) \dots h(x_d)$), il existe une constante λ_1 telle que $|t|^e \leq \lambda_1 |x(t)|$ dans un voisinage de l'origine dans \mathbf{R} .

Si maintenant C' a un contact d'ordre $v \geq e(\alpha + 1)$ avec C , on a, $\forall x \in C' \cap K$ (et pour t assez proche de 0),

$$d(x, C) \leq \lambda_2 |t|^v \leq \lambda_3 |x|^{v/2} \leq \lambda_3 |x|^{\alpha+1}$$

(où λ_2 et λ_3 désignent des constantes convenables); on a donc

$$d(x, \mathbb{C} U) = d(x, W) \geq \lambda |x|^\alpha - d(x, C) \geq \lambda_4 |x|^\alpha,$$

$\forall x \in C' \cap K$ (quitte à restreindre K), ce qui implique bien que $C' - \{0\} \subset U$.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant montrer que si C est une courbe de \mathbf{R}^d , toutes les courbes ayant un contact suffisamment grand avec C ont l'ordre de leur conducteur égal à celui de C .

LEMME 4.5. — Soit $C \subset \mathbf{R}^d$ un germe de courbe irréductible à l'origine; soit c l'ordre du conducteur de C . Alors si un germe de courbe C_1 à l'origine de \mathbf{R}^d a un contact avec C d'ordre $\geq c$, l'ordre du conducteur de C_1 est égal à c .

Démonstration. — Par hypothèse, si $(x_1(t), \dots, x_d(t))$ est la représentation paramétrique de C , et $(x'_1(t), \dots, x'_d(t))$ celle de C_1 , les séries $x_i(t)$ et $x'_i(t)$ coïncident jusqu'à l'ordre c au moins.

Si $\text{Gr}_{(t)} \mathcal{O}_C$ désigne l'anneau gradué de \mathcal{O}_C muni de la filtration t -adique (définie par l'inclusion $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathbf{R}\{t\}$), il en résulte que

$$\text{Gr}_{(t)}^c \mathcal{O}_C \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_{(t)}^c \mathcal{O}_{C_1} (\text{Gr}_{(t)}^c \mathcal{O}_C$$

désignant l'ensemble des éléments de degré $\leq c$).

On en déduit immédiatement que les courbes C et C_1 ont même semi-groupe Γ , et donc même conducteur (cf. [Z]).

C. Q. F. D.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 4.1.

Soit f une fonction de classe C^r p -plate sur X en 0, et soit C un germe de courbe de \mathbf{R}^d à l'origine tel que $C - \{0\} \subset U$. Désignons (comme TOUGERON dans [T 2]) par $C_v^{1/q!}$ l'ensemble des courbes de X analytiques en $t^{1/q!}$ et relevant les courbes analytiques dans \mathbf{R}^d ayant un contact d'ordre $\geq v$ avec C .

Si v est un entier $\geq C$, et si $C' \in C_v^{1/q!}$, l'ordre du conducteur de C' est borné par $q!v$; on a en effet un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{C'} & \longrightarrow & \mathbf{R}\{t^{1/q!}\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{\pi(C')} & \longrightarrow & \mathbf{R}\{t\} \end{array}$$

et l'ordre du conducteur de $\pi(C')$ est borné par v à cause du lemme 4.5.

Mais f étant p -plate sur X par hypothèse est a fortiori p -plate sur toutes les courbes de $C_v^{1/q!}$; elle est donc $pq/q!v = p/(q-1)!v$ fortement plate sur ces courbes par le théorème 2.2.

Mais comme toutes les courbes de \mathbf{R}^d ayant un contact suffisamment grand avec C se relèvent en un élément de $C_v^{1/q!}$ à cause des lemmes 4.3 et 4.4, il résulte d'un théorème de TOUGERON ([T 2], proposition 1.8, cf. aussi [BL-R]) qu'il existe une fonction $\lambda(p)$ (avec $\lambda(p) \rightarrow +\infty$ si $p \rightarrow +\infty$) telle que f soit $\lambda(p)$ -fortement plate sur X à l'origine. (La

démonstration de TOUGERON, faite pour le cas complexe, s'applique ici sans changement; d'autre part, on donne dans [BL-R] un traitement systématique de ces questions dans le cas réel et complexe.)

C. Q. F. D.

PROBLÈME. — Détermine $\lambda(r)$ en fonction d'invariants du germe X .

BIBLIOGRAPHIE

- [BL-R] BLOOM (T.) et RISLER (J.-J.). — *Familles de courbes sur les germes d'espaces analytiques*, Palaiseau, École Polytechnique, Centre de mathématiques, 1976 (preprint).
- [B-R] BOCHNACK (J.) et RISLER (J.-J.). — Sur les exposants de Lojasiewicz, *Comment. Math. Helvet*, t. 50, 1975, p. 493-507.
- [L] LASSALE (G.). — Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables, *Topology*, t. 12, 1973, p. 41-62.
- [LO] LOJASIEWICZ (S.). — *Ensembles semi-analytiques*, Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1965 (multigraphie).
- [MA] MALGRANGE (B.). — *Ideals of differentiable functions*. — London, Oxford University Press; Bombay, Tata Institute, 1967 (*Studies in Mathematics*, 3).
- [N] NARASIMHAN (R.). — *Introduction to the theory of analytic spaces*, Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Lectures Notes in Mathematics*, 25).
- [RA] RAYNAUD (M.). — *Anneaux locaux henséliens*, Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 169).
- [R] RISLER (J.-J.). — Le théorème des 0 pour les fonctions différentiables, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 26, 1976, fascicule 3.
- [SP1] SPALLEK (K.). — Differenzierbare und holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen, *Math. Annalen*, t. 161, 1965, p. 143-162.
- [SP2] SPALLEK (K.). — *L-platte Funktionen auf semi-analytischen Mengen*, 1977 (preprint).
- [T1] TOUGERON (J.-C.). — *Idéaux de fonctions différentiables*, Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Ergebnisse der Mathematik*, 71).
- [T2] TOUGERON (J.-C.). — Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 26, 1976, fascicule 2.
- [W] WALL (C. T. C.). — Introduction to the preparation theorem, "*Proceedings of Liverpool singularities symposium*, 1, 1969-1970", p. 90-96. Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 192).
- [Z] ZARISKI (O.). — *Modules de branches planes*, Palaiseau, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1976.

(Texte reçu le 9 juillet 1976.)

Jean-Jacques RISLER,
Centre de Mathématiques,
Plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau.