BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL EMSALEM

Approximation pondérée sur un corps de nombres *p*-adiques

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 409-416
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__409_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 409-416.

APPROXIMATION PONDÉRÉE SUR UN CORPS DE NOMBRES p-ADIQUES

PAR

MICHEL EMSALEM

[Université Paris-7]

RÉSUMÉ. — Ce texte traite du problème de l'approximation pondérée des fonctions continues par des polynômes sur un corps $\mathbf{K}$ de nombres p-adiques : si ω de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{*+}$ est la fonction poids et si $\mathscr{C}_\omega$ désigne l'espace des fonctions continues f de $\mathbf{K}$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ telles que $|f|_p = o(\omega)$ à l'infini, on veut caractériser l'adhérence de $\mathbf{C}_p[X]$ dans $\mathscr{C}_\omega$. Le théorème 1 établit une dichotomie suivant la croissance de ω; dans un cas, seules les restrictions à $\mathbf{K}$ de fonctions entières sur $\mathbf{C}_p$ appartiennent à $\overline{\mathbf{C}_p[X]}$; dans l'autre cas, toute fonction de $\mathscr{C}_\omega$ est limite d'une suite de polynômes.

Tout le long du texte, p désigne un nombre premier fixé, $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, $\mathbf{K}$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ plongée dans $\mathbf{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. La norme p-adique sur $\mathbf{K}$, notée $|\ |_p$, est normalisée par $|p|_p = 1/p$; $v_p(\ )$ désigne la valuation associée : pour $x \in \mathbf{K}$, $|x|_p = p^{-v_p(x)}$. On note e et f respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Si ω est une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ telle que, pour tout n, $\rho^n = o(\omega(\rho))$ à l'infini, on appelle $\mathscr{C}_\omega$ l'espace de toutes les fonctions continues de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{C}_p$, qui sont $o(\omega)$ à l'infini, muni de la norme $\|f\|_\omega$, définie par

$$\|f\|_\omega = \sup_{\rho \in |K|}(\sup_{x \in \mathbf{K},\, |x|_p = \rho}(|f(x)|_p)\omega^{-1}(\rho).$$

On cherchera à caractériser, pour un ω fixé, la sous-classe de $\mathscr{C}_\omega$, adhérence de $\mathbf{C}_p[X]$ pour la topologie induite sur $\mathscr{C}_\omega$ par la norme $\|\ \|_\omega$. On particularise le problème en prenant le poids $\omega_\alpha(\rho) = p^{\rho^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. On notera $\mathscr{C}_\alpha$ (resp. $\|\ \|_\alpha$) l'espace $\mathscr{C}_{\omega_\alpha}$ (resp. la norme $\|\ \|_{\omega_\alpha}$). La réponse à la question posée est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit η le degré de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{Q}_p$.

(i) *Si $\alpha < \eta$, l'adhérence de $\mathbf{C}_p[X]$ dans $\mathscr{C}_\alpha$ est constituée des restrictions à $\mathbf{K}$ de fonctions entières sur $\mathbf{C}_p$ qui sont, sur $\mathbf{C}_p$, $o(p^{C|x|_p^\alpha})$ à l'infini, où C est une constante qui ne dépend que de α.*

(ii) *Si $\alpha > \eta$, toute fonction de $\mathscr{C}_\alpha$ est limite dans $\mathscr{C}_\alpha$ d'une suite de polynômes.*

Remarque. — Le cas particulier $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_p$ donne un résultat analogue à celui concernant l'approximation pondérée sur $\mathbf{R}$: l'exposant limite est $\alpha = 1$.

Dans la première partie, on énonce des lemmes qui comparent les valeurs d'un polynôme sur $\mathbf{K}$ et sur $\mathbf{C}_p$; dans la deuxième partie, on s'occupe du cas $\alpha < \eta$, et dans la troisième partie, on traite le cas $\alpha > \eta$.

1. Comparaison des valeurs d'un polynôme sur K et sur $\mathbf{C}_p$

LEMME 1. — *Soit $P(x)$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbf{C}_p$ ayant tous ses zéros dans le disque unité de $\mathbf{C}_p$* et tel que

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant 1} |P(x)|_p = 1,$$

alors

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, |x|_p \leqslant 1} |P(x)|_p \geqslant p^{-n/(p^f-1)e}.$$

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite très bien répartie dans l'anneau A de valuation de $\mathbf{K}$; P s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-u_0) \ldots (x-u_{j-1}).$$

Les hypothèses sur P impliquent que, pour tout k, $|a_k|_p \leqslant 1$ et que $|a_n|_p = 1$; en particulier, $|b_n|_p = |a_n|_p = 1$. On a donc (d'après [1]) : $\sup_{x \in A} |P(x)|_p \geqslant \sup_{x \in A} |x-u_0|_p \ldots |x-u_{n-1}|_p = p^{-Z/e} \geqslant p^{-n/(p^f-1)e}$, avec $Z = \sum_{k \geqslant 1} [n/p^{fk}]/e$.

LEMME 2. — *Soit $P(x)$ un polynôme de degré n; alors, pour tout entier $k \geqslant 0$,*

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p \geqslant p^{-n/(p^f-1)e} \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant p^{k/e}} |P(x)|_p.$$

Il suffit de démontrer le lemme pour $k = 0$ (on fait le changement de variable $y = \pi^k x$, où π est un élément premier de $\mathbf{K}$). P de degré n, se décompose en un produit $P = P_1 P_2$, où P_1 a tous ses zéros dans le disque $|x|_p \leqslant 1$ de $\mathbf{C}_p$, et P_2 n'y a aucun zéro. Soit $x_0 \in \mathbf{K}$ tel que $|x_0|_p = 1$.

Pour $|x|_p \leqslant 1$, $|P_2(x)|_p$ est constant et vaut $|P_2(x_0)|_p$. On a donc

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, |x|_p \leqslant 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x \in \mathbf{K},\, |x|_p \leqslant 1} |P_1(x)|_p$$

et

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant 1} |P_1(x)|_p.$$

Le lemme 1, appliqué à P_1, donne le lemme 2.

2. Étude du cas $\alpha < \eta$

PROPOSITION 1. — *Pour tout $\alpha < \eta$, il existe une constante $C(\alpha)$ qui possède la propriété suivante : Si un polynôme $P \in \mathbf{C}_p[X]$ vérifie, pour tout $x \in \mathbf{K}$,*

$$|P(x)|_p \leqslant p^{|x|_p^\alpha},$$

alors, pour tout $x \in \mathbf{C}_p$,

$$|P(x)|_p \leqslant p^{C(\alpha)|x|_p^\eta}.$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. — *Si $\alpha < \eta$, l'adhérence de $\mathbf{C}_p[X]$ dans $\mathscr{C}_\alpha$ est constituée de restrictions à $\mathbf{K}$ de fonctions entières de $\mathbf{C}_p$ qui sont $o(p^{C(\alpha)|x|_p^\alpha})$ sur $\mathbf{C}_p$.*

Démontrons à présent la proposition 1. — Soit P le polynôme de la proposition; P s'écrit

$$P(x) = Q(x) P_1(x) P_2(x) \ldots P_k(x),$$

où Q n'a aucun zéro sur les cercles $|x|_p = p^{j/e}$ de $\mathbf{C}_p$ (j parcourt $\mathbf{N}$), où P_i de degré s_i a tous ses zéros sur le cercle $|x|_p = p^{(i-1)/e}$ de $\mathbf{C}_p$, et $P_i(0) = 1$. On noerta

$$B_i = \log_p \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p = p^{i/e}} |Q(x)|_p;$$

la suite B_i est évidemment croissante. On a les propriétés suivantes :

Pour $x \in \mathbf{K}$ et $|x|_p \leqslant p^{(i-2)i/e}$, $|P_i(x)|_p = 1$; grâce au lemme 1,

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, |x_p| = p^{(i-1)/e}} |P_i(x)|_p \geqslant p^{-s_i/(p^f-1)e},$$

et pour $x \in \mathbf{K}$, $|x|_p = p^{j/e}$, et $j \geqslant i$, $|P_i(x)|_p = p^{s_i(j-i+1)/e}$.

La relation $|P(x)|_p \leqslant p^{|x|_p}$, pour $x \in \mathbf{K}$, entraîne la suite d'inégalités (I_k) :

$$(I_k) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 &\geqslant B_0 - \frac{s_1}{(p^f-1)e}, \\ p^{\alpha/e} &\geqslant B_1 + \frac{s_1}{e} - \frac{s_2}{(p^f-1)e}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p^{(k-1)\alpha/e} &\geqslant B_{k-1} + (k-1)\frac{s_1}{e} + \ldots + \frac{s_{k-1}}{e} - \frac{s_k}{(p^f-1)e}, \\ p^{k\alpha/e} &\geqslant B_k + k\frac{s_1}{e} + \ldots + \frac{2s_{k-1}}{e} + \frac{s_k}{e}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous allons démontrer que les inégalités (I_k) entraînent les inégalités (II) :

$$(II)\quad \left\{\begin{array}{l} C \geqslant B_0, \\ C\,p^{\alpha/e} \geqslant B_1 + \dfrac{s_1}{e}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ C\,p^{(k-1)\alpha/e} \geqslant B_{k-1} + (k-1)\dfrac{s_1}{e} + \dots + \dfrac{s_{k-1}}{e}, \\ C\,p^{k\alpha/e} \geqslant B_k + k\dfrac{s_1}{e} + \dots + \dfrac{2\,s_{k-1}}{e} + \dfrac{s_k}{e}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Il est alors clair que ces dernières inégalités entraînent la conclusion de la proposition avec une constante $C(\alpha)$ supérieure à C.

Nous allons voir que si l'on prend $C \geqslant (p^f - 1)/(p^f - p^{\alpha/e}) > 1$, les inégalités (I_k) entraînent (II) (on utilise ici le fait que $\alpha < fe = \eta$).

Raisonnons par l'absurde, et supposons que, pour un indice $j_0 \leqslant k-1$,

$$B_{j_0} + j_0 \frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_{j_0}}{e} > C\,p^{j_0\alpha/e}.$$

On aura alors $s_{j_0+1} > e\,(p^f - 1)\;(C-1)\;p^{j_0\alpha/e}$; d'où

$$\begin{aligned} & B_{j_0+1} + (j_0+1)\frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_{j_0+1}}{e} \\ & \qquad \geqslant B_{j_0} + j_0 \frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_{j_0}}{e} + \frac{s_{j_0+1}}{e} > (C + (C-1)(p^f - 1))\,p^{j_0\alpha/e}, \end{aligned}$$

et cette dernière expression est supérieure à $C\,p^{(j_0+1)\alpha/e}$ du fait du choix de C. La récurrence se poursuit jusqu'à k, où l'on obtient

$$p^{k\alpha/e} \geqslant B_k + k\frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_k}{e} > C\,p^{k\alpha/e},$$

ce qui est impossible. On aura donc, pour tout j,

$$B_j + j\frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_j}{e} \leqslant C\,p^{j\alpha/e},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

3. **Étude du cas** $\alpha > n$.

Dans un premier temps, on essaie de situer l'endroit où $\sup_{x \in \mathbf{K}} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}$ est atteint pour un polynôme P. Voici en fait un résultat plus précis dont nous aurons besoin dans la démonstration de la deuxième partie du théorème 1.

PROPOSITION 2. — *Quel que soit* $\alpha > 0$, *il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout* $A > 0$ *et pour tout polynôme* P *de degré inférieur ou égal à* n, *on ait*

$$p^{-A^\alpha} \sup_{v_p(x) < -\log_p(Kn^{1/\alpha})} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}$$
$$\leqslant \sup_{-\log_p(Kn^{1/\alpha}) \leqslant v_p(x) \leqq -[e \log_p A]/e} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha},$$

les x *figurant en indice des signes* sup *variant dans* $\mathbf{K}$.

Le cas particulier $A = 0$ répond à la question posée plus haut.

THÉORÈME 2. — *Quel que soit* $\alpha > 0$ *il existe une constante* $K > 0$ *telle que la borne supérieure de* $| P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}$ *lorsque* x *parcourt* $\mathbf{K}$ *est atteinte sur le disque* $| x |_p \leqslant Kn^{1/\alpha}$ *pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

Pour démontrer la proposition 2, nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3. — *Pour tout* a *et* b, $a > b$, *et pour tout polynôme* P *de degré au plus* n,

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, b \leqslant v_p(x) \leqslant -[-ea]/e} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}$$
$$\geqslant p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, b \leqslant v_p(x) \leqslant a} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha} .$$

La démonstration de ce lemme, qui repose sur le lemme 2 et quelques inégalités simples, est laissée au lecteur.

LEMME 4. — *Pour tout* a *et* b, $a > b$, *et pour tout polynôme* $P \in \mathbf{C}_p [X]$,

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, b \leqslant v_p(x) \leqslant a} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}$$
$$\geqslant p^{-p^{-a\alpha}} \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, b \leqslant v_p(x)} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha}.$$

C'est une conséquence immédiate du principe du maximum. Venons-en maintenant à la démonstration de la proposition 2. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}_p$: $P(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$. Notons

$$||| P |||_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{C}_p} | P(x) |_p p^{-|x|_p^\alpha},$$

et soit $M_j = |||\, x^j \,|||_\alpha$; la valeur de M_j est donnée par

$$\log_p M_j = (\log(j/\alpha \log p) - 1)(j/\alpha \log p).$$

On a de plus

(1) $$|||\, P \,|||_\alpha = \sup_{0 \leqslant j \leqslant n} |\, b_j \,|_p M_j.$$

En effet, les inégalités ultramétriques donnent

$$|||\, P \,|||_\alpha \leqslant \sup_{0 \leqslant j \leqslant n} |\, b_j \,|_p M_j,$$

et les inégalités de Cauchy sur $\mathbf{C}_p$ donnent $\sup_{0 \leqslant j \leqslant n} |\, b_j \,|_p M_j \leqslant |||\, P \,|||_\alpha$. Soit K une constante que nous fixerons plus tard. Les lemmes 3 et 4 permettent d'écrire :

(2) $$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbf{K},\, -\log_p (Kn^{1/\alpha}) \leqslant v_p(x) \leqslant -[e \log_p A]/e} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha} \\ &\quad \geqslant p^{-(A^\alpha - np^f)/e(p^f-1)} \sup_{x \in \mathbf{C}p - \log_p (Kn^{1/\alpha}) \leqslant v_p(x)} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha} \end{aligned}$$

Nous allons déterminer K de façon que

(3) $$p^{-np^f/e(p^f-1)}\, |||\, P \,|||_\alpha > |\, b_j \,|_p\, |\, x^j \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha},$$
$$\text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad |\, x \,|_p > K n^{1/\alpha}.$$

On aura alors

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p > \mathbf{K}n^{1/\alpha}} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha} < p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha}$$

et donc

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant Kn^{1/\alpha}} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha} = |||\, P \,|||_\alpha;$$

il vient finalement

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p > Kn^{1/\alpha}} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha} \\ &\quad < p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p,\, |x|_p \leqslant Kn^{1/\alpha}} |\, P(x) \,|_p\, p^{-|x|_p^\alpha}, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité, alliée à (2), entraîne la proposition.

Détermination de K. — Prenons déjà $K > (1/\alpha \log p)^{1/\alpha}$ de façon que la fonction $\rho^j p^{-\rho^\alpha}$ soit décroissante sur l'intervalle $[Kn^{1/\alpha}, +\infty[$; on a alors sur cet intervalle

$$\begin{aligned} \log_p(|\, b_j \,|_p\, \rho^j p^{-\rho\alpha}) &\leqslant \log_p |\, b_j \,| + (j \log(K^\alpha n))/\alpha \log p) - K^\alpha n \\ &\leqslant \log_p(|\, b_j \,| M_j) \\ &\quad + (j/\alpha \log p)(\log(K^\alpha n) - \log(j/\alpha \log p) + 1) - n K^\alpha. \end{aligned}$$

et d'après (1),

$$| b_j |_p \rho^j p^{-\rho^\alpha} \leqslant ||| P |||_\alpha p^{-\varphi(j)},$$

où $\varphi(j) = -(j/\alpha \log p) \quad (\log \quad K^\alpha n - \log(j/\alpha \log p) + 1) + K^\alpha n.$

L'étude de φ montre que

$$\varphi(j) \geqslant \varphi(n) = n(K^\alpha - (1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^\alpha \log p) + 1)).$$

Il suffit pour réaliser (3) que $\varphi(n) > n p^f / e(p^f - 1)$, soit encore

$$K^\alpha - (1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^\alpha \log p) + 1) > p^f / e(p^f - 1),$$

ce qui est réalisé pour K assez grand.

Démonstration du (ii) *du théorème* 1. — Dans toute la suite, on suppose $\alpha > \eta$. Les fonctions localement constantes à support compact étant denses dans $\mathscr{C}_\alpha$, il suffit d'approcher les fonctions de ce type dans $\mathscr{C}_\alpha$ par des polynômes. Nous allons montrer plus généralement qu'une fonction lipschitzienne f à support compact est limite dans $\mathscr{C}_\alpha$ d'une suite de polynômes. L'idée de la méthode consiste à approcher f sur le compact $C_n = \{ x \in \mathbf{K}; | x |_p \leqslant K n^{1/\alpha} \}$ par son polynôme de meilleure approximation de degré n. Une homothétie envoie C_n dans l'anneau de valuation, et transforme f en une fonction dont la norme lipschitzienne est inférieure ou égale à $C n^{1/\alpha}$, où C est une constante ne dépendant que de f (en gros, sa norme lipschitzienne); à cette fonction on applique [2], et l'on trouve finalement un polynôme P_n de degré n tel que $| f - P_n | = o(1)$ sur C_n (ici intervient le fait que α est strictement supérieur à η). Soit $A > 0$ tel que le support de f soit contenu dans $\{ x \in \mathbf{K}; | x |_p < A \}$. Nous savons que

$$\sup_{x \in \mathbf{K},\, A \leqslant | x |_p \leqslant K n^{1/\alpha}} | f(x) - P_n(x) | = \sup_{x \in \mathbf{K},\, A \leqslant | x |_p \leqslant \mathbf{K} n^{1/\alpha}} P_n(x) \to 0$$

lorsque n tend vers $+\infty$. La proposition 2 nous dit alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbf{K},\, | x |_p > K n^{1/\alpha}} | P_n(x) | p^{-| x |_p^\alpha} = 0,$$

on conclut alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbf{K}} | f(x) - P_n(x) | p^{-| x |_p^\alpha} = 0,$$

et le (ii) du théorème 1 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amice (Y.). — Interpolation p-adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 117-180 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1964).

[2 Helsmoortel (E.). — Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 546-548.

(Texte reçu le 31 juillet 1975.)

Michel Ensalem,
Mathématiques,
Tour 55,
Université de Paris-7,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.