

BULLETIN DE LA S. M. F.

ROGER MARLIN

Cohomologie de de Rham des variétés de drapeaux

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 89-96

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__89_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE DE DE RHAM DES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

PAR

ROGER MARLIN

[Orsay]

RÉSUMÉ. — Si X est une variété de drapeaux, en utilisant d'une part une filtration du faisceau des formes différentielles holomorphes sur X telle que le quotient de deux sous-faisceaux successifs soit un X -module localement libre de rang 1, et d'autre part un théorème de Bott sur la cohomologie de tels faisceaux, on retrouve un théorème d'annulation de la cohomologie de De Rham des variétés de drapeaux.

Par un calcul purement algébrique utilisant un théorème de Bott sur les espaces vectoriels de cohomologie $H^n(G/B, \mathcal{L})$, où G est un groupe semi-simple complexe, B un groupe de Borel, et \mathcal{L} un G/B -module localement libre de rang 1, on montre le résultat suivant :

THÉORÈME. — Si H est un sous-groupe parabolique de G , et si $\Omega_{G/H}^j$ est le faisceau des j -formes différentielles holomorphes sur G/H , on a : $H^i(G/H, \Omega_{G/H}^j) = \{0\}$ si $i \neq j$, et la représentation de G dans $H^i(G/H, \Omega_{G/H}^i)$ est triviale.

On obtient également l'égalité des dimensions de $H^i(G/H, \Omega_{G/H}^i)$ et du groupe de Chow $A^i(G/H)$ des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle. Ceci n'est pas étonnant puisque dans [1] est établi un isomorphisme entre $H^i(X, \Omega_X^i)$ et $A^i(X) \otimes H^0(\rho_t)$ pour toute variété algébrique lisse.

Ce théorème n'est pas à proprement parlé nouveau, seule la démonstration en est originale. Il pouvait être obtenu par voie « transcendante » à l'aide de la théorie de Hodge et de la décomposition cellulaire (voir, par exemple [8], ou partiellement, au moins comme cas particulier des résultats contenus dans [1]).

0. Rappels et notations

On désigne par \mathbf{k} un corps algébriquement clos, par G un \mathbf{k} -groupe algébrique semi-simple simplement connexe déployé, par T un tore maximal

déployé de G , par B un groupe de Borel contenant T , par H un groupe parabolique contenant B , par f la projection canonique de G/B sur G/H , par $\Omega_{G/H}^j$ le faisceau des j -formes différentielles sur G/H .

Si E est un \mathbf{k} -espace vectoriel, et si τ est une représentation de B dans E , on dira que E est un B -module. Le produit contracté $G \times^B E$ est alors le quotient de $G \times E$ sous l'action à droite de B donnée par

$$(g, v) \cdot b = (gb, \tau(b^{-1}) \cdot v) \quad \text{pour tout } (g, v, b) \in G \times E \times B.$$

Le morphisme $\psi : G \times^B E \rightarrow G/B$, donné par $\psi [(g, v) \cdot B] = gB$, est une fibration vectorielle de G/B . Le faisceau des sections de ψ est alors un $\mathcal{O}_{G/B}$ -module localement libre noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{L}(\tau)$ (cf. [6], 1.5). Notons que c'est un G -faisceau. On considère $\text{Lie}(G) = \mathfrak{G}$ comme un G -module *via* la représentation adjointe. On appellera B -drapeau un drapeau stable par B .

Les notations utilisées seront, dans la mesure du possible, celles de [2] et [3]).

1. Filtration de $f^*(\Omega_{G/H}^j)$

DÉFINITION. — On dira que la suite $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$ de faisceaux est une filtration d'un faisceau F si :

$$F_0 = \{0\};$$

F_i est un sous-faisceau de F_{i+1} , pour tout i , $0 \leq i < n$;

$$F_n = F.$$

Si \mathfrak{U} est l'algèbre de Lie de la partie unipotente U de B , une racine α sera dite positive si l'espace propre correspondant \mathfrak{G}_α n'est pas contenu dans \mathfrak{U} . On notera R_+ l'ensemble des racines positives, S l'ensemble des racines simples.

Soient \mathfrak{G} (resp. \mathfrak{H} , resp. \mathfrak{B} , resp. \mathfrak{T}) l'algèbre de Lie de G (resp. H , resp. B , resp. T). Il existe une partie S' de S telle que, si $R'_+ = (\mathbf{N} \cdot S') \cap R_+$ (où $\mathbf{N} \cdot S'$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbf{N} des éléments de S'), on ait

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{T} \oplus \coprod_{\alpha \in R'_+} \mathfrak{G}_\alpha.$$

Soit $R_H = \bigcup_{R'_+} R'_+$. Munissons R_H d'un ordre total compatible avec l'ordre partiel ($\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in R_+$).

LEMME 1.1. — Soit α une racine de R_H , et soit $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H} \oplus \coprod_{\beta \in R_H, \beta \leq \alpha} \mathfrak{G}_\beta$.

Alors l'image de \mathfrak{H}_α dans $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ est un sous- B -module de $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Démonstration. — On a

$$\text{Ad}(B) \cdot \mathfrak{G}_\alpha \subset \sum_{\beta \in R_-, \alpha + \beta \in R} \mathfrak{G}_{\alpha + \beta} \text{ (cf. par exemple [7]).}$$

Mais alors $\text{Ad}(B) \cdot \mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}_\alpha$. L'image de \mathfrak{H}_α dans $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ est donc bien un sous- B -module de $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

LEMME 1.2. — *Le faisceau $f^*(\Omega_{G/H}^1) \simeq \mathcal{L}((\mathfrak{G}/\mathfrak{H})^*)$ admet comme filtration la suite de faisceaux $(\mathcal{L}((\mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H})^*))_{\alpha \in R_H}$. Les quotients successifs des éléments de cette filtration sont isomorphes aux $(\mathcal{L}(-\alpha))_{\alpha \in R_H}$.*

Démonstration. — La suite d'espaces vectoriels $((\mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H})^*)_{\alpha \in R_H}$ est un B -drapeau de $(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})^*$. On obtient une filtration sur les faisceaux correspondants en remarquant que si F est un sous- B -module du B -module E , $\mathcal{L}(F)$ est un sous- G -faisceau de $\mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{L}(E)/\mathcal{L}(F) \simeq \mathcal{L}(E/F)$.

Si α et β sont deux racines consécutives du R_H ($\alpha > \beta$), on a alors des isomorphismes de B -modules

$$(\mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H})/(\mathfrak{H}_\beta/\mathfrak{H}) \simeq \mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H}_\beta \quad \text{et} \quad (\mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H})^*/(\mathfrak{H}_\beta/\mathfrak{H})^* \simeq \mathfrak{G}_{-\alpha}.$$

D'où un isomorphisme de G -faisceaux sur G/B

$$\mathcal{L}((\mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{H})^*)/\mathcal{L}((\mathfrak{H}_\beta/\mathfrak{H})^*) \simeq \mathcal{L}(-\alpha).$$

Notons $I_{n,j}$ l'ensemble des parties à j éléments de $[1, n] \cap \mathbf{N}$, ordonnées lexicographiquement $[(1, 2, \dots, j)]$ est la plus petite, $[(n-j+1, \dots, n)]$ est la plus grande].

LEMME 1.3. — *Soient E un B -module, $i \in I_{n,j}$, $D = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ un B -drapeau de E , et V_i^j le sous-espace vectoriel de $\Lambda^j E$ image de $\sum_{t \leq i} (\otimes_{k \in t} E_k) \subset \otimes^j E$.*

Alors (V_i^j) pour i parcourant $I_{n,j}$ est un B -drapeau de $\Lambda^j E$. Si, de plus, i et i' sont deux éléments consécutifs de $I_{n,j}$ ($i > i'$), on a un isomorphisme de B -modules

$$V_i^j/V_{i'}^j \simeq \otimes_{i \in i} (E_i/E_{i-1}).$$

Démonstration. — La suite des sous-espaces V_i^j est, par construction, une suite croissante de B -modules. Comme $\dim \Lambda^j E = \text{card } I_{n,j} = C_n^j$, pour prouver que cette suite est un drapeau il suffit de montrer que son premier élément est différent de $\{0\}$ et que ses éléments sont deux à deux distincts.

Soit, pour tout i , v_i un élément de E_i n'appartenant pas à E_{i-1} . Il est alors clair que $\wedge_{i \in i} v_i$ n'est pas nul et appartient à l'image de $\otimes_{i \in i} E_i$ et

que, pour tout $\mathfrak{k} \in I_{n,j}$ avec $\mathfrak{k} < i$, $\bigwedge_{i \in i} v_i$ n'appartient pas à l'image de $\bigotimes_{k \in k} E_k$. Donc $\bigwedge_{i \in i} v_i$ appartient à V_i^j sans appartenir aux éléments précédents de la suite. Cette suite de sous-espaces est donc strictement croissante.

Si i et i' sont deux éléments consécutifs de $I_{n,j}$, $V_i^j/V_{i'}^j$ est de dimension 1 et est engendré par l'image de $\bigwedge_{i \in i} v_i$. On a bien donc l'isomorphisme annoncé.

PROPOSITION 1. — *Le faisceau $f^*(\Omega_{G/H}^j)$ admet une filtration dont les quotients successifs sont les $\mathcal{L}(-\sum_{\alpha \in V} \alpha)$, où V parcourt les parties à j éléments de R_H .*

Démonstration. — On a d'une part $f^*(\Omega_{G/H}^j) = \wedge^j f^*(\Omega_{G/H}^1)$, et d'autre part $\bigotimes_{i \in i} \mathcal{L}(-\alpha_i) = \mathcal{L}(-\sum_{i \in i} \alpha_i)$.

La proposition résulte alors des lemmes 1.2 et 1.3.

2. Position de certains poids relativement aux murs

Soient R un système de racines réduit, P son réseau de poids, W son groupe de Weyl, R_+ (resp. R_-) les racines positives (resp. négatives), S les racines simples de R . Pour chaque racine α , soit α^\vee la racine inverse associée dans P^\vee , le dual du \mathbf{Z} -module P . Un poids $\chi \in P$ est régulier (resp. dominant) si on a $\langle \alpha^\vee, \chi \rangle \neq 0$ (resp. $\langle \alpha^\vee, \chi \rangle \geq 0$) pour tout $\alpha \in R_+$. Un poids singulier est un poids non régulier. L'ensemble des poids dominants est noté P_{++} . Si V est une partie de R , on notera $|V| = \sum_{\alpha \in V} \alpha$. Le poids ρ est alors défini par $2\rho = |R_+|$. L'ensemble des poids réguliers dominants est alors $\rho + P_{++}$. Un mur est un hyperplan de $P \otimes \mathbf{Q}$ d'équation $\langle \alpha^\vee, \chi \rangle = 0$, où $\alpha^\vee \in R^\vee$. On dira d'une partie V de R qu'elle est *pleine* si elle est telle que $V \cap (-V) = \emptyset$ et $V \cup (-V) = R$.

PROPOSITION 2. — *Soit V une partie pleine de R , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $1/2 |V|$ est un poids régulier;
- (ii) il existe $w_1 \in W$ tel que $1/2 |V|$ appartienne à la chambre « ouverte » $w_1(\rho + P_{++})$;
- (iii) il existe $w_2 \in W$ tel que $V = w_2(R_+)$.

De plus, si les conditions sont vérifiées, alors w_1 et w_2 sont uniquement déterminés et égaux.

COROLLAIRE. — *Une partie pleine V de R n'est pas de la forme $w(R_+)$ si, et seulement si, $1/2 |V|$ est singulier.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que, si V est une partie pleine de R , $|V| = |R_+| + 2|V \cap R_-|$. Donc $1/2|V| = \rho + |V \cap R_-|$ est un poids.

Supposons (i). L'assertion (ii) indique alors simplement à quelle chambre ouverte appartient le poids régulier $1/2|V|$. L'élément w_1 est donc bien uniquement déterminé.

Supposons (ii). Posons $V_1 = w_1^{-1}(V)$, la partie V_1 est alors pleine, et $|V_1| = w_1^{-1}(|V|)$. Donc (ii) s'écrit encore $1/2|V_1| \in \rho + P_{+++}$. Mais $1/2|V_1| - \rho = |V_1 \cap R_-| \in P_{+++}$. Dans P , on a

$$|V_1 \cap R_-| = - \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \alpha, \text{ avec } n_\alpha \in \mathbf{N}.$$

Or tout poids dominant est combinaison linéaire à coefficients positifs des racines simples. Donc $|V_1 \cap R_-| = 0$. Mais ceci implique $V_1 \cap R_- = \emptyset$, donc $w_1^{-1}(V) = V_1 = R_+$. D'où (iii), avec $w_2 = w_1$. L'élément w_2 est unique car la partie $w(R_+)$ caractérise w .

Supposons (iii). On a alors $1/2|V| = w_2(\rho)$ qui est régulier, d'où (i). Le corollaire est simplement la contraposée de la proposition.

Soient S' une partie de S , et R' le sous-système de racines de R correspondant à S' (i. e. $R' = \mathbf{Z}(S') \cap R$). Soient $R'_- = R' \cap R_-$, et W' le groupe de Weyl de R' (W' est le sous-groupe de W engendré par les réflexions par rapport aux racines de S'). Chaque classe à gauche de W modulo W' possède un unique élément de longueur minimale. De plus, on a le lemme suivant.

LEMME 2.1. — Si $w \in W$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $w(R_+) \cap R'_- = \emptyset$,
- (ii) $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$ pour tout α dans S' ,
- (iii) w est l'élément de longueur minimale de sa classe à gauche modulo W' .

Démonstration. — Supposons (i), et soient $\alpha \in S'$, $\beta \in w(R_+) \cap R_-$, et $\gamma = w^{-1}(\beta)$. La racine négative β est différente de $-\alpha$ puisque $\beta \notin R'$. Donc $s_\alpha(\beta) < 0$ et $s_\alpha w(\gamma) < 0$. Mais alors

$$w^{-1}(R_-) \cap R_+ \subset (s_\alpha w)^{-1}(R_-) \cap R_+.$$

Or,

$$\text{card}(w^{-1}(R_-) \cap R_+) = l(w) \quad \text{et} \quad \text{card}((s_\alpha w)^{-1}(R_-) \cap R_+) = l(s_\alpha w).$$

Donc $l(s_\alpha w) \geq l(w)$. Mais $|l(s_\alpha w) - l(w)| = 1$, et on en déduit (ii).

Supposons (ii), et soient $\alpha \in S' \cap -w(R_+)$ et $\beta = w^{-1}(\alpha)$. On a $\beta \in R_-$ et $s_\alpha w(\beta) = -\alpha$. Mais alors ($\gamma \in R_+$ et $s_\alpha w(\gamma) \in R_-$) implique

$$(s_\alpha w(\gamma) \neq -\alpha) \text{ et donc } (s_\alpha(s_\alpha w(\gamma)) \in R_-).$$

Ce qui donne

$$(s_\alpha w)^{-1}(R_-) \cap R_+ \subset w^{-1}(R_-) \cap R_+,$$

d'où $l(s_\alpha w) = l(w) - 1$. Contradiction, donc $w^{-1}(S') \subset R_+$, mais alors $w^{-1}(R'_+) \subset R_+$, d'où (i).

L'équivalence de (ii) et (iii) est classique (cf. par exemple [9], § 2, lemme 1).

3. Calcul de $H^i(G/B, \mathcal{L}(|V|))$

On suppose désormais k de caractéristique 0.

PROPOSITION 3. — Soit V une partie de R_- .

(a) S'il existe $w \in W$ tel que $V = w(R_+) \cap R_-$, alors

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(|V|)) = \{0\} \quad \text{pour tout } i \neq l(w) = \text{card}(V)$$

et

$$H^{l(w)}(G/B, \mathcal{L}(|V|)) \text{ est un espace vectoriel de dimension 1,}$$

et l'opération de G y est triviale.

(b) Si V n'est pas de la forme $w(R_+) \cap R_-$, alors

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(|V|)) = \{0\} \quad \text{pour tout } i.$$

La démonstration de cette proposition utilise le théorème suivant.

THÉORÈME DE BOTT ([4] et [5]). — Soient $\chi \in P$, $w \in W$ et $i \in \mathbb{Z}$.

(a) Si $\chi + \rho \in P_{+++}$, les G -modules $H^i(G/B, \mathcal{L}(\chi))$ et $H^{i+l(w)}(G/B, \mathcal{L}(w(\chi + \rho) - \rho))$ sont isomorphes;

(b) Si $\chi + \rho$ est singulier, $H^i(G/B, \mathcal{L}(\chi)) = \{0\}$ pour tout i ;

(c) Si χ est dominant, $H^i(G/B, \mathcal{L}(\chi)) = \{0\}$ pour tout $i > 0$.

Démonstration de la proposition 3.

(a) Si $V = w(R_+) \cap R_-$, on a $1/2 |w(R_+)| = \rho + |V|$, et donc $|V| = w(\rho) - \rho$, d'où, compte tenu du théorème de Bott et du fait que $H^0(G/B, \mathcal{L}(0))$ est de dimension 1, la première assertion.

(b) Soit \bar{V} la partie pleine de R telle que $V = \bar{V} \cap R_-$. L'hypothèse de (b) équivaut à : \bar{V} n'est pas de la forme $w(R_+)$. Donc, d'après le corollaire de la proposition 2, $1/2 |\bar{V}|$ est singulier. Mais $1/2 |\bar{V}| = |V| + \rho$, et le théorème de Bott permet encore de conclure.

4. Cohomologie de $\Omega_{G/H}^j$.

Notons $A^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i d'une variété X modulo l'équivalence rationnelle.

THÉORÈME. — Si H est un sous-groupe parabolique de G , on a

$$\begin{aligned} H^i(G/H, \Omega_{G/H}^j) &= \{0\} \quad \text{si } i \neq j, \\ \dim_{\mathbf{k}} H^i(G/H, \Omega_{G/H}^i) &= \text{rg}_{\mathbf{Z}} A^i(G/H). \end{aligned}$$

De plus, la représentation de G dans $H^i(G/H, \Omega_{G/H}^i)$ est triviale.

COROLLAIRE. — Si B est un sous-groupe de Borel de G , on a

$$\begin{aligned} H^i(G/B, \Omega_{G/B}^j) &= \{0\} \quad \text{si } i \neq j, \\ \dim H^i(G/B, \Omega_{G/B}^i) &= \text{card} \{w \in W; l(w) = j\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il résulte du théorème de Bott appliqué à H/B (voir par exemple [6], p. 85, cor. 3 du th. 1) que

$$H^i(G/H, \Omega_{G/H}^j) = H^i(G/B, f^*(\Omega_{G/H}^j)).$$

D'après la proposition 1, $f^*(\Omega_{G/H}^j)$ admet une filtration dont les quotients sont isomorphes aux $\mathcal{L}(-|V|)$, où V parcourt les parties à j éléments de R_H . Mais il est classique que si un faisceau F sur un espace topologique X admet une filtration $(F_i)_{0 \leq i \leq p}$, si les espaces de cohomologie de ces faisceaux sont des espaces vectoriels et si, pour tout i , on a

$$H^k(X, F_{i+1}/F_i) = \{0\}$$

pour tout k différent de j , alors $H^k(X, F) = \{0\}$ pour tout k différent de j et

$$H^j(X, F) \simeq \bigoplus_i H^j(X, F_{i+1}/F_i).$$

D'après la proposition 3, on a donc

$$H^i(G/H, \Omega_{G/H}^j) = \{0\} \quad \text{si } i \neq j$$

et

$$H^j(G/H, \Omega_{G/H}^j) \simeq \bigoplus_{w \in U_j} H^j(G/B, \mathcal{L}(|w(R_+) \cap R_-|)),$$

où $U_j = \{w \in W; l(w) = j \text{ et } w(R_+) \cap R'_- = \emptyset\}$.

D'après le lemme 2.1, U_j est alors l'ensemble des éléments de W de longueur j qui sont de plus petite longueur dans leur classe à gauche modulo W' . De plus, cet isomorphisme est un isomorphisme de G -modules et

$$\dim H^j(G/H, \Omega_{G/H}^j) = \text{card } U_j = \dim A^j(G/H) \text{ (cf. [9]).}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLOCH (S.) and OGUS (A.). — Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 7, 1974, p. 181-202.
- [2] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*. Chap. 4 à 6. — Paris, Hermann, 1968 (*Bourbaki*, 34).
- [3] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*. Chap. 7 et 8. — Paris, Hermann, 1975 (*Bourbaki*, 38).
- [4] DEMAZURE (M.). — Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott, *Inventiones Math.*, t. 5, 1968, p. 349-356.
- [5] DEMAZURE (M.). — *A very simple proof of Bott's theorem* (à paraître).
- [6] DEMAZURE (M.). — Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, *Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 7, 1974, p. 53-88.
- [7] DEMAZURE (M.). — Groupes réductifs : Déploiements, sous-groupes, groupes-quotients, *Schémas en groupes*, III, p. 156-262. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 153).
- [8] GROTHENDIECK (A.). — *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*. — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1966 (*Publications Mathématiques*, n° 29, p. 95-103).
- [9] MARLIN (R.). — *Anneau de Chow des groupes algébriques* $SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 et F_4 . — Orsay, Université Paris-Sud, 1974 (*Publications mathématiques d'Orsay*, n° 95-7419).

(Texte reçu le 28 juin 1976.)

ROGER MARLIN,
7, allée du Moulin-Neuf
78470 Cressely.