

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN SOUVILLE

Théorie différentielle du contact maximal en inégale caractéristique

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 47-63

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__47_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DIFFÉRENTIELLE DU CONTACT MAXIMAL EN INÉGALE CARACTÉRISTIQUE

par

JEAN SOUVILLE

RÉSUMÉ. — Ces pages montrent comment la théorie du contact maximal, c'est-à-dire de la présentation d'un espace algébrique en vue de la résolution de ses singularités, peut s'écrire sans hypothèse d'un corps de base.

Le but de ces pages est d'étendre au cas général (c'est-à-dire au cas de l'inégale caractéristique) la théorie différentielle du contact maximal telle qu'elle a été présentée par GIRAUD en caractéristique positive dans [7]. Nous montrerons donc que la notion de présentation permet, dans le cas général, de ramener le problème de l'élimination des points proches par éclatements de centres permis à l'élimination des points de multiplicité trop élevée d'un certain nombre d'hypersurfaces par éclatements de centres réguliers, le long desquels elles sont équimultiples.

Mais pour montrer l'existence d'une présentation d'un anneau local, noethérien, A , nous aurons besoin d'une hypothèse restrictive, à savoir de pouvoir écrire $A = S'[[x_1, \dots, x_n]]/J$, où S' est un anneau local régulier, tel que le faîte de la singularité $X = \text{Spec } A$ soit plat sur l'espace tangent à S' (on suppose aussi que A est séparé). Si A est complet, et d'égale caractéristique, on peut prendre pour S le corps résiduel k et l'hypothèse est satisfaite; en inégale caractéristique, si A est complet, on peut prendre *a priori* pour S' un p -anneau de Cohen de corps résiduel k , et l'hypothèse signifie que la classe dans M/M^2 (où M est l'idéal maximal de A) de $p \cdot 1_A$ est un élément régulier de l'algèbre affine du faîte, ou plus géométriquement, que dans l'espace tangent à l'espace lisse ambiant $Z = \text{Spec } (S'[[x]])$ le faîte est transverse à l'hyperplan défini par l'annulation de la forme initiale de p . Mais, imposer que S' soit un anneau de Cohen (ou même seulement de valuation discrète), ne simplifie pas la démonstration, et surtout est trop restrictif : ce n'est pas vérifié pour des présentations de

base $\mathbf{Z}_p[[x, y]]/(xy-p)$, par exemple. Par contre, l'hypothèse que nous retiendrons est vérifiée pour tout anneau A , complet, admettant une présentation achevée, c'est-à-dire telle que les formes initiales des s_i (cf. 3.1) sont les équations du faite ([7], 5.5).

Nous suivrons pas à pas le texte de GIRAUD [7], en gardant, outre les mêmes notations, la même numérotation des paragraphes, ce qui nous oblige à commencer par le paragraphe 3.

Précisons quelques notations:

Pour tout multi-indice $A = (a_1, \dots, a_e)$ dans \mathbf{N}^e , on note

$$|A| = a_1 + a_2 + \dots + a_e,$$

et on munit \mathbf{N}^e de la relation d'ordre : $A \leq B$ si $|A| < |B|$ ou si $|A| = |B|$, et A est supérieur ou égal à B pour l'ordre lexicographique. Si $S \rightarrow R$ est un morphisme d'anneaux locaux, et M l'idéal maximal de R , on considère la R -algèbre des jets relatifs de longueur n , notée $\mathbf{P}_{R/S}^n$, et son complété pour la topologie M -adique, noté $\widehat{\mathbf{P}}_{R/S}^n$. On appelle, selon la définition 2.2 de [7], coordonnées différentielles locales de R/S , des éléments z_1, \dots, z_e de R , tels qu'on ait, pour tout n , un isomorphisme de R -algèbres

$$u_n : R[\zeta_1, \dots, \zeta_e]/(\zeta_i)^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbf{P}}_{R/S}^n$$

avec $u_n(\zeta_i) = dz_i = j_{R/S}^n(z_i) - z_i$.

Ceci nous permet d'avoir une formule de Taylor :

$$j_{R/S}^n(f) = \sum_{|A| \leq n} D_A^{(z)} f (dz)^A \quad \text{pour tout } f \text{ dans } R,$$

où $D_A^{(z)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq |A|$ au-dessus de S : $D_A^{(z)} R \rightarrow R$; et on a, pour tout multi-indice B , $D_A^{(z)} z^B = \binom{B}{A} z^{B-A}$, où $\binom{B}{A}$ est nul si pour un des indices i , on a $b_i < a_i$, et sinon, on a

$$\binom{B}{A} = \frac{B!}{A!(B-A)!},$$

où on pose $A! = a_1! a_2! \dots a_e!$.

3. Présentation d'un anneau local

Rappelons la définition d'une présentation (d'après [7]).

DÉFINITION 3.1. — On dit que

$$(S; R; z_1, \dots, z_e; J; f_1, \dots, f_m; \\ n(1), \dots, n(m); E; P_1, \dots, P_e; q_1, \dots, q_e; s_1, \dots, s_e)$$

est une présentation de l'anneau $A = R/J$ si

(a) R et S sont des anneaux locaux noethériens réguliers d'idéaux maximaux M et N avec $S \subset R$, $N \subset M$, et l'on a

(a.1) l'extension résiduelle est triviale et l'on pose $k = S/N = R/M$,

(a.2) le morphisme naturel $\text{gr}_N(S) \rightarrow \text{gr}_M(R)$ est plat,

(a.3) (z_1, \dots, z_e) sont des coordonnées différentielles locales de R/S .

(b) J est un idéal de R tel que, si l'on pose

$$R_0 = R/NR, \quad M_0 = MR_0, \quad J_0 = JR_0 \quad \text{et} \quad A_0 = R_0/J_0,$$

alors

(b.1) $H_M(A) = H_M^{(d)}(A_0)$ où $d = \dim S$, autrement dit, $\text{gr}_M(A)$ est plat sur $\text{gr}_N(S)$.

(c) f_1, \dots, f_m sont des éléments de J , $n(1), \dots, n(m)$ des entiers et E une partie de \mathbf{N}^e telle que $E + \mathbf{N}^e \subset E$ et

(c.1) $v_{M_0}(f_{i,0}) = n(i)$, où $f_{i,0} = \text{cl}(f_i)$ dans J_0 ,

(c.2) $\text{in}_{M_0}(J_0, R_0)$ est engendré par les $\text{in}_{M_0}(f_{i,0})$,

(c.3) E est l'exposant de l'idéal J_0 par rapport aux coordonnées différentielles $(z_{1,0}, \dots, z_{e,0})$ de R_0/k , où $z_{i,0} = \text{cl}(z_i)$ dans R_0 ,

(c.4) pour $A \in E$, $i = 1, \dots, m$ et $|A| < n(i)$, on a $D_A^{(z)} f_i = 0$.

(d) P_1, \dots, P_e sont des polynômes à coefficients dans S homogènes de degrés q_1, \dots, q_e (avec $q_i \geq 1$), en les indéterminées $X_{A,i}$, où $i = 1, \dots, m$, $A \in \mathbf{N}^e$, $|A| < n(i)$, affectées des poids $n(i) - |A|$. Enfin, s_1, \dots, s_e sont des éléments de R et l'on a

(d.1) $s_j = P_j(D_A^{(z)} f_j)$, $j = 1, \dots, e$

(d.2) $H_{M_0}(R_0/(s) R_0) = \prod_{1 \leq i \leq e} ((1 - T^{q_i}) / (1 - T))$.

Comme la définition ci-dessus, le lemme 3.2 et l'alinéa 3.2.1 de [7] sont valables sans hypothèse d'égale caractéristique des anneaux considérés. Rappelons leurs résultats.

LEMME 3.2. — Soient R et S avec les conditions (a) sauf (a.3). Soient z_1, \dots, z_e dans R . Il existe a_1, \dots, a_e dans S tels que $z_i' = z_i + a_i$ appartiennent à M .

En outre, (a.3) équivaut à chacune des conditions suivantes :

(a.4) les images $z_{i,0}$ des z_i dans R_0 sont des coordonnées différentielles locales de R_0/k ;

(a.5) les images $z'_{i,0}$ des z'_i dans R_0 sont un système régulier de paramètres de R_0 .

3.2.1. — Si (a.3) est vérifié, pour tout f dans R_0 , on appelle *exposant de f* par rapport aux coordonnées différentielles $z_{i,0}$ de R_0/k , le plus petit indice $A \in \mathbb{N}^e$ tel que $D_A^{(z_0)} f \notin M_0$, et *exposant d'un idéal* de R_0 l'ensemble des exposants de ses éléments. Ce qui donne un sens à (c.3). En outre, si nous posons $Z_{i,0} = \text{in}_{M_0}(z'_{i,0})$, nous avons

$$\text{gr}_{M_0}(R_0) = k [Z_{1,0}, \dots, Z_{e,0}],$$

et l'exposant de l'idéal $\text{in}_{M_0}(J_0)$ par rapport aux variables $Z_{i,0}$ est égal à E défini par (c.3).

Ajoutons le lemme ci-dessous :

LEMME 3.2.2. — Soient S, R, z_1, \dots, z_e, J vérifiant les conditions (a) et la transversalité (b). On a

$$(i) \text{in}_{M_0}(J_0, R_0) = \text{in}_M(J, R) \cdot \text{gr}_{M_0}(R_0),$$

(ii) si w_1, \dots, w_d sont un système régulier de paramètres de S , et si on pose

$$Z_i = \text{in}_M(z'_i) \text{ (lemme 3.2)} \quad \text{et} \quad W_j = \text{in}_M(w_j),$$

on a $\text{gr}_M(R) = k [Z_1, \dots, Z_e, W_1, \dots, W_d]$ et

$$\exp(\text{in}_M(J, R), Z, W) = \exp(\text{in}_{M_0}(J_0, R_0), Z) \times \mathbb{N}^d.$$

En effet, d'après le lemme de Bennett (lemme 1.2 de [7]), et (b.1), on a

$$\text{gr}_{M_0}(A/(w)A) = \text{gr}_M(A)/(W) \text{gr}_M(A), \quad \text{où } A = R/J,$$

ce qui équivaut à (i).

D'après (i), si $B = \exp(f)$ avec $f \in \text{In}_{M_0}(J_0, R_0)$, il existe g dans $\text{in}_M(J, R)$ tel que $f = g(Z, 0)$. $\text{in}_M(J, R)$ étant un idéal homogène, je peux imposer que la valuation de g soit celle de f , d'où $\exp(g; Z, W) = (B, 0)$.

Ceci montre $\exp(\text{in}_{M_0}(J_0, R_0)) \times \mathbb{N}^d \subset \exp(\text{in}_M(J, R))$; l'inclusion inverse découle de la condition numérique de transversalité (b.1), grâce au calcul de la fonction de Hilbert-Samuel à partir de l'exposant.

3.3. *Existence d'une présentation.* — Soit $A = R/J$ un anneau local, noethérien, séparé, où R est un anneau de séries formelles sur un anneau local noethérien régulier S' ,

$$R = S' [[x_1, \dots, x_n]].$$

Ceci peut être par exemple réalisé si A est complet en prenant pour S' un anneau de Cohen ([4] EGA IV.1, chap. 0, th. 19.8.8.).

Posons $Z = \text{Spec}(R)$, $X = \text{Spec}(A)$, x point fermé de X et considérons les schémas sur k , corps résiduel de A :

$$(1) \quad T_x(Z) \supset C_x(X) \supset F_x(X),$$

qui sont respectivement l'espace tangent de Zariski de Z , le cône tangent de X et son faîte.

PROPOSITION 3.3.1. — *Avec les notations ci-dessus, si l'algèbre affine de $F_x(X)$ est plate sur $\text{gr}_{N'}(S')$, où N' est l'idéal maximal de S' , il existe une présentation $(S; R; z_1, \dots, z_e; J; \dots)$ de $A = R/J$.*

Soient y_1, \dots, y_r un système régulier de paramètres de S_i , soit M l'idéal maximal de R , on a

$$\text{gr}_M(R) = k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_r],$$

où on pose $X_i = \text{in}_M(x_i)$ et $Y_i = \text{in}_M(y_i)$.

D'après (1.6) de [7], il existe des polynômes additifs $\sigma_1, \dots, \sigma_e$ homogènes de degrés q_1, \dots, q_e tels que, quitte à changer l'ordre et les noms des variables X_i et Y_j et les écrire $(Z_1, \dots, Z_e, W_1, \dots, W_d)$, on a

$$(2) \quad F_x(X) = \text{Spec}(k[Z, W]/(\sigma_1, \dots, \sigma_e)),$$

$$(3) \quad I = I_\sigma k[Z, W], \quad \text{où } I = \text{in}_M(J, R) \quad \text{et} \quad I_\sigma = I \cap k[\sigma],$$

$$(4) \quad \sigma_i = Z_i^{q_i} + t_i(Z_{i+1}, \dots, Z_e, W_1, \dots, W_d), \quad i = 1, \dots, e.$$

Le processus de triangulation, qui aboutit à (4) (cf. [5], I, prop. 5.4), montre que l'on peut prendre tous les Y_i dans les W_1, \dots, W_d , car, sinon, l'un des σ_i sera de la forme $\sigma_i = a_1 Y_1^q + \dots + a_r Y_r^q$ où $q = q_i$ et les a_i sont des éléments de k , ce qui contredit l'hypothèse que $k[Z, W]/(\sigma)$

est plat sur $k[Y]$. Je peux donc supposer $(W_{d-r+1}, \dots, W_d) = (Y_1, \dots, Y_r)$ et en écrivant, de la même manière que les X_i , les variables x_1, \dots, x_n sous la forme $(z_1, \dots, z_e, w_1, \dots, w_{d-r})$, posons

$$S = S'[[w_1, \dots, w_{d-r}]]$$

et

$$R = S[[z_1, \dots, z_e]].$$

Les conditions (a) de 3.1 se vérifient immédiatement. Remarquons en outre que grâce à la triangulation (4), le faîte est plat sur $\text{gr}_N(S)$, c'est-à-dire qu'on pouvait prendre $S' = S$.

3.3.2. La condition (b-1) découle de (3) comme dans ([7] 3.3.2.).

LEMME 3.3.3. — Si S est un anneau local régulier, $A = R/J$ est un anneau local séparé avec $R = S[[z_1, \dots, z_e]]$ et vérifiant la transversalité (b.1), il existe des éléments f_1, \dots, f_m de J tels que si on pose

$$(1) \quad F_i = \text{in}_M(f_i) \quad (i = 1, \dots, m), \quad n(i) = v_M(f_i),$$

$$(2) \quad f_i = \sum_{B \in \mathbb{N}^e} f_{i,B} \cdot z^B \quad \text{avec } f_{i,B} \in S \quad \text{et } i = 1, \dots, m,$$

on a :

$$(3) \quad \text{les } F_i \text{ engendrent l'idéal } \text{in}_M(J, R) \text{ de } \text{gr}_M(R),$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{i,B} = 0 \quad \text{si } B = A + C \\ \text{avec} \\ C \in \mathbb{N}^e, \quad A \in E \quad \text{et} \quad |A| < n(i); \end{array} \right.$$

où E est l'exposant de J_0 par rapport aux variables $z_{i,0}$ [où les notations sont celles de 3.1. (b)].

Soit E_i l'ensemble des $B = A + C$, où $A \in E$ et $|A| < n(i)$.

Soit (f_1, \dots, f_m) une base standard de J , c'est-à-dire des éléments de J vérifiant (3) et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } i = 2, \dots, m, \\ \text{on a} \\ n(i) \geq n(i-1) \quad \text{et} \quad F_i \notin (F_1, \dots, F_{i-1}) \cdot \text{gr}_M(R). \end{array} \right.$$

Supposons que l'un f_k des f_i ne vérifie pas (4), et posons

$$(6) \quad B_0 = \inf(B \in E_k \quad \text{avec } f_{k,B} \neq 0).$$

Soit A_0 un élément de E vérifiant $|A_0| < n(k)$ et $B_0 \in A_0 + \mathbb{N}^e$. Par définition de E , A_0 est l'exposant d'un élément G_0 de $\text{in}_{M_0}(J_0, R_0)$ qui, par 3.2.2. (i), est l'image dans $\text{gr}_{M_0}(R_0)$ d'un élément G de $\text{in}_M(J, R)$ que nous pouvons supposer homogène. G est la forme initiale d'un élément g de J qui vérifie

$$(7) \quad A_0 = \inf(A \text{ tels que } g_A \neq 0), \quad \text{où } g = \sum g_A \cdot z^A \quad \text{avec } g_A \in S,$$

$$(8) \quad g_{A_0} \text{ est un élément inversible de } S,$$

$$(9) \quad G \in (F_1, \dots, F_{k-1}) \cdot \text{gr}_M(R) \quad (\text{car on a } \text{degré}(G) < n(k)).$$

Posons

$$(10) \quad f'_k = f_k - (f_{k, B_0} / g_{A_0}) \cdot z^{B_0 - A_0} \cdot g,$$

f'_k appartient à $M^{n(k)}$ et sa classe dans $M^{n(k)} / M^{n(k)+1}$ est congrue à F_k modulo (F_1, \dots, F_{k-1}) , ceci grâce à (9), est donc non nulle et égale à $F'_k = \text{in}_M(f'_k)$, et la suite $(f_1, \dots, f_{k-1}, f'_k, f_{k+1}, \dots, f_m)$ vérifie (3) et (5). De plus, $B'_0 = \inf(B \in E_k \text{ avec } f'_{k, B} \neq 0)$ vérifie $B'_0 > B_0$ ($B'_0 \neq B_0$). Nous pouvons donc remplacer f_k par f'_k et réitérer le procédé en s'arrêtant si f'_k vérifie (4), et si ce cas n'arrive pas, la suite des polynômes ainsi obtenus est convergente dans $R = S[[z]]$, car à chaque pas on a $v_M(f'_k - f_k) = |B_0|$ qui devient aussi grand qu'on veut; la limite est un élément de J (fermé, car $A = R/J$ est séparé), qui vérifie (4) ainsi que (3) et (5).

D'où le lemme.

Soient f_1, \dots, f_m vérifiant le lemme ci-dessus. Pour tout A dans E vérifiant $|A| < n(i) = v_M(f_i)$, on a

$$(11) \quad D_A^{(z)} f_i = 0.$$

$$(12) \quad D_{A, B}^{(z, W)} F_i = 0 \quad \text{pour tout } B \text{ dans } \mathbb{N}^d.$$

En effet (11) découle de (4), car $D_A^{(z)}$ est une dérivation de R sur S ; F_i vérifie une relation analogue à (4), d'où $D_A^{(z)} F_i = 0$, et (12) s'obtient en écrivant $D_{A, B}^{(z, W)} F_i = D_B^{(W)} (D_A^{(z)} F_i)$.

Par le lemme (1.6) de [7], (12) implique $F_i \in K[\sigma]$; soit

$$(c_1, \dots, c_e) = \exp(F_i; \sigma),$$

nous avons grâce à la triangulation des σ_j [(4) de 3.3]

$$\exp(F_i; Z, W) = (c_1 q_1, \dots, c_e q_e, 0, \dots, 0),$$

d'où

$$\text{deg}(F_i(Z, 0)) = \text{deg}(F_i) = n(i),$$

$F_i(Z, 0)$ n'étant pas nul est la forme initiale de $f_{i,0}$. D'où (c.1), (c.2) découle de (3) et de 3.2.2. (i), et (c.3) n'est autre que (11).

3.3.4. D'après le lemme 1.7 de [7] et (12), $k[\sigma]$ est l'algèbre engendrée par les $D_A^{(z)} F_i$ avec $|A| < n(i)$. Il existe donc des polynômes homogènes P'_1, \dots, P'_e à coefficients dans k , en les variables $X_{A,i}$ affectées de poids $n(i) - |A|$, et vérifiant

$$(1) \quad \sigma_j = P'_j(D_A^{(z)} F_j), \quad j = 1, \dots, e.$$

Relevons dans S les coefficients non nuls des P'_j , notons P_j les polynômes ainsi obtenus, et posons

$$(2) \quad s_j = P_j(D_A^{(z)} f_j), \quad j = 1, \dots, e.$$

D'où (d.1) et puisque $F_A^{(z)} f_i \in M^{n(i) - |A|}$ (car $D_A^{(z)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq |A|$ ([7] 2.5)), nous avons, grâce à l'homogénéité des P_j ,

$$s_j \in M^{q_j}; \quad \sigma_j = \text{cl}(s_j) \text{ dans } M^{q_j}/M^{q_j+1};$$

d'où

$$v_M(s_j) = q_j \quad \text{et} \quad \sigma_j = \text{in}_M(s_j).$$

Or, d'après la triangulation des σ_j (3.3.(4)), les $(W_1, \dots, W_d, \sigma_1, \dots, \sigma_e)$ forment une suite régulière de $\text{gr}_M(R)$, et par le lemme de transversalité (1.2 de [7]), on a

$$H(R/(w, s)R) = H(R_0/(s)R_0) = \prod_{1 \leq j \leq e} ((1 - T^{q_j})/(1 - T)),$$

qui n'est autre que (d.2), ce qui prouve la proposition.

4. Étude locale d'une présentation

Nous allons montrer que tous les résultats du paragraphe 4 de [7] restent valables sans l'hypothèse que S contient un corps.

LEMME 4.1. — Soit une présentation notée comme en (3.1). On a

(i) $v_M(f_i) = n(i)$, et les $\text{in}_M(f_i)$ engendrent $\text{in}_M(J, R)$.

(ii) Soient a_1, \dots, a_e dans S tels que $z'_i = a_i + z_i \in M$ et soit w_1, \dots, w_d un système régulier de paramètres de S . On pose

$$(1) \quad Z_i = \text{in}_M(z'_i), \quad W_i = \text{in}_M(w_i).$$

$$(2) \quad z'_{i,0} = \text{cl}(z'_i) \text{ dans } R_0 \quad \text{et} \quad Z_{i,0} = \text{in}_{M_0}(z'_{i,0}).$$

Alors :

$$(3) \quad E = \exp(\text{in}_{M_0}(J_0, R_0); Z_{1,0}, \dots, Z_{e,0}),$$

$$(4) \quad \text{Ex } N^d = \exp(\text{in}_M(J, R); Z_1, \dots, Z_e, W_1, \dots, W_d).$$

La partie (ii) n'est qu'une reprise des résultats de (3.2). D'après (1.4) de [7], pour voir que les $\text{in}_M(f_i)$ engendrent $\text{in}_M(J, R)$, il suffit de vérifier

$$v_M(f_i) \geq v_{M_0}(f_{i,0}) = n(i),$$

car l'autre inégalité est évidente.

Soit $(A, B) = \exp(F_i; Z, W)$. On a $v_M(f_i) = \deg F_i \geq |A|$; il me suffit donc de montrer $|A| \geq n(i)$, ou, d'après (c.4), que $D_A^{(z)} f_i$ est non nul. Et, puisque $D_A^{(z)} F_i$ est non nul (son terme dominant est un monôme en W^B), il suffit de prouver

$$(5) \quad D_A^{(z)} F_i = \text{cl}(D_A^{(z)} f_i) \text{ dans } M^{n-|A|}/M^{n-|A|+1}, \quad \text{où } n = v_M(f_i).$$

Écrivons $F_i = \sum \alpha_{C,D} Z^C W^D$ avec $\alpha_{C,D} \in k$, et relevons les $\alpha_{C,D}$ non nuls en des éléments $a_{C,D}$ de S .

On a

$$f_i - \sum a_{C,D} z^C w^D \in M^{n+1},$$

d'où, puisque $D_A^{(z)}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq |A|$ de R/S , et que $a_{C,D} \in S$,

$$D_A^{(z)} f_i - \sum a_{C,D} \binom{C}{A} z^{C-A} w^D \in M^{n-|A|+1}.$$

D'autre part, $D_A^{(z)} f_i$ appartient à $M^{n-|A|}$, et en considérant son image dans $M^{n-|A|}/M^{n-|A|+1}$ on obtient (5).

LEMME 4.2. — Soit $s_{i,0}$ l'image de s_i dans R_0 . On a

(i) $v_M(s_i) = q_i$, les $\text{in}_M(s_i)$ forment une suite régulière de $\text{gr}_M(R)$ et engendrent $\text{in}_M((s)R, R)$.

(ii) $v_{M_0}(s_{i,0}) = q_i$, les $\text{in}_{M_0}(s_{i,0})$ forment une suite régulière de $\text{gr}_{M_0}(R_0)$, ils engendrent $\text{in}_{M_0}((s)R_0, R_0)$ et on a

$$(1) \quad H_M(R/(s)R) = H_{M_0}^{(d)}(R_0/(s)R_0) = (1-T)^{-d-e} \prod_{1 \leq i \leq e} (1-T^{q_i}).$$

(iii) $\text{gr}_M(R/(s)R)$ est fini et plat sur $\text{gr}_N(S)$ de rang $\prod_{1 \leq i \leq e} q_i$.

Il suffit de recopier la démonstration de [7] (lemme 4.2).

PROPOSITION 4.3. — Soit une présentation notée comme en (3.1); soient $A = R/J$ et P un idéal premier de R , contenant J et tel que R/P soit régulier.

(i) Pour que $\text{gr}_P(A)$ soit plat sur R/P , il faut et il suffit que $f_i \in P^{n(i)}$ pour $i = 1, \dots, m$.

(ii) S'il en est ainsi, on a $s_i \in P^{q_i}$ pour $i = 1, \dots, e$, $\text{gr}_P(R/(s)R)$ est plat sur R/P , et le morphisme naturel $S/P \cap S \rightarrow R/P$ est un isomorphisme.

Si $f_i \in P^{n(i)}$, alors $\text{gr}_P(A)$ est plat sur R/P par le critère de platitude normale de HIRONAKA, car on a $v_M(f_i) = n(i)$ d'après (4.1 (i)).

La suite de la démonstration s'éloigne sensiblement de celle de [7], car nous n'avons pas d'équivalent du lemme 4.3.3 de [7]. En 4.3, supposant $\text{gr}_P(A)$ plat sur R/P , nous montrerons successivement que les $\mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/P \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}$ sont plats sur R^{\wedge}/P , que les $D_A^{(z)} f_i$ avec $|A| < n(i)$ appartiennent à P , et que les s_j appartiennent à P (mais non nécessairement à P^{q_j}). Nous pourrons en déduire l'isomorphisme $S/P \cap S \rightarrow R/P$ et modifier les z_i en des éléments z'_i de P . En 4.3.2, nous pourrons prouver les résultats annoncés dans la proposition.

LEMME 4.3.1 (a). — Si S, R, z_1, \dots, z_e, J vérifient les propriétés (a) et (b) de (3.1), si P est un idéal de R contenant J et tel que R/P soit régulier, alors, en posant $A = R/J$, si $\text{gr}_P(A)$ est plat sur R/P , $\mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/P \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}$ est plat sur R^{\wedge}/P pour tout entier n positif ou nul.

D'après le critère de platitude normale de HIRONAKA, il existe une base standard (h_1, \dots, h_r) de J , vérifiant

$$(1) \quad v_M(h_i) = v_P(h_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, r.$$

Notons $n_i = v_P(h_i)$. Par transversalité (b.1), les images $h_{i,0}$ des h_i dans R_0 forment une base standard de J_0 avec

$$(2) \quad v_{M_0}(h_{i,0}) = v_M(h_i) = n_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Considérons l'idéal H de R^{\wedge} engendré par les $D_A^{(z)} h_i$ avec $|A| < n_i$. Puisque $n_i = v_P(h_i)$, nous avons $H \subset PR^{\wedge}$, d'où

$$\mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/P \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n} = \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/H \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n} \otimes_{R^{\wedge}/H} R^{\wedge}/PR^{\wedge},$$

et le résultat découle du lemme ci-dessous.

LEMME 4.3.1 (b). — Soient S, R, z_1, \dots, z_e, J vérifiant les conditions (a) de (3.1) et tels que $A = R/J$ est plat sur S . Soient h_1, \dots, h_r des éléments de J . Posons $R_0 = R/N, J_0 = JR_0, h_{i,0} = \text{cl}(h_i)$ dans $R_0, n_i = v_{M_0}(h_{i,0})$

et $H_{i,0} = \text{in}_{M_0}(h_{i,0})$. Si les $H_{i,0}$ engendrent l'idéal $\text{in}_{M_0}(J_0, R_0)$ et si on note H l'idéal de \hat{R} engendré par les $D_A^{(z)} h_i$, où $0 \leq |A| < n_i$, alors $\hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n / H \hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n$ est plat sur \hat{R}/H .

La démonstration est inspirée de [6], prop. 2.2, qui est l'analogie en géométrie analytique.

Puisque $\hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n = \hat{\mathbf{P}}_{A^{\wedge}/S^{\wedge}}^n$, nous pouvons remplacer R et S par leurs complétés. Grâce à la platitude de A sur S les h_i engendrent l'idéal J . Nous avons $n_i \geq 1$ car sinon $J = R$, et il n'y a rien à démontrer, d'où $h_i = D_0^{(z)} h_i \in H$.

Soit L_1 défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_{R/S}^n \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n \rightarrow 0,$$

L_1 est engendré par les h_i et les $j_n(h_i)$, donc L , défini par

$$0 \rightarrow L \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_{R/S}^n / H \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n / H \rightarrow 0,$$

est l'idéal de $Q = \hat{\mathbf{P}}_{R/S}^n / H$ engendré par les $g_i = \text{cl}(j_n(h_i))$. Posons $B = R/H$, M son idéal maximal, et $\xi_i = \text{cl}(j_n(z_i) - z_i)$ dans Q . On a $Q = B[\xi]/(\xi)^{n+1}$. Pour montrer que $\hat{\mathbf{P}}_{A/S}^n / H = Q/L$ est plat sur B , il suffit de montrer

$$(1) \quad L \cap MQ \subset ML.$$

D'après la formule de Taylor : $j_n(h_i) = \sum_{|A| \leq n} D_A^{(z)} h_i (dz)^A$ et la définition de H , on a

$$g_i \in (\xi)^{n_i} \quad \text{et} \quad g_i = 0 \quad \text{si} \quad n_i > n.$$

Si f est un élément de $L \cap MQ$, nous pouvons écrire

$$(2) \quad f = \sum_{1 \leq i \leq r} c_i g_i, \quad \text{où} \quad c_i \in Q.$$

Soit $h = \inf \{v_{(\xi)}(c_i) + n_i\}$; si $h > n$, j'ai $f = 0$; donc, dans le cas général, pour montrer que f appartient à ML , il suffit (grâce à une récurrence finie) de savoir augmenter h , c'est-à-dire d'écrire

$$(3) \quad f = f' + \sum c'_i g_i, \quad \text{où} \quad f' \in ML, \quad c'_i \in (\xi)^{h-n_i+1},$$

et on peut supposer $h \leq n$.

Le lemme ci-dessous permet de conclure, car (4) y assure

$$\sum j_n(b_i) j_n(h_i) = 0,$$

d'où

$$f = \sum (c_i - b'_i) g_i,$$

qui s'écrit sous la forme de (3) grâce à (5).

LEMME. — Il existe b_1, \dots, b_r éléments de R , vérifiant

$$(4) \quad \sum b_i h_i = 0,$$

$$(5) \quad b'_i = c_i \text{ modulo } MQ + (\xi)^{h-n_i+1},$$

où $b'_i = \text{cl}(j_n(b_i))$ dans \mathcal{Q} .

Pour le prouver on se ramène à R_0 de la façon suivante soit

$$Q(x) = Q \otimes_B k = \mathbf{P}_{R/S}^n \otimes_R k;$$

l'extension résiduelle du morphisme $S \rightarrow R$ étant triviale, nous avons un isomorphisme

$$t: Q(x) \xrightarrow{\sim} R_0/M_0^{n+1},$$

tel que, pour tout b dans R , on a $t(b') = \text{cl}(b_0)$, où $b' = \text{cl}(j_n(b))$ dans \mathcal{Q} , et où b_0 est l'image de b dans R_0 .

Avec ces notations, (5) s'écrit sous la forme équivalente

$$(5') \quad \text{cl}(b_{i,0}) - t(c_i) \in M_0^{h-n_i+1}/M_0^{n+1}.$$

Le lemme se réduit au lemme suivant car, par platitude de R sur S , (6) se relève en (4) $\sum b_i h_i = 0$, avec $a_i = b_{i,0}$.

LEMME. — Il existe a_1, \dots, a_r éléments de R_0 , vérifiant

$$(6) \quad \sum a_i h_{i,0} = 0,$$

$$(7) \quad \text{cl}(a_i) - t(c_i) \in M_0^{h-n_i+1}/M_0^{n+1}.$$

Dans (2) $f = \sum c_i g_i$, la somme est en fait étendue aux indices i vérifiant $n_i \leq n$ (car sinon g_i est nul). Puisque f appartient à MQ , nous avons

$$(2') \quad \sum t(c_i) t(g_i) = 0 \quad \text{dans } R_0/M_0^{n+1}.$$

Or $t(g_i) = \text{cl}(h_{i,0})$ appartient à $M_0^{n_i}/M_0^{n+1}$, et $t(c_i)$ appartient à $M_0^{h-n_i}/M_0^{n+1}$ par définition de h , donc, si on pose $d_i = \text{cl}(t(c_i))$ dans $M_0^{h-n_i}/M_0^{h-n_i+1}$ ($d_i = 0$ si $h > n_i$ et en particulier si $n > n_i$), on a

$$(8) \quad \sum d_i \text{in}_{M_0}(h_{i,0}) = 0 \quad \text{dans } \text{gr}_{M_0}(R_0).$$

Regardons la suite exacte de modules filtrés sur R_0

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \xrightarrow{\Phi} R_0 \rightarrow R_0/J_0 \rightarrow 0,$$

où V est un R_0 -module libre de base e_1, \dots, e_r gradué en donnant à e_i le poids n_i , Φ est défini par $\Phi(e_i) = h_i$, et U est le module des relations muni de la filtration induite. Le morphisme Φ est strict car les $\text{in}_{M_0}(h_i, 0)$ engendrent $\text{in}_{M_0}(J_0, R_0)$, d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{gr } U \rightarrow \text{gr } V \xrightarrow{\text{gr } \Phi} \text{gr}_{M_0} R_0 \rightarrow \text{gr}_{M_0}(R_0/J_0) \rightarrow 0.$$

(8) signifie que l'élément homogène (d_1, \dots, d_r) de $\text{gr } V$ appartient au noyau de $\text{gr } \Phi$, donc est la forme initiale d'un élément (a_1, \dots, a_r) de U , qui vérifie (6) par définition de U et (7), car sa forme initiale (d_1, \dots, d_r) dans $\text{gr } V$ est aussi celle de $(t(c_1), \dots, t(c_r))$; ce qui achève la démonstration du lemme ci-dessus, et donc des lemmes 4.3.1 (a) et 4.3.1 (b).

4.3.1. (c). — Considérons l'isomorphisme (où n est un entier positif ou nul)

$$u_n: R^\wedge[\xi]/(\xi)^{n+1} \rightarrow \mathbf{P}_{R/S}^{\wedge n}, \quad \text{où } u_n(\xi_i) = j_n(z_i) - z_i,$$

et considérons le facteur direct

$$E(n) = \bigoplus R^\wedge \cdot \xi^A, \quad \text{où } A \in \mathbf{N}^e - E \quad \text{et} \quad |A| \leq n.$$

Soit v_n le morphisme induit par u_n :

$$v_n: E(n)/P \cdot E(n) \rightarrow \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/P \mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}.$$

Puisque $\mathbf{P}_{A/S}^{\wedge n}/M$ est isomorphe à A_0/M_0^{n+1} , et que E est l'exposant de J_0 par rapport aux variables $z'_{i,0}$ (3.2), v_n est un isomorphisme modulo M . Sa source et son but étant libres sur R/P (lemme 4.3.1 (a)), v_n est un isomorphisme. Fixons un i , et prenons $n = n(i) - 1$, grâce à (c.4) nous avons $j_{R/S}^n(f_i) \in E(n)$, son image par v_n est nulle puisque $f_i \in J$, d'où $j_{R/S}^n(f_i) \in P \cdot E(n)$, et par la formule de Taylor, nous avons

$$D_A^{(z)} f_i \in P \quad \text{pour tout } A \text{ dans } \mathbf{N}^e \quad \text{avec} \quad |A| < n(i).$$

Les polynômes P_j étant homogènes de degrés $q_j \geq 1$, les $s_j = P_j(D_A^{(z)} f_i)$ appartiennent à P .

Donc $\text{gr}_M(R/P)$ est un quotient de $\text{gr}_M(R/(s)R)$ et, par (4.2 iii), est fini sur $\text{gr}_N(S)$. Le morphisme

$$\text{gr}_N(S) \rightarrow \text{gr}_M(R/P),$$

morphisme homogène de degré zéro entre algèbres de polynômes, et fini, est nécessairement surjectif, ce qui assure que le morphisme $S \rightarrow R/P$ est surjectif, c'est-à-dire que

$$S/P \cap S \rightarrow R/P \text{ est un isomorphisme.}$$

Il existe donc des éléments a_1, \dots, a_e de S tels que les $z'_i = z_i + a_i$ appartiennent à P . Les hypothèses étant invariantes par le remplacement des z_i par les z'_i , nous supposons dans la suite que les z_i appartiennent à P .

4.3.2. Choisissons un système minimal de générateurs (x_1, \dots, x_r) de l'idéal $N \cap P$ de S , et (y_1, \dots, y_s) tels que $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ soit un système régulier de paramètres de S (ce qui est possible car $S/P \cap S = R/P$ est régulier). Nous avons donc un système régulier de paramètres de R , que nous noterons sous la forme simplifiée (z, x, y) , avec $P = (z, x).R$.

Soit \overline{M} l'idéal maximal de R/P , et considérons le morphisme

$$h : \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(R)) \rightarrow \text{gr}_M(R)$$

défini de la manière suivante : $\text{gr}_P(R)$ étant plat sur R/P , on a un isomorphisme naturel

$$u : \text{gr}_P(R)/\overline{M} \otimes_k \text{gr}_{\overline{M}}(R/P) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(R)),$$

soit

$$h_1 : \text{gr}_P(R)/\overline{M} \rightarrow \text{gr}_M(R)$$

le morphisme naturel et

$$h_2 : \text{gr}_{\overline{M}}(R/P) \rightarrow \text{gr}_M(R)$$

le morphisme d'algèbres de polynômes $h_2 : k[Y'] \rightarrow k[Z, X, Y]$, défini par $h(Y'_i) = Y_i$, où on pose

$$Y'_i = \text{in}_{\overline{M}}(\text{cl}(y_i)), \quad Z_i = \text{in}_M(z_i), \quad X_i = \text{in}_M(x_i), \quad \text{et} \quad Y_i = \text{in}_M(y_i),$$

et on considère

$$h = (h_1 \otimes h_2) \circ u^{-1}.$$

h n'est autre que le morphisme naturel (où $Z'_i = \text{in}_P(z_i)$ et $X'_i = \text{in}_P(x_i)$)

$$h : k[Z', X'][Y'] \rightarrow k[Z, X, Y],$$

et si nous considérons le morphisme

$$h' : \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(A)) \rightarrow \text{gr}_M(A), \quad h' = (h'_1 \otimes h_2) \circ u^{-1},$$

où u' est l'isomorphisme naturel (car $\text{gr}_P(A)$ est plat sur R/P)

$$u' : \text{gr}_P(A)/\overline{M} \otimes_k \text{gr}_{\overline{M}}(A/P) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(A)),$$

h'_1 est le morphisme naturel

$$h'_1 : \text{gr}_P(A)/\overline{M} \rightarrow \text{gr}_M(A),$$

et on remarque

$$A/P = R/P,$$

le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(R)) & \rightarrow & \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(A)) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ \text{in}_M(J, R) & \longrightarrow & \text{gr}_M(R) \longrightarrow \text{gr}_M(A) \end{array}$$

Pour tout i ($1 \leq i \leq m$), posons

$$G_i = \text{in}_{\overline{M}}(\text{in}_P(f_i)) \quad \text{dans } \text{gr}_{\overline{M}}(\text{gr}_P(R)),$$

d'après le diagramme ci-dessus, $h(G_i)$ appartient à $\text{in}_M(J, \mathbb{I}R)$; h_{\blacktriangleleft} étant l'isomorphisme naturel $h : k[Z', X', Y'] \rightarrow k[Z, X, Y]$, si nous posons

$$(A_0, B_0, C_0) = \exp(G_i; Z', X', Y')$$

nous avons, d'après le lemme 4.1 (4), $A_0 \in E$.

D'autre part, $D_{A_0}^{(Z')} G_i$ n'est pas nul. Montrons que ceci implique que $D_{A_0}^{(z)} f_i$ n'est pas nul.

Posons $g_i = \text{in}_P(f_i)$ dans $\text{gr}_P(R) = R/P[Z', X']$, et écrivons

$$g_i = \sum \alpha_{A,B} Z'^A X'^B \quad \text{avec } \alpha_{A,B} \in R/P, |A| + |B| = v_P f_i;$$

on a

$$G_i = \text{in}_{\overline{M}}(g_i) = \sum \text{cl}_r(\alpha_{A,B}) Z'^A X'^B, \quad \text{où } r = d^0 G_i - v_P f_i,$$

et cl_r est la projection $\text{cl}_r : \overline{M}^r \rightarrow \overline{M}^r / \overline{M}^{r+1}$.

Puisque $D_{A_0}^{(Z')} G_i$ n'est pas nul, nous avons

$$D_{A_0}^{(Z')} G_i = \sum \text{cl}_r(\alpha_{A,B}) \binom{A}{A_0} Z'^{A-A_0} X'^B = \text{in}_{\overline{M}}(D_{A_0}^{(Z')} g_i)$$

et par conséquent $D_{A_0}^{(z)} g_i$ n'est pas nul.

Puisque le morphisme $S \rightarrow R/P$ est surjectif, nous pouvons relever les $\alpha_{A,B}$ en des éléments $a_{A,B}$ de S , et nous avons

$$f_i - \sum a_{A,B} z^A x^B \in P^{n+1}, \quad \text{où } n = v_P(f_i).$$

$D_{A_0}^{(z)}$ étant une dérivation de R/S d'ordre $\leq |A_0|$, on a

$$D_{A_0}^{(z)} f_i \in P^{n-|A_0|},$$

et

$$D_{A_0}^{(z)} f_i - \sum a_{A,B} \binom{A}{A_0} z^{A-A_0} x^B \in P^{n-|A_0|+1}.$$

La classe dans $P^{n-|A_0|}/P^{n-|A_0|+1}$ de $D_{A_0}^{(z)} f_i$ est donc égale à $D_{A_0}^{(z')} g_i$, qui n'est pas nul. Nous en tirons que $D_{A_0}^{(z)} f_i$ n'est pas nul et, par (c.4) et $A_0 \in E$:

$$|A_0| \geq n(i).$$

Or, G_i est homogène par rapport aux variables (Z', X') (car g_i l'est), de degré $v_P(f_i)$; on a donc

$$v_P(f_i) = |A_0| + |B_0| \geq |A_0| \geq n(i).$$

Nous avons d'autre part (4.1) (i)

$$v_P(f_i) \leq v_M(f_i) = n(i),$$

d'où l'égalité

$$v_P(f_i) = n(i),$$

ce qui démontre le (i) de la proposition.

On en déduit $D_A^{(z)} f_i \in P^{n(i)-|A|}$ pour tout A et, par homogénéité des polynômes P_j , que les $s_j = P_j(D_A^{(z)} f_i)$ appartiennent à P^{q_j} . D'après (4.2) (i), on a donc

$$v_P(s_j) = v_M(s_j) = q_j,$$

et les $\text{in}_M(s_j)$ engendrent $\text{in}_M((s)R, R)$. Le critère de platitude normale, de HIRONAKA nous permet de conclure que $\text{gr}_P(R/(s)R)$ est plat sur R/P . D'où (ii), et la proposition 4.3 est entièrement démontrée.

5. Points proches d'une présentation

Nous renvoyons le lecteur à [7] paragraphe 5, dont les énoncés (essentiellement le théorème 5.2 et le corollaire 5.4) et les démonstrations

restent valables sans l'hypothèse que S contienne un corps, qui n'intervient dans [7] que par l'intermédiaire des résultats de l'étude locale (§ 4) que nous avons démontrés ci-dessus dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AROCA (J. M.), HIRONAKA (H.) and VICENTE (J. L.). — *Introduction to the theory of infinitely near points*. — Madrid, J. Garcia Morato, 1971 (*Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan*).
- [2] AROCA (J. M.), HIRONAKA (H.) and VICENTE (J. L.). — *The theory of maximal contact*. — Madrid, J. Garcia Morato, 1974 (*Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan*).
- [3] AROCA (J. M.), HIRONAKA (H.) and VICENTE (J. L.). — *Desingularization of complex analytic spaces*, à paraître dans les *Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan*.
- [4] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique* (cité EGA). — Paris, Presses universitaires de France (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*).
- [5] GIRAUD (J.). — *Étude locale des singularités*. — Orsay, Université de Paris-Sud, 1972 (*Publications mathématiques d'Orsay*).
- [6] GIRAUD (J.). — Sur la théorie du contact maximal, *Math. Z.*, t. 137, 1974, p. 285-310.
- [7] GIRAUD (J.). — Contact maximal en caractéristique positive, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Série 4, t. 8, 1975, p. 201-234.
- [8] HIRONAKA (H.). — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Math.*, Series 2, t. 79, 1964, p. 109-326.

(Texte reçu le 18 mars 1976.)

Jean SOUVILLE,
Mathématiques, Faculté des Sciences,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.