BULLETIN DE LA S. M. F.

ROGER MARLIN

Anneaux de Grothendieck des variétés de drapeaux

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 337-348
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__337_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 337-348.

ANNEAUX DE GROTHENDIECK DES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

PAR

Roger MARLIN

[Université Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — La construction des « variétés de Bott-Samelson » utilisée dans la « désingularisation des variétés de Schubert généralisées » par M. Demazure, permet de calculer de manière purement algébrique l'anneau de Grothendieck d'un groupe algébrique semi-simple déployé sur un corps algébriquement clos et un certain nombre de résultats sur les variétés de drapeaux associées à un tel groupe. Certains de ces résultats étaient déjà connus, ils avaient été obtenus par voie topologique par Hodgkin et Grothendieck. D'autres, ceux relatifs au quotient du groupe par un parabolique, sont originaux.

Soient $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos, G un $\mathbf{k}$-groupe algébrique semi-simple simplement connexe (déployé), B un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal de B (donc de G), H un sous-groupe parabolique de G contenant B, L l'unique sous-groupe de Levi de H contenant T, $K(G/B)$ (resp. $K(G/T)$, $K(G/H)$, $K(G/L)$, $K(G)$) l'anneau de Grothendieck de la variété G/B (resp. G/T, ...), $W = \mathrm{Norm}_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G par rapport à T, $R(B)$ (resp. $R(T)$, ...) l'algèbre des représentations de B (resp. T, ...), g la projection de G/B sur G/H.

Pour tout $\mathbf{k}$-schéma algébrique X, où G opère, soit $K_G(X)$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie abélienne des G-modules cohérents sur X (la structure d'anneau se déduisant du produit tensoriel).

$K(G/T)$ (resp. $K(G/L)$) s'identifiant naturellement à $K(G/B)$ (resp. $K(G/H)$), W (resp. $\mathrm{Norm}_G(L)/L$ opère sur ce dernier.

THÉORÈME. — *L'homomorphisme caractéristique de $R(B)$ (resp. $R(H)$) dans $K(G/B)$ (resp. $K(G/H)$) est surjectif.*

Le foncteur « d'oubli » induit une surjection de $K_G(G/B)$ sur $K(G/B)$ et de $K_G(G/H)$ sur $K(G/H)$.

$K(G/B)$ est engendré par les classes des modules inversibles.

$K(G/H)$ s'identifie par g^* au sous-anneau des invariants de $K(G/B) = K(G/T)$ sous l'action du sous-groupe de Weyl associé à H (i. e. $\mathrm{Norm}_H(T)/T$).

$K(G)$ est réduit à $\mathbf{Z}$.

Ces résultats seront obtenus par un calcul purement algébrique utilisant le système de racines associé à G.

Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, auquel cas on peut remplacer $K(G/B)$ par l'anneau de Grothendieck de la variété différentielle $G(\mathbf{C})/B(\mathbf{C})$, une démonstration du troisième point se trouve dans la thèse de L. HODGKIN [6]. Dans [4], GROTHENDIECK indique comment on peut généraliser le résultat de Hodgkin au cas d'un corps algébriquement clos quelconque.

Le cinquième point résulte du troisième par une remarque de GROTHENDIECK [4].

Si M est un $\mathbf{Z}$-module, $(a_w)_{w \in W}$ et $(b_w)_{w \in W}$ deux familles d'éléments de M indexées par W, on dira que la première est triangulaire stricte par rapport à la seconde si, pour tout w dans W, on a

$$a_w = b_w + \sum\nolimits_{w' \in W,\, l(w') < l(w)} n_{w'}\, b_{w'},$$

$l(w)$ désignant la longueur de w par rapport à une base $\mathscr{B}$ du système de racines correspondant.

Si X est une variété, on notera $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural.

1. **Invariants exponentiels** ([1], VI, 3)

Soient R un système de racines, C une chambre de R dans $P \otimes \mathbf{Q}$, $\mathscr{B}$ la base correspondante de R, P le réseau des poids de R, $\mathbf{Z}[P]$ l'algèbre de P, W le groupe de Weyl du système.

Soit P^+ l'ensemble des poids combinaisons linéaires à coefficients positifs des racines simples. On peut alors munir P d'une structure d'ordre partiel telle que $p \geqslant p'$ si, et seulement si, $p - p'$ appartient à P^+.

DÉFINITION. — *Soit* $x = \sum_{p \in P} x_p\, e^p$ *un élément de* $\mathbf{Z}[P]$. *On appelle support de* x *l'ensemble* S *des* $p \in P$ *tels que* $x_p \neq 0$, *et support maximal de* x *l'ensemble* X *des éléments maximaux de* S. *On dit encore que le terme* $x_p\, e^p$ *pour* $p \in X$ *est un terme maximal de* x.

LEMME 1. — *Soit* $x \in \mathbf{Z}[P]$, *et soit* $(x_p\, e^p)_{p \in X}$ *la famille des termes maximaux de* x. *Soit* $q \in P$, *et soit* $y \in \mathbf{Z}[P]$ *tels que* e^q *soit l'unique terme maximal de* y. *Alors, la famille des termes maximaux du produit* xy *est* $(x_p\, e^{p+q})_{p \in X}$.

Démonstration. — *Voir* [1] (chap. VI, n° 3.2).

Soit $\overline{C} \cap P$ l'ensemble des poids combinaisons linéaires à coefficients positifs des poids fondamentaux.

LEMME 2. — *Soit* $x = \sum_{p \in P} x_p e^p$ *un élément de* $\mathbf{Z}[P]$ *invariant par* W. *Alors,*

$$x = \sum_{p \in \overline{C} \cap P} x_p S(e^p),$$

où $S(e^p) = \sum_{q \in W.p} e^q$.

Démonstration. — Ceci vient du fait que toute orbite de W dans P a un unique élément dans $\overline{C} \cap P$ (*cf.* [1], chap. VI, n° 1).

PROPOSITION 1. — *Pour tout entier* k, d^k *a pour unique terme maximal* $e^{k\rho}$, *où* ρ *désigne la demi-somme des racines positives, et* $d = \sum_{w \in W} \det(w).e^{w(\rho)}$.

Démonstration. — L'unique terme maximal de d est e^ρ puisque $d = \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)}$ et que, pour $w \neq 1$, on a $w(\rho) < \rho$. Le lemme 1 permet de conclure.

2. Homomorphisme caractéristique

Soit A un sous-groupe de G, notons $\mathscr{R}(A)$ la catégorie abélienne des représentations linéaires de dimension finie de A, $R(A)$ le groupe de Grothendieck de $\mathscr{R}(A)$.

Soit H un sous-groupe parabolique de G. Notons $\mathscr{K}(G/H)$ (resp. $\mathscr{K}_G(G/H)$) la catégorie abélienne des modules cohérents sur G/H (resp. des G-modules cohérents sur G/H), $K(G/H)$ (resp. $K_G(G/H)$) le groupe de Grothendieck de $\mathscr{K}(G/H)$ (resp. $\mathscr{K}_G(G/H)$). Considérons les deux foncteurs additifs

$$\Phi : \quad \mathscr{R}(H) \to \mathscr{K}_G(G/H),$$
$$\Psi : \quad \mathscr{K}_G(G/H) \to \mathscr{K}(G/H)$$

définis comme suit : à la représentation $\rho : H \to \mathbf{GL}(V)$, Φ fait correspondre le fibré associé $G \times^H V$ qui est un $\mathscr{O}_{G/H}$-module localement libre (car la fibration $G \to G/H$ est localement triviale); Ψ est le foncteur d'oubli de l'opération de G. Ces foncteurs induisent des morphismes φ et ψ entre les groupes de Grothendieck associés. En outre, si l'on munit $R(H)$, $K_G(G/H)$ et $K(G/H)$ de leurs structures d'anneaux déduites du produit tensoriel, φ et ψ sont des morphismes d'anneaux. Le morphisme caractéristique c_K est le composé de φ et de ψ.

Si P désigne le groupe des caractères de T, $(e^p \mapsto p)$ permet d'identifier $\mathbf{Z}[P]$ à $R(T)$, lui-même canoniquement isomorphe à $R(B)$. Dans le cas d'un Borel, l'homomorphisme caractéristique sera donc $c_K : \mathbf{Z}[P] \to R(B) \to K(G/B)$.

Soient $p \in P$, $\mathscr{L}(p)$ le module inversible associé à p par Φ, $w \in W$, X_w l'adhérence de la cellule de Bruhat $B w B/B$. Dans [2], M. DEMAZURE établit l'existence d'une base $(a_w)_{w \in W}$ du $\mathbf{Z}$-module $K(G/B)$, telle que

$$c_K(e^p) = \sum_{w \in W} \chi(X_w, \mathscr{L}(p))\, a_w,$$

où $\chi(.,.)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré. De plus, il définit des opérateurs L_w, $w \in W$, de $\mathbf{Z}[P]$ jouissant des propriétés suivantes :

$$L_w L_{w'} = L_{ww'} \quad \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w'),$$
$$L_s L_s = L_s \quad \text{si} \quad l(s) = 1,$$
$$L_{s_\alpha}(e^p) = \frac{e^p - e^{s_\alpha(p)}}{1 - e^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathscr{B}.$$

Si ε désigne l'augmentation canonique de $\mathbf{Z}[P]$, alors

$$\chi(X_w, \mathscr{L}(p)) = \varepsilon L_w(e^{p-\rho}).$$

3. Comparaison entre W et le monoïde des L_w

LEMME 3. — *Pour tout $w \in W$, on a*

$$\prod_{\alpha \in R_+,\, w(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha)^{-1} . L_w = \det(w)\, w + \sum_{w' \prec w} a(w')\, w',$$

où $a(w')$ appartient au corps des fractions de $\mathbf{Z}[P]$.

Démonstration. — Soit $w \in W$, et $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}$ une expression réduite de w. On a alors

$$\begin{aligned} L_w &= L_{s_{\alpha_1}} L_{s_{\alpha_2}} \ldots L_{s_{\alpha_k}} \\ &= (1 - e^{\alpha_1})^{-1}(1 - s_{\alpha_1})(1 - e^{\alpha_2})^{-1}(1 - s_{\alpha_2}) \ldots (1 - e^{\alpha_k})^{-1}(1 - s_{\alpha_k}) \\ &= (-1)^k (1 - e^{\alpha_1})^{-1} s_{\alpha_1} (1 - e^{\alpha_2})^{-1} s_{\alpha_2} \ldots (1 - e^{\alpha_k})^{-1} s_{\alpha_k} + \sum b(w')\, w', \end{aligned}$$

où w' parcourt les produits de sous-expressions de $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}$, donc les éléments $\prec w$, et $b(w')$ appartient au corps des fractions de $\mathbf{Z}[P]$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} &(1 - e^{\alpha_1})^{-1} s_{\alpha_1} (1 - e^{\alpha_2})^{-1} s_{\alpha_2} \ldots (1 - e^{\alpha_k})^{-1} s_{\alpha_k} \\ &\quad = (1 - e^{\alpha_1})^{-1} (1 - e^{s_{\alpha_1}(\alpha_2)})^{-1} \ldots (1 - e^{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k)})^{-1} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k} \\ &\quad = \prod_{\alpha \in R_+,\, w(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha)^{-1}\, w, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de [1] (p. 158, cor. 2). D'où le lemme.

LEMME 4. — *Soient* $(p_w)_{w \in W}$ *une famille d'éléments de* P, M *la matrice carrée* $(\alpha_w^{w'})_{(w, w') \in W^2}$, *avec* $\alpha_w^{w'} = L_{w'}(e^{p_w})$, N *la matrice carrée* $(\beta_w^{w'})_{(w, w') \in W^2}$, *avec* $\beta_w^{w'} = w'(e^{p_w})$,

$$d = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{(1/2)\alpha} - e^{-(1/2)\alpha}) = \sum_{w \in W} (\det w)\, w(e^\rho).$$

On a alors

$$\det M = \pm \frac{1}{(d.e^\rho)^{(1/2)c}} \det N,$$

où c *désigne le cardinal* (*toujours pair*) *de* W.

Démonstration. — Si C est la matrice carrée $(\gamma_w^{w'})_{(w, w') \in W^2}$, avec

$$\gamma_w^{w'} = \frac{\det(w')}{\prod_{\alpha \in R^+,\, w'(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha)} \beta_w^{w'},$$

le lemme 3 montre l'existence d'une matrice triangulaire stricte D, telle que $M = C.D$. D'où,

$$\det M = \det C = \pm \prod_{w \in W} \prod_{\alpha \in R^+,\, w(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha)^{-1} . \det N.$$

Soit w_0 l'élément de longueur maximale de W. On a alors, pour tout $w \in W$,

$$\prod_{\alpha \in R^+,\, w(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha) . \prod_{\alpha \in R^+,\, w_0 w(\alpha) < 0} (1 - e^\alpha) = \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^\alpha) = -e^\rho d.$$

D'où le lemme.

4. **Calcul de** det (N)

Dans toute la suite, nous poserons $p_w = w\,(\sum_{\alpha \in \mathscr{B},\, w(\alpha) < 0} \omega_\alpha)$. Cette famille a déjà été utilisée par STEINBERG pour démontrer que $\mathbf{Z}[P]$ est un $\mathbf{Z}[P]^W$-module libre [9]. Le symbole ω_α désigne le poids fondamental associé à $\alpha \in \mathscr{B}$ dans P.

PROPOSITION 2. — *L'unique terme maximal de* $\det(N)$ *est* $e^{(1/2)c\rho}$.

Démonstration. — Dans $\mathbf{Z}[P]$, on a $\det(N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon(\sigma) . \prod_{w \in W} \beta_w^{\sigma(w)}$, où $\mathfrak{S}$ désigne le groupe des permutations de W.

Soit σ dans $\mathfrak{S}$ fixé, on a alors

$$\prod_{w \in W} \beta_w^{\sigma(w)} = \prod_{w \in W} \sigma(w)(e^{p_w}) = \prod_{w \in W} e^{q_{w, \sigma}} = e^{q_\sigma},$$

où

$$q_{w, \sigma} = \sigma(w)(p_w) = \sigma(w)\, w(\sum_{\alpha \in \mathscr{B},\, w(\alpha) < 0} \omega_\alpha),$$

et

$$q_\sigma = \sum_{w \in W} q_{w, \sigma} = \sum_{w \in W} \sum_{\alpha \in \mathscr{B},\, w(\alpha) < 0} \sigma(w)(\omega_\alpha).$$

Donc $\det(N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon(\sigma)\, e^{q_\sigma}$.

Pour tout $\tilde{w} \in W$ et pour tout $\alpha \in \mathscr{B}$, on a $\tilde{w}(\omega_\alpha) \leqslant \omega_\alpha$. Or

$$q_\sigma = \sum_{\alpha \in \mathscr{B}} \sum_{w \in W,\, w(\alpha) < 0} (\sigma(w)\, w)(\omega_\alpha),$$

et donc $q_p \leqslant \sum_{\alpha \in \mathscr{B}} n_\alpha\, \omega_\alpha$, où n_α désigne le cardinal de $\{ w \in W ;\, w(\alpha) < 0 \}$. L'application $\{ w \mapsto w_0\, w \}$ étant une bijection de cet ensemble et de son complémentaire, $n_\alpha = (1/2)\, c$ pour tout α.

On a donc, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, $q_\sigma \leqslant (1/2)\, c\, \rho$. On a égalité pour $\sigma_0 = \{ w \mapsto w^{-1} \}$, reste à montrer qu'on n'a égalité que dans ce cas. Supposons que l'égalité ait lieu pour σ.

Pour tout $w \in W$ et pour tout $\alpha \in \mathscr{B}$, on a alors

$$w(\alpha) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(w)\, w(\omega_\alpha) = \omega_\alpha.$$

Mais

$$w(\alpha) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad l(ws_\alpha) = l(w) - 1,$$

et

$$\sigma(w)\, w(\omega_\alpha) = \omega_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad l(\sigma(w)\, ws_\alpha) = l(\sigma(w)\, w) + 1.$$

Or, il existe w_1, w_2, w_3 tels que

$$\sigma(w) = w_1\, w_2^{-1}, \qquad w = w_2\, w_3,$$
$$l(\sigma(w)) = l(w_1) + l(w_2), \qquad l(w) = l(w_2) + l(w_3),$$
$$l(w_1\, w_3) = l(w_1) + l(w_3).$$

Si $w_3 \neq 1$, il existe $\alpha \in \mathscr{B}$ tel que $l(w_3\, s_\alpha) = l(w_3) - 1$, et donc $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$ et $l(\sigma(w)\, ws_\alpha) = l(\sigma(w)\, w) - 1$. Il y a contradiction, donc, pour tout $w \in W$, $l(\sigma(w)\, w) = l(\sigma(w)) - l(w)$. En particulier, $l(\sigma(w)) \geqslant l(w)$. En fait, on a égalité, car σ est une permutation. Alors $l(\sigma(w)\, w) = 0$, d'où $\sigma(w) = w^{-1}$, et la proposition est démontrée.

5. Calcul de det (M)

PROPOSITION 3. – *Dans* $\mathbf{Z}[P]$, *on a* $\det(M) = \pm\, e^{-(1/2)\, c\rho}$.

Démonstration. – D'après le lemme 4,

$$e^{(1/2)c\rho} . \det(M) = \frac{\det(N)}{d^{(1/2)c}} = Q \in \mathbf{Z}[p].$$

Soit $x_p\, e^p$ un terme maximal de Q; d'après la proposition 1 et le lemme 1, $x_p\, e^{p + (1/2)c\rho}$ est un terme maximal de $\det(N)$, donc, d'après la proposition 2, $x_p = 1$ et $p = 0$. D'autre part, $s_\alpha(N)$ se déduit de N par $(1/2)\, c$ permutations de colonnes, d'où $s_\alpha(\det(N)) = (-1)^{(1/2)c} \det(N)$. Si $(1/2)\, c$

est pair, $\det(N)$ est invariant sous l'action de W, anti-invariant sinon. Il en va de même pour $d^{(1/2)c}$. Dans tout les cas Q est donc un invariant ayant pour unique terme maximal 1. Donc $Q = 1$, d'où la proposition.

6. L'anneau de Grothendieck de G et de G/B

PROPOSITION 4. — *L'homomorphisme caractéristique de $R(B)$ dans $K(G/B)$ est surjectif.*

COROLLAIRE 1. — *Les classes des faisceaux inversibles engendrent $K(G/B)$.*

COROLLAIRE 2. — *Le foncteur « d'oubli » induit une surjection de $K_G(G/B)$ sur $K(G/B)$.*

COROLLAIRE 3. — *L'anneau $K(G)$ est réduit à* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. — Supposons la proposition démontrée. Le corollaire 1 est immédiat, $c_K(e^p)$ étant un faisceau inversible pour tout p dans P. Le corollaire 2 résulte du fait que l'homomorphisme φ du paragraphe 2 est un isomorphisme (*cf.* [3]). Le corollaire 3 s'obtient, quant à lui, en remarquant que si π est l'homomorphisme de projection de G sur G/B, π^* est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par les classes des faisceaux inversibles (*cf.* [4]).

Démontrons maintenant la proposition. La matrice qui exprime la famille

$$\{c_K(e^{\rho+p_w})\}_{w\in W} \qquad (\text{où } p_w = \textstyle\sum_{\alpha\in\mathscr{B},\, w(\alpha)<0} w(\omega_\alpha))$$

dans la base a_w est $\varepsilon(M)$ (matrice où l'on a remplacé chaque élément de M par son augmentation) (*cf.* § 2). Or

$$\det(\varepsilon(M)) = \varepsilon(\det(M)) = \pm\,\varepsilon(e^{-(1/2)c\rho}) = \pm\,1.$$

Cette famille est donc une base de $K(G/B)$. L'homomorphisme c_K est surjectif, d'où la proposition.

Remarque. — Un raisonnement analogue permet de montrer que le $\mathbf{Z}[P]^W$-module $\mathbf{Z}[P]$ est libre de dimension c. D'autre part ceci montre que le noyau de c_K est l'idéal engendré par les éléments de $\mathbf{Z}[P]^W$ d'augmentation nulle, ce qui était clair par ailleurs.

7. Une nouvelle base pour $K(G/B)$

LEMME 5. — *Pour tout u dans $\mathbf{Z}[P]$ et tout w dans W, on a*

$$L_w(u.e^{-\rho}) = e^{\alpha_w-\rho}L_w(u)+\textstyle\sum_{w'<w}u_{w'}L_{w'}(u),$$

où $u_{w'}\in\mathbf{Z}[P]$ *et* $\alpha_w = \sum_{\beta\in R^+,\, l(s_\beta w)=l(w)-1}\beta$.

Démonstration. — Pour α simple, on a tout d'abord :

$$L_{s_\alpha}(uv) = L_{s_\alpha}(u).v+u.L_{s_\alpha}(v)-(1-e^\alpha)L_{s_\alpha}(u)L_{s_\alpha}(v).$$

L'élément $e^{-\rho}$ étant invariant par les opérateurs L_w,

$$L_{s_\alpha}(u.e^{-\rho}) = e^{\alpha-\rho}L_{s_\alpha}(u)+e^{-\rho}u.$$

Supposons la formule proposée vraie pour $l(w) = k$. Soit $w = s_\alpha w'$, avec $l(w) = l(w')+1 = k$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} L_w(u.e^{-\rho}) &= L_{s_\alpha}\left[e^{\alpha_{w'}-\rho}L_{w'}(u)+\textstyle\sum_{w''<w'}u_{w''}L_{w''}(u)\right] \\ &= L_{s_\alpha}\left[e^{\alpha_{w'}-\rho}L_{w'}(u)\right]+\textstyle\sum_{\hat{w}<w}u'_{\hat{w}}L_{\hat{w}}(u) \\ &= L_{s_\alpha}(e^{\alpha_{w'}-\rho})L_{w'}(u)+e^{\alpha_{w'}-\rho}L_w(u) \\ &\quad -(1-e^\alpha)L_{s_\alpha}(e^{\alpha_{w'}-\rho})L_w(u)+\textstyle\sum_{\hat{w}<w}u'_{\hat{w}}L_{\hat{w}}(u) \\ &= \left[e^{\alpha_{w'}-\rho}-(1-e^\alpha)\dfrac{e^{\alpha_{w'}-\rho}-e^{s_\alpha(\alpha_{w'})-\rho+\alpha}}{1-e^\alpha}\right]L_w(u)+\textstyle\sum_{\hat{w}<w}u''_{\hat{w}}L_{\hat{w}}(u), \end{aligned}$$

soit enfin

$$L_w(u.e^{-\rho}) = e^{s_\alpha(\alpha_{w'})+\alpha-\rho}L_w(u)+\textstyle\sum_{\hat{w}<w}u''_{\hat{w}}L_{\hat{w}}(u).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $s_\alpha(\alpha_{w'})+\alpha = \alpha_w$. En effet, si $w = s_\alpha s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_{k-1}}$ est une décomposition réduite de w,

$$\alpha_w = \alpha+\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}s_\alpha s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i) = \alpha+s_\alpha(\alpha_1+\sum_{i=2}^{k-1}s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)).$$

D'où le lemme, par récurrence.

PROPOSITION 5. — *Dans* $\mathbf{Z}[P]$ *il existe un élément* u_0 *tel que* $c_K(u_0 e^\rho) = cl[\mathcal{O}_{\text{pt}}]$, *c'est-à-dire tel que* $\varepsilon L_w(u_0) = \delta_{w,w_0}$ $w \in W$ ($\mathcal{O}_{\text{pt}}$ *désignant le faisceau structural d'un sous-espace réduit à un point*).

De plus, la famille $\{c_K(L_{w^{-1}w_0}(u_0))\}_{w\in W}$ *est une base de* $K(G/B)$, *triangulaire stricte par rapport à la base* $\{a_w\}_{w\in W}$.

Démonstration. — Dans $K(G/B)$, $cl[\mathcal{O}_{\text{pt}}]$ n'est autre que a_{w_0}. L'homomorphisme c_K étant surjectif, il existe v_0 tel que $c_K(v_0) = a_{w_0}$, donc tel que $\varepsilon L_w(v_0 e^{-\rho}) = \delta_{w,w_0}$. L'élément $u_0 = v_0 e^{-\rho}$ est donc celui recherché.

La matrice exprimant la famille considérée dans la base $\{a_w\}_{w\in W}$ a pour élément général $\alpha_w^{w'} = L_{w'}(L_{w^{-1}w_0}(u_0).e^{-\rho})$. D'après le lemme 5,

$$\begin{aligned} \alpha_w^{w'} &= \varepsilon\left[e^{\alpha_{w'}-\rho}L_{w'}L_{w^{-1}w_0}(u_0)+\textstyle\sum_{w''<w'}u_{w''}L_{w''}L_{w^{-1}w_0}(u_0)\right] \\ &= \varepsilon\left[L_{w'}L_{w^{-1}w_0}(u_0)\right]+\textstyle\sum_{w''<w'}\varepsilon(u_{w''})\varepsilon L_{w''}L_{w^{-1}w_0}(u_0). \end{aligned}$$

D'après [2] (5.6), pour chaque couple (w', w), il existe un unique $\bar{w}$ tel que

$$L_{w'} L_{w^{-1} w_0} = L_{\bar{w}}, \qquad \text{ou} \quad l(\bar{w}) \leqslant l(w') + l(w^{-1} w_0),$$

l'égalité n'étant réalisée que si $l(w' w^{-1} w_0) = l(w') + l(w^{-1} w_0)$. En particulier, si $l(w') = l(w)$, $\bar{w} = w_0$ si, et seulement si, $w' = w$. Donc

$$\text{pour} \quad l(w') \leqslant l(w), \qquad \varepsilon L_{w'} L_{w^{-1} w_0}(u_0) = \delta_{\omega, w'}.$$

D'où le résultat escompté.

Remarque. — L'énoncé analogue pour la famille $\{ c_K (L_{w^{-1} w_0}(u_0) . e^{\rho}) \}_{w \in W}$ aurait été plus simple à démontrer (le lemme aurait été inutile). Malheureusement cette base n'aurait pas convenu à l'étude de $K(G/H)$.

8. L'anneau de Grothendieck de G/H

NOTATIONS. — Soient H un sous-groupe parabolique de G contenant B, W' le sous-groupe de W associé à H (i. e. Normo $(T)/T$), $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ la sous-algèbre des invariants de $\mathbf{Z}[P]$ sous W', g l'application canonique de G/B sur G/H, $K(G/B)^{W'}$ le sous-anneau des invariants de $K(G/B)$ sous W' (l'action de W sur $K(G/B)$ venant de l'isomorphisme canonique entre ce dernier et $K(G/T)$).

L'action de W commutant à c_K, l'image par ce dernier de $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ est contenue dans $K(G/B)^{W'}$. Chaque classe à droite de W modulo W' possède un unique élément de longueur minimale, c'est aussi (pour $\prec$) l'élément minimal de la classe (*cf.* [7], § 2, lemme 1). Soit V l'ensemble de ces représentants.

DÉFINITION. — *Pour tout v dans V, posons* $\hat{a}_v = \sum_{w' \in W'} a_{vw'}$.

LEMME 6. — *La famille $\{ \hat{a}_v \}_{v \in V}$ est libre, et le sous-module K_1 qu'elle engendre est facteur direct.*

Démonstration. — Rappelons que ([7], § 2) pour tout $(w', v) \in W' \times V$, $l(vw') = l(v) + l(w')$. La famille $\{ \hat{a}_v \}_{v \in V} \cup \{ a_w \}_{w \notin V}$ est une base puisqu'elle est triangulaire stricte par rapport à la base $\{ a_w \}_{w \in W}$. D'où le lemme.

LEMME 7. — *L'image par c_K de $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ est K_1.*

Démonstration. — Soient u dans $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ et α dans $\mathscr{B}'$ (intersection de $\mathscr{B}$ et du système de racines associé à H ou à son sous-groupe de Levi contenant T). On a

$$L_{s_\alpha}(u . e^{-\rho}) = \frac{u . e^{-\rho} - u . e^{-\rho+\alpha}}{1 - e^{\alpha}} = u . e^{-\rho}.$$

Donc, pour tout (w', v) dans $W' \times V$

$$L_{vw'}(u.e^{-\rho}) = L_v L_{w'}(u.e^{-\rho}) = L_v(u.e^{-\rho}).$$

Donc

$$c_K(u) = \sum_{v \in V} L_v(u.e^{-\rho}).\hat{a}_v \qquad \text{et} \qquad c_K(\mathbf{Z}[P]^{W'}) \subset K_1.$$

Soit, pour tout v dans V, $u_v = \sum_{w' \in W'} \det(w').L_{w'v^{-1}w_0}(u_0)$, u_0 étant un élément satisfaisant aux propriétés de la proposition 5. L'élément u_v appartient à $\mathbf{Z}[P]^{W'}$. En effet, pour α dans B', soient

$$W_1' = \{w' \in W';\ l(s_\alpha w') = l(w') - 1\}$$

et

$$W_2' = \{w' \in W';\ l(s_\alpha w') = l(w') + 1\} = \complement_{W'} W_1'.$$

Dans W', la multiplication à gauche par s_α induit une bijection de W_1' sur W_2'. Si $w' \in W_1'$,

$$L_{s_\alpha} L_{w'v^{-1}w_0} = L_{s_\alpha w'v^{-1}w_0},$$

si $w' \in W_2'$,

$$L_{s_\alpha} L_{w'v^{-1}w_0} = L_{w'v^{-1}w_0}.$$

D'où

$$L_{s_\alpha}(u_v) = \sum_{w' \in W_2'} \det(w')\left[L_{s_\alpha} L_{w'v^{-1}w_0}(u_0) - L_{s_\alpha} L_{s_\alpha w'v^{-1}w_0}(u_0)\right] = 0.$$

De plus, pour $w \in W$, et $l(w) \leqslant l(v)$, on a $l(ww'v^{-1}w_0) \leqslant l(w_0)$, l'égalité n'intervenant que pour $w = vw'^{-1}$, c'est-à-dire, à cause de la condition sur les longueurs, pour $w = v$ et $w' = 1$. On a donc, dans ces conditions,

$$\varepsilon L_w . L_{w'v^{-1}w_0}(u_0) = \delta_{w,v}.\delta_{w',1}.$$

Donc

$$c_K(u_v) = a_v + \sum_{w \in W,\, l(w) > l(v)} n_w a_w.$$

Une démarche semblable à la démonstration du lemme 6 montre alors que la famille des $c_K(u_v)$ est une base de K_1.

PROPOSITION 6.

(*a*) *L'image par l'homomorphisme caractéristique de* $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ *dans* $K(G/B)$ *est* $K(G/B)^{W'}$.

(*b*) *L'homomorphisme* g^* *induit un isomorphisme entre* $K(G/H)$ *et* $K(G/B)^{W'}$.

(*c*) *L'homomorphisme caractéristique de* $R(H)$ *dans* $K(G/H)$ *est surjectif.*

(*d*) *Le foncteur « d'oubli » induit une surjection de* $K_G(G/H)$ *sur* $K(G/H)$.

Démonstration :

Point (*a*). — Soit a dans $K(G/B)^{W'}$. L'homomorphisme c_K étant surjectif, il existe u dans $\mathbf{Z}[P]$ tel que $c_K(u) = a$. Mais alors

$$c_K\left(\sum_{w' \in W'} w'(u)\right) = \sum_{w' \in W'} w'(a).$$

et cardinal de W' fois a appartient à $c_K(\mathbf{Z}[P]^{W'})$. Donc

$$K(G/B)^{W'} \otimes \mathbf{Q} \subset K_1 \otimes \mathbf{Q}.$$

Mais $K_1 \subset K(G/B)^{W'} \subset K(G/B)$, et K_1 est facteur direct de $K(G/B)$ donc $K_1 = K(G/B)^{W'}$.

Point (*b*). — L'étude de la décomposition cellulaire de G/B permet de montrer (*cf.* [2], 3.2) que la famille $\{[\mathcal{O}_{X_w}]\}_{w \in W}$ est une base de $K(G/B)$, $\mathcal{O}_{X_w}$ désignant le faisceau structural de X_w considéré comme faisceau algébrique cohérent sur G/B.

L'étude de la décomposition cellulaire de G/H montre que $K(G/H)$ admet comme famille génératrice $\{[\mathcal{O}_{Y_{w_0 v}}]\}_{v \in V}$, avec $Y_{w_0 v} = \overline{B\, w_0\, v\, H/H}$ (*cf.* [7], 3).

Si Z est un élément homogène de codimension i de l'anneau de Chow de G/H, alors

$$g^*([\mathcal{O}_Z]) = [\mathcal{O}_{g^{-1}(Z)}] \bmod K^{i+1}(G/B),$$

où $K^{i+1}(G/B)$ désigne le sous-groupe de $K(G/B)$ engendré par les classes des faisceaux algébriques cohérents dont la codimension du support est supérieure ou égale à $(i+1)$ (*cf.* [5], RRR, prop. 2.8).

Or $\operatorname{codim} X_{w_0 w} = l(w)$, et, pour v dans V, $g^{-1}(Y_{w_0 v}) = X_{w_0 v}$. Donc

$$g^*([\mathcal{O}_{Y_{w_0 v}}]) = [\mathcal{O}_{X_{w_0 v}}] + \textstyle\sum_{w \in W,\, l(w) < l(v)} n_w [\mathcal{O}_{X_{w_0 w}}].$$

La famille $\{g([\mathcal{O}_{Y_{w_0 v}}])\}_{v \in V}$ est donc libre dans $K(G/B)$, et engendre un facteur direct de dimension $(W : W')$ contenu dans le facteur direct $K(G/B)^{W'}$ de même dimension. D'où le résultat escompté.

Point (*c*). — Soient $\mathrm{rad}^u(H)$ le radical unipotent de H, L l'unique sous-groupe de Levi de H contenant T. Le sous-groupe H est alors le produit semi-direct de L et de $\mathrm{rad}^u(H)$, $R(H)$ et $R(L)$ sont donc isomorphes. Le Levi L est réductif déployé, donc $R(L)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[P]^{W'}$ (*cf.* [8], 3.6, th. 4). De plus le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(B)^{W'} & \xrightarrow{\bar{c}_K} & K(G/B)^{W'} \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bar{g}^*} \\ R(H) & \xrightarrow[c'_K]{} & K(G/H) \end{array}$$

Les homomorphismes i et $\bar{g}^*$ sont des isomorphismes, $\bar{c}_K$ est surjectif donc c'_K est surjectif.

Point (*d*). — Comme dans le corollaire 2 de la proposition 4, ceci résulte du fait que φ est un isomorphisme.

Remarque. — Le théorème annoncé dans l'introduction est la superposition des propositions 4 et 6.

PROPOSITION 7. — *Soient H un sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe G, B un Borel contenu dans H, T un tore maximal de B, $W = \mathrm{Norm}_G(T)/T$, $W' = \mathrm{Norm}_H(T)/T$, V le système de représentants des classes de W modulo W' précédemment défini, et w_0 l'élément de plus grande longueur de W. Alors, la famille $\{[\mathcal{O}_{\overline{Bw_0vH/H}}]\}_{v\in V}$ est une base de $K(G/H)$.*

Démonstration. — Si w_0' est l'élément de plus grande longueur de W', on a $H = \overline{Bw_0'B}$. De plus, $\overline{Bw_0wH} = \overline{Bw_0wB}.\overline{Bw'B} = \overline{Bw_0vB}$, où v est le représentant de la classe de w modulo W' appartenant à V.

De la démonstration du point (*b*) de la proposition 6, il résulte que la famille considérée est une base de $K(G/H)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1337; *Bourbaki*, 34).

[2] DEMAZURE (M.). — Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1974, p. 53-88.

[3] DEMAZURE (M.). — Sur la formule des caractères de H. Weyl, *Invent. Math.*, t. 9, 1970, p. 249-252.

[4] GROTHENDIECK (A.). — Problèmes ouverts en théorie des intersections, « *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Séminaire de géométrie algébrique* (SGA 6) », exposé 14, p. 667-689. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 225).

[5] GROTHENDIECK (A.). — Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch, « *Théorie des intersections et théorèmes de Riemann-Roch, Séminaire de géométrie algébrique* (SGA 6) », exposé 0, App : RRR, p. 20-57. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 225).

[6] HODGKIN (L.). — *A Künneth-formula in equivariant K-theory*, University of Warwick, Preprint 1969.

[7] MARLIN (R.). — *Anneau de Chow des groupes algébriques* SO (n), Spin (n), G_2 *et* F_4. — Orsay, U.E.R. de Mathématiques, 1974, II + 35 p. multigr. (Université Paris-XI, n° 95-7419).

[8] SERRE (J.-P.). — *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés.* — Paris, Presses universitaires de France, 1968 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 34, p. 37-52).

[9] STEINBERG (R.). — On a theorem of Pittie, *Topology*, t. 14, 1975, p. 173-177.

(Texte reçu le 18 juillet 1975.)

Roger MARLIN,
Mathématiques, Bât. 425,
Centre universitaire,
91405 Orsay.