Bulletin de la S. M. F.

Henri Skoda

Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'', et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 225-299

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__225_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 225-299

VALEURS AU BORD POUR LES SOLUTIONS DE L'OPÉRATEUR d'', ET CARACTÉRISATION DES ZÉROS DES FONCTIONS DE LA CLASSE DE NEVANLINNA

PAR

HENRI SKODA

[C. U. Toulon]

RÉSUMÉ. — Dans un ouvert borné, strictement pseudoconvexe, de $\mathbf{C}^n$, nous construisons des solutions U pour l'équation $d''U = f$, ayant des valeurs au bord dans L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Résolvant ensuite l'équation $i\, d'd''U = \theta$, nous montrons que la condition de Blaschke caractérise les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Table des matières

Introduction et énoncé des résultats

Nous désignons par Ω un ouvert borné de $\mathbf{C}^n$, strictement pseudoconvexe, et de classe C^2, c'est-à-dire

$$\Omega = \{ z ; \rho(z) < 0 \},$$

où ρ est une fonction de classe C^2, définie dans un voisinage de $\bar{\Omega}$, à valeurs réelles, strictement plurisousharmonique au voisinage de $\bar{\Omega}$, et vérifiant $d\rho \neq 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$.

Nous dirons que Ω est strictement convexe, si la dérivée seconde $\rho''(z)$, pour la structure réelle de $\mathbf{C}^n \simeq R^{2n}$, est en tout point $z \in \bar{\Omega}$ une forme quadratique définie positive.

Pour $z \in \bar{\Omega}$, nous noterons T_z^c l'hyperplan « tangent complexe » en z, c'est-à-dire le noyau de $d'\rho$ au point z (avec $d = d' + d''$).

$\delta(z)$ désigne la distance au bord de Ω, et Ω_ε l'ouvert $\{ z ; \rho(z) < -\varepsilon \}$, où $\varepsilon \in \mathbf{R}$ est assez petit.

Les travaux fondamentaux de I. Lieb [7], G. Henkin [10], N. Kerzman [15] et N. Ovrelid [26] ont montré l'existence, dans un tel ouvert Ω, d'un opérateur d'homotopie explicite pour la d''-cohomologie, construit à l'aide de noyaux intégraux et fournissant des estimations de type L^∞ pour les solutions de l'équation $d''U = f$. Il en est alors résulté un certain nombre de résultats importants sur l'algèbre $H^\infty(\Omega)$ des fonctions holomorphes bornées dans Ω (*cf.* [16] et [40] par exemple). Il semble donc désormais possible d'envisager une généralisation à n variables de la théorie des espaces $H^p(\Omega)$ (espace des fonctions holomorphes dans Ω avec valeurs au bord dans $L^p(\partial\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$), théorie qui, dans le cas $n = 1$, a fait l'objet d'études approfondies (*cf.* par exemple [12]).

Dans ce but, il est naturel de rechercher une résolution de l'équation $d''U = f$ dans Ω, avec une valeur au bord dans $L^r(\partial\Omega)$ pour la solution $U (1 \leqslant r \leqslant +\infty)$. Le but du présent article est donc essentiellement de trouver de bonnes conditions suffisantes portant sur f, qui assurent l'existence d'une solution U ayant une valeur au bord dans $L^r(\partial\Omega)$. Nous fixerons particulièrement notre attention sur les cas $r = 1$ et $r = \infty$, car, d'une part, les espaces H^1 et H^∞ sont d'un intérêt tout particulier et, d'autre part, les cas $r = 1$ et $+\infty$ ont tendance à échapper à d'autres méthodes utilisées auparavant pour aborder ces problèmes (*cf.* [4] et [5]).

Les conditions sur f, qui paraissent au premier abord les plus naturelles, consistent à imposer à f d'avoir en un sens convenable une valeur au bord dans un espace $L^r(\partial\Omega)$ pour un certain $r \geqslant 1$.

Mais il y a des conditions sur f d'un autre type qui paraissent beaucoup plus utiles dans les applications : on impose aux coefficients de la forme f d'être des mesures bornées sur Ω, ayant des propriétés de régularité au bord de Ω (mesures de L. CARLESON [1], mesures de HÖRMANDER [13]). Dans [1] et [2], L. CARLESON a montré (dans le cas $n = 1$) que le « problème de la couronne » dans $H^\infty(\Omega)$ et le problème des suites d'interpolation pour $H^\infty(\Omega)$ sont étroitement connectés avec ce type de problèmes (dans ce cas, f est une mesure de Carleson, et on cherche U ayant une valeur au bord dans $L^\infty(\partial\Omega)$).

On a une autre motivation dans la recherche d'une généralisation éventuelle à n variables des produits de Blaschke, dont on connaît l'extrême importance dans la théorie des espaces $H^p(\Omega)$ d'une variable. On sait (*cf.* P. LELONG [21]) que le problème de la recherche d'une fonction holomorphe, dont l'ensemble X des zéros est donné, se ramène à la résolution de l'opérateur $i\,d'\,d''$ et par conséquent à la résolution de l'opérateur d''. On constate alors que lorsque X vérifie la condition de Blaschke (à n variables) on est ramené à résoudre une équation du type $d''U = f$, où les coefficients de f sont précisément des mesures bornées sur Ω. Une bonne solution pour U fournira donc une réponse au « problème des produits de Blaschke à n variables ».

Nous sommes en fait intéressés surtout par la valeur au bord $u = U_{|\partial\Omega}$ de la solution U. Il était donc naturel de chercher à obtenir directement u plutôt que U. Nous avons donc été amené à construire directement u comme solution de l'équation intégrale

$$\int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi \tag{1}$$

pour toute forme φ de bidegré $(n-p, n-q)$, d''-fermée, de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ (f étant de bidegré (p, q) et u de bidegré $(p, q-1)$, la solution u n'étant définie *a priori* que sur $\partial\Omega$. Nous notons abusivement cette relation intégrale

$$d''_b\, u = f, \tag{1'}$$

(u est aussi appelée solution tangentielle de $d''U = f$).

Dans le paragraphe 1 de l'appendice II, nous précisons cette notion de solution tangentielle par l'opérateur d'', et nous montrons que connaissant u

sur $\partial\Omega$ solution de (1), on peut construire U dans Ω solution de $d''U = f$ et admettant u comme valeur au bord.

Un avantage majeur de cette mise en évidence de u résidera dans le fait qu'il est possible d'obtenir pour u des formules de représentation intégrale particulièrement simples et liées à la stricte pseudoconvexité (*cf.* théorèmes 5.1 et 5.2).

Nous avons obtenu les résultats suivants, dont la démonstration détaillée fait l'objet des paragraphes 3 à 8 du chapitre I. Avec des notations évidentes, qui seront encore précisées au paragraphe 1, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Si f est une (p, q)-forme, d''-fermée dans Ω, et si les coefficients de f et de la forme $[\delta(z)]^{-1/2} d''\rho \wedge f$ sont des mesures bornées dans Ω, il existe une solution $u \in L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$ vérifiant : $d''_b u = f$, au sens de* (1), *et*

$$\int_{\partial\Omega} |u|\,dS \leqslant C(\Omega)(\|f\|_1 + \|[\delta(z)]^{-1/2} d''\rho \wedge f\|_1),$$

où $C(\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de Ω.

La condition imposée à $d''\rho \wedge f$ n'est autre qu'une limitation de la croissance des coefficients « complexes tangents » de f.

La conjecture qui consisterait à supprimer la condition sur $d''\rho \wedge f$ est fausse comme le montre un contre-exemple du paragraphe 1 (on reprend l'idée du contre-exemple de E. STEIN figurant dans [15]). Ce même contre-exemple suggère la nécessité d'une condition en $d''\rho \wedge f$.

La démonstration du théorème 1 repose sur la construction d'une section du fibré de Cauchy-Leray au-dessus de $\partial(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \setminus \Delta$ (Δ diagonale de $C^n \times C^n$) et sur une représentation intégrale du type Poisson-Szegö pour la solution u, obtenue par des méthodes semblables à [10], [15], [7] et [27].

Si les coefficients de f sont des mesures assez régulières au bord, la solution $u \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dans l'énoncé suivant, $D(x, t)$ désigne la boule de Hörmander-Koranyi de centre $x \in \partial\Omega$ de rayon $t > 0$, définie par

$$D(x, t) = \{z \in \Omega;\ \exists \zeta \in T^c_x,\ |\zeta - z| < t,\ |\zeta - x| < t^{1/2}\},$$

(« boule » de rayon $t^{1/2}$ dans les directions complexes tangentes, *cf.* [13]).

THÉORÈME 1'. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 1, *la mesure μ, définie par $\mu = |f| + |\delta(z)^{-1/2} d''\rho \wedge f|$, vérifie la condition suivante : « il existe $C_1 > 0$ et $\alpha > n$, tels que, pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $t > 0$, on* *ait* $\mu[D(x, t)] \leqslant C_1 t^\alpha$, » *alors la solution u, donnée par le théorème* 1, *est dans* $L^\infty(\partial\Omega)$, *et on a*

$$||u||_{L^\infty(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega, \alpha) \sup_{t>0, x\in\partial\Omega} t^{-\alpha} \mu[D(x, t)],$$

pour une constante $C(\Omega, \alpha)$ *convenable.*

Les mesures μ vérifiant l'hypothèse du théorème avec $\alpha = n$ ont été introduites par HÖRMANDER dans [13], généralisant les mesures de Carleson du cas $n = 1$ (t^n est équivalent à la mesure de Lebesgue de $D(x, t) \cap \partial\Omega$). On a donc l'existence de u dans $L^\infty(\partial\Omega)$ pour une mesure μ, à peine plus régulière qu'une mesure de Hörmander. Nous pensons que le théorème 1′ est encore vrai avec $\alpha = n$, et que sa démonstration serait la première étape fondamentale d'une éventuelle généralisation à n variables du théorème de L. CARLESON [2] sur le « Corona Problem ».

Lorsque f admet une valeur au bord dans $L^r(\partial\Omega)$, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Si* f *est une* (p, q)-*forme* ($q < n$), d''-*fermée, de classe* C^1 *dans* $\overline{\Omega}$, *il existe une* $(p, q-1)$-*forme* u, *définie et continue sur* $\partial\Omega$, *solution de l'équation* $d''_b u = f$ *au sens de* (1), *et donnée par un noyau intégral* K :

$$u(z) = (\mathbf{K} f)(z) = \int_{\partial\Omega} K(z, \zeta) \wedge f(\zeta).$$

L'opérateur $\mathbf{K}$ *envoie continûment* $L^r(\partial\Omega)$ *dans* $L^s(\partial\Omega)$:

$$||\mathbf{K} f||_{L^s(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega, r, s) ||f_b||_{L^r(\partial\Omega)},$$

avec $1 \leqslant r, s \leqslant +\infty$ *et* $1/s > 1/r - 1/2n$.

La signification des normes

$$||K f||_{L^s(\partial\Omega)} \quad \text{et} \quad ||f_b||_{L^r(\partial\Omega)}$$

est précisée au paragraphe 1. f_b est en gros la restriction de f aux plans tangents complexes T_x^c à $\partial\Omega$.

On remarquera que le théorème est « vide » lorsque $n = 1$ ($q < n$), Dans la pratique, on pourra bien entendu appliquer le théorème 2 lorsque f n'est plus de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$; il suffit de pouvoir définir la valeur au bord f_b en un sens naturel. Par exemple, il suffit qu'il existe une suite $f_n \in \mathscr{C}^1_{p,q}(\overline{\Omega})$ de formes d''-fermées, telle que $\lim f_n = f$ dans $L^1_{p,q}(\Omega)$ et telle que la suite $||f_{b,n}||_{L^r(\partial\Omega)}$ soit bornée.

Il suffit aussi que f soit de classe C^1 dans Ω et que $f|_{\partial\Omega_\varepsilon}$ soit bornée en norme $L^r(\partial\Omega_\varepsilon)$ indépendemment de $\varepsilon > 0$, on applique le théorème à Ω_ε, et on passe à la limite en utilisant le fait que les constantes $C(\Omega_\varepsilon)$ qui apparaissent dans tout cet article peuvent être choisies indépendantes de $\varepsilon \in \mathbf{R}$ assez petit. La solution u, donnée par le théorème 2, est en général différente de celle du théorème 1. Nous utilisons une section du fibré de Cauchy-Leray sur $\partial(\Omega\times\Omega)\setminus\Delta$, discontinue sur $\partial\Omega\times\partial\Omega$. Cette discontinuité fait apparaître un « saut » sur $\partial\Omega\times\partial\Omega$ dans la formule de Stokes, et ce saut donne précisément le noyau $K(z, \zeta)$ cherché. Les valeurs trouvées ici pour r et s sont en accord avec celles trouvées, par une toute autre méthode, par G. B. FOLLAND et E. STEIN [5] qui toutefois excluent les valeurs 1 et $+\infty$ pour r et s. Il faut toutefois remarquer qu'il y a une notable différence de nature entre le problème posé ici et celui envisagé par [5], car nous supposons f définie dans $\bar\Omega$ et non pas seulement sur $\partial\Omega$.

Dans le chapitre II, nous utilisons le théorème 1 pour démontrer que la condition de Blaschke à n variables caractérise les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. Une fonction holomorphe F dans Ω est dans la classe de Nevanlinna si

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\log^+|F|\,dS_\varepsilon < +\infty,$$

avec $\log^+|F| = \sup(0, \log|F|)$, et dS_ε étant l'élément d'aire euclidien sur $\partial\Omega_\varepsilon$. La classe de Nevanlinna contient tous les espaces $H^p(\Omega)$ pour $p > 0$. Soit X l'ensemble des zéros de F. Il est classique (*cf.* [3] et [24]) que X vérifie la condition de Blaschke :

$$\int_X \delta(z)\,d\sigma(z) < +\infty,$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire $(2n-2)$-dimensionnel de X (pour la définition précise de l'intégrale, *cf.* P. LELONG [20]). Inversement, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 3. — *Si l'hypersurface complexe X de Ω vérifie la condition de Blaschke, si la classe canonique de cohomologie dans $H^2(\Omega, \mathbf{Z})$ de X est nulle, et si $H^1(\Omega, \mathbf{R}) = 0$, il existe une fonction F dans la classe de Nevanlinna telle que X soit l'ensemble des zéros de F.*

En fait, nous obtenons le théorème 3 comme conséquence d'un théorème plus général, concernant la résolution de l'équation de Lelong-Poincaré :

$$i\,d'\,d''W = \theta,$$

où θ est un (1,1)-courant, positif et fermé sur Ω (*cf.* P. LELONG [21]). Le théorème 3 s'obtient en considérant le cas où θ est le courant d'intégration sur X, on a alors $W = 1/\pi \log|F|$. La démonstration utilise la positivité de θ et l'opérateur d'homotopie de Poincaré pour ramener la résolution de $i\, d'\, d'' W = \theta$ à l'application du théorème 1.

La condition $H^1(\Omega, \mathbf{R}) = 0$ sert uniquement à passer de W à F telle que $W = 1/\pi \log |F|$ (*).

Des résultats partiels, relatifs surtout au cas où X est d'aire finie, sont dus à G. LAVILLE ([18] et [19]) et L. GRUMAN [8], d'autres résultats moins fins mais plus généraux figurent dans [25] et [35].

Le plan général de l'article est le suivant. Le chapitre I est consacré à la démonstration des théorèmes sur le d'' opérateur. Les idées principales sont dans les paragraphes 2 et 3, les formules explicites pour les solutions sont au paragraphe 4. Le chapitre II est consacré à la résolution de l'opérateur $i\, d'\, d''$ et aux zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. L'appendice I fait le lien de la théorie avec la théorie classique du potentiel et la fonction de Green. L'appendice II fournit des formules explicites pour la d''-cohomologie à support compact, et fait le lien avec la relation entre solution tangentielle au bord et solution à l'intérieur pour le d''.

Nous sommes partis d'une remarque faite par N. OVRELID au Colloque sur les algèbres de fonctions, à Aix-en-Provence (France), en mai 1974.

L'appendice III montre le lien entre la théorie et la représentation intégrale de Poisson-Szegö pour les fonctions holomorphes dans la boule et par suite le groupe des automorphismes.

Je tiens à remercier N. OVRELID et W. STOLL pour de nombreuses et utiles conversations concernant les formules intégrales pour l'opérateur d'' et les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.

Les résultats du présent article ont été annoncés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [36] et [37], et ils ont fait l'objet d'un exposé au Séminaire P. Lelong, en janvier 1975, au Colloque sur les algèbres de fonctions, à Kristiansand (Norvège) en juin 1975, et au Summer institut on several complex variables, à Williamstown (États-Unis) en août 1975.

Nous avons un peu amélioré le résultat annoncé dans la Note [36] en obtenant des valeurs au bord dans $L^1(\partial\Omega)$ pour les solutions de l'opérateur d'', au lieu des valeurs au bord mesures sur $\partial\Omega$ annoncées dans [36].

ROMANOV [30] et HENKIN [11] ont annoncé récemment des résultats semblables à ceux exposés ici.

(*) Le Professeur R. HARVEY nous a fait observé qu'il est possible de modifier notre dèmonstration de manière à supprimer l'hypothèse $H^1(\Omega, \mathbf{R}) = 0$ (*cf.* [41])

I. Valeurs au bord des solutions de l'équation $d''U = f$

1. Notations et préliminaires

Nous désignons par $\tilde{\Omega}$ un voisinage de $\bar{\Omega}$ tel que la fonction ρ (qui définit Ω) soit définie dans $\tilde{\Omega}$. Ω_ε est alors l'ouvert $\{ z \in \tilde{\Omega};\ \rho(z) < -\varepsilon \}$, où $\varepsilon \in \mathbf{R}$ est assez petit, et V_ε est le voisinage de $\partial\Omega$ défini par $V_\varepsilon = \{ z \in \tilde{\Omega};\ |\rho(z)| < \varepsilon \}$, où $\varepsilon > 0$. $\mathscr{C}^k_{p,q}(\Omega)$ (resp. $\mathscr{C}^k_{p,q}(\bar{\Omega})$) désigne l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q), et de classe C^k dans Ω (resp. dans $\bar{\Omega}$), $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. $D^k_{p,q}(\Omega)$ est l'espace des formes de bidegré (p, q), de classe C^k, à support compact dans Ω $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$.

Nous orientons $\mathbf{C}^n$ par la forme $(i/2)^n \bigwedge_{k=1}^n (dz_k \wedge d\bar{z}_k)$, et nous identifierons, par abus de langage, les 0-courants et les $2n$-courants. $\partial\Omega$ est alors orienté par la formule de Stokes, c'est-à-dire par la normale extérieure. $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesque sur C^n. $C^n \times C^n$ est muni de l'orientation produit, les chaînes $\Omega \times \partial\Omega$, $\partial\Omega \times \Omega$ et $\partial\Omega \times \partial\Omega$ sont orientées par la formule de Stokes $(\partial\Omega \times \partial\Omega = \partial(\Omega \times \partial\Omega))$, c'est-à-dire en fait par l'orientation produit. $L^r_{p,q}(\Omega)$ est l'espace des (p, q)-formes dans Ω à coefficients dans $L^r(\Omega)$ (fonctions de puissance r-ième intégrables $1 \leqslant r \leqslant +\infty$). $M^1_{p,q}(\Omega)$ est l'espace des (p, q)-formes ou courants dans Ω, à coefficients mesures bornées sur Ω.

Si $f \in M^1_{p,q}(\Omega)$ s'écrit, en écriture canonique :

$$f = \textstyle\sum_{I,J} f_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \tag{I.1.1}$$

où $|I| = p$, $|J| = q$, et où $f_{I,J}$ est une mesure bornée sur Ω, on pose

$$\| f \|_1 = \textstyle\sum_{I,J} \| f_{I,J} \|_1, \tag{I.1.2}$$

où $\| f_{I,J} \|_1$ est l'intégrale sur Ω de la mesure positive $|f_{I,J}|$.
$L^r_{p,q}(\partial\Omega)$ est l'espace des (p, q)-formes, définies sur $\partial\Omega$, à coefficients dans $L^r(\partial\Omega)$. C'est-à-dire : une forme $f \in L^r_{p,q}(\partial\Omega)$ est une application de $\partial\Omega$ dans $\Lambda_{\mathbf{C}}(R^{2n})^*$ de type (p, q), où $\Lambda_{\mathbf{C}}(R^{2n})^*$ est l'algèbre extérieure sur $\mathbf{C}$ construite sur l'espace vectoriel complexifié du dual de $R^{2n} \simeq C^n$. f s'écrit canoniquement $f = \sum_{I,J} f_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$, où les $f_{I,J} \in L^r(\partial\Omega)$.

On pose

$$\| f \|_{L^r(\partial\Omega)} = \textstyle\sum_{I,J} \left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} |f_{I,J}|^r\, dS \right]^{1/r}, \tag{I.1.3}$$

où dS est l'élément d'aire euclidien sur $\partial\Omega$.

On définit de façon analogue l'espace $M^1_{p,q}(\partial\Omega)$ des (p, q)-formes à coefficients mesures sur $\partial\Omega$.

Dans les estimations sur $\partial\Omega$, ce n'est pas la norme $\|f\|_{L^r(\partial\Omega)}$ qui interviendra le plus souvent, mais la norme de la « restriction » f_b de f à T^c.

On peut définir f_b de la façon suivante : soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un champ de repères orthonormés (local) sur $\partial\Omega$ tel que, pour chaque $\zeta \in \partial\Omega$, $(e_2(\zeta), \ldots, e_n(\zeta))$ soit une base de T^c_ζ.

Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la base duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$; les $\bar{\gamma}_i$ sont donc des (0,1)-formes sur $\partial\Omega$, et $\bar{\gamma}_1$ est proportionnelle à $d''\rho$. La forme $f \in L^r_{p,q}(\partial\Omega)$ s'écrit de manière unique :

$$f = \bar{\gamma}_1 \wedge g + f_b, \tag{I.1.4}$$

où g est de type $(p, q-1)$, et où f_b est du type (p, q) et est engendrée par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_n$ ($\bar{\gamma}_1$ ne figure donc pas dans l'écriture canonique de f_b dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$).

Nous aurons besoin de la formule de Bochner-Cauchy-Martinelli. Soit K_B la forme différentielle de Bochner-Cauchy-Martinelli sur $C^n \times C^n \setminus \Delta$ (Δ diagonale de $C^n \times C^n$), définie par

$$K_B = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dfrac{\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge_{j \neq i} (d\bar{\zeta}_j - d\bar{z}_j) \wedge [\wedge_{j=1}^n (d\zeta_j - dz_j)]. \tag{I.1.5}$$

K_B est localement intégrable dans $C^n \times C^n$, et définit donc un courant dans $C^n \times C^n$. D'après G. Roos ([31] et [32]) ou N. Ovrelid [27], K_B possède la propriété fondamentale suivante :

$$dK_B = d''K_B = c_n[\Delta], \tag{I.1.6}$$

au sens des courants dans $C^n \times C^n$, où c_n est une constante dépendant de n, et où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale Δ.

Soit $f \in D^\infty_{p,q}(C^n)$ une forme d''-fermée, et $\varphi \in D^\infty_{n-p,n-q}(C^n)$; soit π_1 et π_2 les projections canoniques de $C^n \times C^n$ sur C^n :

$$\pi_1(\zeta, z) = \zeta \qquad \text{et} \qquad \pi_2(\zeta, z) = z.$$

La relation (I.1.6) entraîne la suivante :

$$(-1)^{p+q} \int_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n} K_B \wedge \pi_1^* f \wedge d''(\pi_2^* \varphi) = c_n \int_{\mathbf{C}^n} f \wedge \varphi. \tag{I.1.7}$$

Soit $K_{p,q-1}$ la composante de K_B de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ, (I.1.7) signifie encore qu'au sens des courants dans C^n, on a

$$d''_z\left[\int_{\mathbf{C}^n} K_{p,q-1} \wedge f(\zeta)\right] = c_n f(z). \tag{I.1.8}$$

On a donc une solution explicite pour l'équation $d''U = f$ dans C^n, lorsque f est à support compact, de classe C^∞. Comme le noyau $K_{p,q-1}(\zeta, z)$ est un noyau de convolution, il est immédiat en approchant f par une suite de régularisées, d'étendre (I.1.8) au cas où f a pour coefficients des mesures à support compact dans C^n.

La relation (I.1.6) entraîne les relations suivantes entre formes différentielles

$$d''_z K_{p,q-1} = -d''_\zeta K_{p,q}, \tag{I.1.9}$$

$$d''_\zeta K_{p,0} = 0. \tag{I.1.10}$$

Une autre conséquence de (I.1.6) est qu'au sens des courants dans C^n, on a

$$d''_\zeta K_{0,0} = c_n \delta_z \tag{I.1.11}$$

où δ_z est la masse de Dirac au point z.

Nous terminons avec un exemple d'une forme $f \in L^1_{0,1}(\Omega)$, où Ω est la boule unité de C^2, telle que l'équation $d''U = f$ n'ait pas de solution $U \in L^1(\partial\Omega)$. Soit $h(z_1)$ une fonction holomorphe d'une variable dans le disque unité, que nous préciserons ultérieurement. On considère la forme f, définie par

$$f = h(z_1)\, d\bar{z}_2 = d''\left[h(z_1)\bar{z}_2\right]. \tag{I.1.12}$$

Soit U une solution de $d''U = f$, telle que $U \in L^1(\partial\Omega)$. Soit (ρ_2, θ_2) les coordonnées polaires telles que $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$.

Au voisinage du point $(1, 0)$ de la sphère $\partial\Omega$, l'élément d'aire dS est équivalent à Cte $\rho_2\, d\rho_2\, d\theta_2\, dy_1$. Comme $\rho_2^2 = 1 - |z_1|^2$ sur $\partial\Omega$, on peut remplacer la variable ρ_2 par x_1 au voisinage de $(1, 0)$, et comme, $\partial/\partial x_1(\rho_2^2) = -2$ au point $(1, 0)$, on a

$$dS \sim \text{Cte}\, d\theta_2\, d\lambda(z_1), \tag{I.1.13}$$

au voisinage de $(1, 0)$ sur $\partial\Omega$.

Considérons le domaine D_1 du disque unité, défini par

$$D_1 = \{z_1;\ |z_1| < 1 \text{ et } |z_1 - 1| < \varepsilon\}.$$

où ε est choisi de sorte que (I.1.13) soit vrai pour $z \in \partial\Omega$ et $z_1 \in D_1$. Pour chaque $z_1 \in D_1$, considérons le cercle $\gamma_2(z_1)$ formé des points de $\partial\Omega$ se projetant sur z_1, et considérons l'intégrale

$$I = \int_{D_1} \left| \int_{\gamma_2(z_1)} h(z_1)\bar{z}_2 \frac{dz_2}{\rho_2} \right| d\lambda(z_1). \tag{I.1.14}$$

Comme $dz_2 = i\,\rho_2\, e^{i\theta_2}\, d\theta_2$ avec $\rho_2 = (1-|z_1|^2)^{1/2}$, on a

$$|I| \leqslant \int_{D_1} \int_0^{2\pi} |U(z_1, \rho_2 e^{i\theta_2})|\, d\theta_2\, d\lambda(z_1). \tag{I.1.15}$$

Soit d'après (I.1.13) :

$$|I| \leqslant \mathrm{Cte} \int_{\partial\Omega} |U|\, dS < +\infty. \tag{I.1.16}$$

D'autre part, d'après (I.1.12), comme $U - h(z_1)\bar{z}_2$ est holomorphe, on a

$$\int_{\gamma_2(z_1)} U \frac{dz_2}{\rho_2} = \int_{\gamma_2(z_1)} h(z_1)\bar{z}_2 \frac{dz_2}{\rho_2} = 2\,i\pi\,\rho_2(z_1)\,h(z_1). \tag{I.1.17}$$

D'après (I.1.14), (I.1.16) et (I.1.17), on obtient donc :

$$\int_{D_1} (1-|z_1|^2)^{1/2}\, |h(z_1)|\, d\lambda(z_1) < +\infty. \tag{I.1.18}$$

La condition $f \in L^1_{0,1}(\Omega)$ est équivalente à

$$\int_{|z_1|<1} (1-|z_1|^2)\, |h(z_1)|\, d\lambda(z_1) < +\infty. \tag{I.1.19}$$

Il est clair qu'on peut construire h holomorphe dans le disque unité satisfaisant à (I.1.19) mais non à (I.1.18).

2. Solutions tangentielles de l'opérateur d''

Soit f une (p, q)-forme, d''-fermée, dans Ω. On veut résoudre, dans Ω l'équation

(I.2.1) $\qquad d''U = f,\;$ où U est une $(p, q-1)$-forme.

Comme la résolution de (I.2.1) est destinée, en dernière analyse, à construire des fonctions holomorphes dans Ω, et comme une fonction holomorphe dans Ω est entièrement déterminée par sa valeur sur $\partial\Omega$, il est naturel de s'intéresser particulièrement à la valeur au bord $u = U_{|\partial\Omega}$ de U.

Si φ est une $(n-p, n-q)$-forme, d''-fermée dans Ω, et si U, f et φ sont de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$, la formule de Stokes montre que (I.2.1) entraîne

$$\text{(I.2.2)} \qquad \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_\Omega d''U \wedge \varphi = \int_\Omega d(U \wedge \varphi) = \int_{\partial\Omega} U \wedge \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\text{(I.2.3)} \qquad \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi \qquad \text{avec} \quad u = U_{|\,\partial\Omega}.$$

On pose donc la définition suivante (*cf.* HÖRMANDER [14] et J.-P. SERRE [33]).

DÉFINITION 2.1. — *Une $(p, q-1)$-forme u, définie sur $\partial\Omega$, à coefficients sommables sur $\partial\Omega$ (ou à coefficients mesures sur $\partial\Omega$), est appelée solution tangentielle de l'équation $d''U = f$ si, pour toute forme φ de type $(n-p, n-q)$, d''-fermée, définie et de classe C^1 dans un voisinage de $\bar{\Omega}$, on a*

$$\text{(I.2.4)} \qquad \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi.$$

La relation (I.2.4) généralise donc (I.2.1), et garde un sens lorsque f est à coefficients intégrables dans Ω, ou à coefficients mesures bornées sur Ω. Si $\varphi = d''\psi$, où $\psi \in \mathscr{C}^1_{n-p, n-q-1}(\bar{\Omega})$, on a, d'après la formule de Stokes et d'après (I.2.4) (en supposant f de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$) :

$$\int_\Omega f \wedge \varphi = \int_\Omega f \wedge d''\psi = \int_\Omega d''(f \wedge \psi) = \int_{\partial\Omega} f \wedge \psi = \int_{\partial\Omega} u \wedge d''\psi,$$

c'est-à-dire

$$\text{(I.2.5)} \qquad \int_{\partial\Omega} f \wedge \psi = \int_{\partial\Omega} u \wedge d''\psi.$$

Si u et f sont de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$, la condition (I.2.4) entraîne donc la relation

(I.2.6) $\quad d''_b u = f$, où d''_b est l'opérateur de J. KOHN [4].

On notera donc (abusivement) la relation intégrale (I.2.4) :

$$\text{(I.2.7)} \qquad d''_b u = f,$$

même lorsque f n'a plus de valeur au bord au sens usuel.

On cherchera à résoudre directement (I.2.4) plutôt que (I.2.1). Après avoir obtenu une solution u de (I.2.4), il est facile de construire une solution U de (I.2.1) dans Ω, en utilisant le procédé suivant : en désignant par $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 en dehors de Ω et par $[\partial\Omega]_{0,1}$ la composante de bidegré (0, 1) du courant d'intégration sur $\partial\Omega$, la relation (I.2.4) s'écrit encore :

$$\langle \tilde{f} - [\partial\Omega]_{0,1} \wedge u, \varphi \rangle = 0, \tag{I.2.8}$$

où le crochet est celui de la dualité entre courants sur C^n et formes différentielles sur C^n.

En choisissant en particulier $\varphi = d''\psi$, où $\psi \in \mathscr{C}^{\infty}_{n-p,n-q}(C^n)$, la relation (I.2.8) signifie que, au sens des courants dans C^n, on a

$$d''[\tilde{f} - [\partial\Omega]_{0,1} \wedge u] = 0. \tag{I.2.9}$$

D'après (I.1.8), on a donc une solution U dans C^n pour l'équation

$$d''U = \tilde{f} - [\partial\Omega]_{0,1} \wedge u, \quad \text{au sens des courants.} \tag{I.2.10}$$

U est donné explicitement à l'aide du noyau de Cauchy-Martinelli :

$$U(z) = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega} K_{p,q-1}(z, \zeta) \wedge f(\zeta) + \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega} K_{p,q-1}(z, \zeta) \wedge u(\zeta), \tag{I.2.11}$$

où $K_{p,q-1}$ désigne la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de la forme K_B [*cf.* (I.1.5)]. Comme f et u sont intégrables respectivement sur Ω et $\partial\Omega$, et comme $|K_{p,q-1}|$ est $0(|z-\zeta|^{-2n+1})$, U est dans $L^1_{\text{loc}}(C^n)$.

Considérons maintenant le cas où f est de type $(p, 1)$ et où par suite U et u sont de type $(p, 0)$. Comme $d''_{\zeta}K_{p,0}$ est de bidegré $(p, 0)$ en z et $(n-p, n)$ en ζ, la relation $d''K_B = 0$, entraîne

$$d''_{\zeta}K_{p,0} = 0. \tag{I.2.12}$$

La relation (I.2.4) appliquée avec $\varphi(\zeta) = K_{p,0}(z, \zeta)$ montre que

$$U(z) = 0, \qquad \text{lorsque} \quad z \notin \overline{\Omega}. \tag{I.2.13}$$

U est donc à support dans $\overline{\Omega}$. La relation (I.2.10) montre que U admet u comme valeur au bord au sens de la formule de Stokes :

$$(-1)^{p+q}\int_{\Omega} U \wedge d''\varphi = \int_{\Omega} f \wedge \varphi - \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi, \tag{I.2.14}$$

pour toute forme φ de bidegré $(n-p, n-q)$, de classe C^∞ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Lorsque f est de bidegré (0, 1), et est continu dans $\overline{\Omega}$, et lorsque u est une fonction continue sur $\partial\Omega$, nous allons montrer que U est continue dans $\overline{\Omega}$ et a pour valeur au bord u.

On considère une « symétrie » par rapport à $\partial\Omega$, c'est-à-dire une application $z \longrightarrow z^*$, définie dans $V \cap \Omega$, où V est un voisinage de $\partial\Omega$, et à valeurs dans $\complement\,\Omega$, vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} |z-z^*| & \leqslant C_1\,\delta(z), \\ |z-\zeta| & \leqslant C_2\,|z^*-\zeta|, \end{array}\right. \tag{I.2.15}$$

pour tout $z \in \Omega$ et tout $\zeta \in \Omega$, C_1 et C_2 étant des constantes. (Dans le cas de la boule unité, on peut prendre par exemple $z^* = (z/|z|^2)$. Comme $U(z^*) = 0$, on obtient, en désignant par K le noyau $K_{0,0}$ (pour simplifier l'écriture) :

$$c_n\,U(z) = \int_\Omega [K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)] \wedge f(\zeta) + \int_{\partial\Omega} [K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)]\,u(\zeta), \tag{I.2.16}$$

avec

$$K(z,\zeta) = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dfrac{\bar\zeta_i-\bar z_i}{|z-\zeta|^{2n}} (\bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j) \wedge \omega(\zeta).$$

D'après la formule de Cauchy-Martinelli (I.1.11), on a

$$\int_{\partial\Omega_\zeta} K(z,\zeta) = c_n, \qquad \text{lorsque} \quad z \in \Omega, \tag{I.2.17}$$

$$\int_{\partial\Omega_\zeta} K(z,\zeta) = 0, \qquad \text{lorsque} \quad z \in \complement\,\overline{\Omega}. \tag{I.2.18}$$

Il en résulte, d'après (I.2.16), (I.2.17) et (I.2.18), que si $z_0 \in \partial\Omega$, on a

$$U(z)-u(z_0) = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega_\zeta} [K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)] \wedge f(\zeta) + \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega_\zeta} [K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)]\,[u(\zeta)-u(z_0)]. \tag{I.2.19}$$

On montre aisément, en utilisant (I.2.15), la majoration suivante (*cf.* l'appendice I) :

$$|K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)| \leqslant C_3 \frac{\delta(z)}{|z-\zeta|^{2n}}, \tag{I.2.20}$$

lorsque z et $\zeta \in \Omega$. Il en résulte que

$$(\text{I}.1.21) \quad |c_n|.|U(z)-u(z_0)| \leqslant \int_{\Omega} |K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)|.|f(\zeta)| + C_3 \int_{\partial\Omega} \frac{\delta(z)}{|z-\zeta|^{2n}} |u(\zeta)-u(z_0)|.$$

D'après le comportement classique des noyaux de Poisson, $U(z)$ tend donc vers $u(z_0)$ quand z tend vers z_0. D'où la proposition suivante :

PROPOSITION (2.1). — *Si f est une* (0, 1)*-forme, continue dans $\overline{\Omega}$, et si u est une fonction continue sur $\partial\Omega$ vérifiant* (I.2.4) (i.e. $d''_b u = f$), *la fonction U, définie par* (I.2.11) *dans Ω, se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$, et vérifie $d''U = f$ dans Ω, ainsi que $U_{|\partial\Omega} = u$.*

On peut évidemment affaiblir les hypothèses sur f et sur u, mais cette proposition nous suffira dans les applications. D'autre part, on a vu que lorsque f n'est plus régulière, on a le résultat suivant.

PROPOSITION (2.2). — *Si f est une* $(p, 1)$*-forme, d''-fermée, à coefficients mesures bornées dans Ω, et si u, appartenant à $L^1_{p,0}(\partial\Omega)$ ou à $M^1_{p,0}(\partial\Omega)$, vérifie* (I.2.4), *alors la* $(p, 0)$*-forme U, définie par* (I.2.11), *appartient à $L^1_{p,0}(\Omega)$. U vérifie l'équation $d''U = f$ dans Ω et admet u pour valeur au bord, au sens de la formule de Stokes :*

$$(-1)^{p+1} \int_{\Omega} U \wedge d''\varphi = \int_{\Omega} f \wedge \varphi - \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi,$$

pour toute φ de type $(n-p, n-1)$ et de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$.

On envisage maintenant le cas d'une (p, q)-forme f avec $q > 1$. Dans ce cas, la solution U, donnée par (I.2.11), de l'équation

$$d''U = \tilde{f} - [\partial\Omega]_{0,1} \wedge u,$$

n'est plus à support compact dans $\overline{\Omega}$, car $d''_\zeta K_{p,q-1} \neq 0$.

On a donc seulement

$$(1.1.22) \qquad (-1)^{p+q} \int_{\mathbf{C}^n} U \wedge d''\varphi = \int_{\Omega} f \wedge \varphi - \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi,$$

pour φ de classe C^1, à support compact dans $\mathbf{C}^n$.

Comme $\overline{\Omega}$ a un système fondamental de voisinages de Stein, on sait, d'après la théorie de la dualité de J.-P. SERRE (*cf.* [33]ou [34]), qu'il existe un *courant* U_ε à support *compact dans* $\overline{\Omega}_\varepsilon$, tel que

$$(-1)^{p+q}\langle U_\varepsilon, d''\varphi\rangle_{C^n} = \int_\Omega f\wedge\varphi - \int_{\partial\Omega} u\wedge\varphi,$$

pour toute $\varphi\in D_{n-p,n-q}(C^n)$, avec $\varepsilon < 0$.

En fait, nous montrerons dans l'appendice II qu'on peut trouver U à support compact dans $\overline{\Omega}$ et dans $L^1_{p,q-1}(\Omega)$ (la démonstration utilisant des techniques que nous mettrons en place plus tard, nous préférons la rejeter en appendice).

Nous aurons alors le résultat suivant :

PROPOSITION (2.3). — *Si f appartenant à $L^1_{p,q}(\Omega)$ ou $M^1_{p,q}(\Omega)$, est d''-fermée, et si u, appartenant à $L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$ ou $M^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$, vérifie* (I.2.4) (*i. e.* $d''_b u = f$), *alors il existe U dans $L^1_{p,q-1}(\Omega)$, vérifiant :*

$$(-1)^{p+q}\int_\Omega U\wedge d''\varphi = \int_\Omega f\wedge\varphi - \int_{\partial\Omega} u\wedge\varphi, \quad \textit{pour toute } \varphi\in\mathscr{C}^1_{n-p,n-q}(\overline{\Omega}).$$

3. Formules générales pour la solution tangentielle de l'opérateur d''

Nous allons utiliser des méthodes semblables à celles figurant dans [23], [10] et [27], et obtenir deux types distincts de formules intégrales, correspondant à deux sections distinctes du fibré de Cauchy-Leray au-dessus de $\partial(\Omega\times\Omega)\setminus\Delta$. Soit E la partie de $\mathbf{C}^{3n}$ définie par

$$E = \{(\xi, \zeta, z)\in\mathbf{C}^{3n};\ \langle\xi, \zeta-z\rangle\neq 0\},$$

où $\langle\zeta, z\rangle = \sum_{i=1}^n \zeta_i z_i$ est $\mathbf{C}$-bilinéaire.

Soit $\pi = (\pi_1, \pi_2) : E\to C^n\times C^n\setminus\Delta$, l'application canonique

$$(\xi, \zeta, z)\mapsto(\zeta, z).$$

La fibre de π au-dessus d'un point est le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbf{C}^n$. On désigne par $\mathbf{P}_{n-1}(C)$ l'espace projectif complexe de dimension $n-1$, et par $[\xi]$ le point de $\mathbf{P}_{n-1}(C)$ défini par $\xi\in\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$.

Le fibré de Cauchy-Leray est alors l'ensemble $\tilde{E}$, défini par

$$\tilde{E} = \{([\xi], \zeta, z)\in\mathbf{P}_{n-1}\times\mathbf{C}^{2n};\ \langle\xi, \zeta-z\rangle\neq 0\}.$$

Soit χ l'application canonique de E dans $\tilde{E}$:

$$(\xi, \zeta, z)\mapsto([\xi], \zeta, z).$$

Soit $\tilde{\pi}$ l'application $\tilde{E} \to C^n \times C^n \setminus \Delta$:

$$([\xi], \zeta, z) \mapsto (\zeta, z).$$

$\tilde{E}$ peut être muni d'une structure de fibré trivial à fibre espace affine (*cf.* [26], p. 141).

On considère la forme différentielle μ de Cauchy-Leray :

$$\text{(I.3.1)} \qquad \mu = \langle \xi, \zeta - z \rangle^{-n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \xi_i (\bigwedge_{j \neq i} d\xi_j) \wedge \omega(\zeta - z),$$

avec $\omega(\zeta) = \bigwedge_{j=1}^{n} d\zeta_j$ et $\omega(\zeta - z) = \bigwedge_{j=1}^{n} (d\zeta_j - dz_j)$. μ est définie sur E. On montre aisément (*cf.* OVRELID [26] ou [27]) qu'on a $\mu = \chi^* \tilde{\mu}$, où $\tilde{\mu}$ est une forme sur $\tilde{E}$.

Un calcul immédiat montre que μ *est fermée*

$$\text{(I.3.2)} \qquad d\mu = 0.$$

Soit $S_b : C^n \times C^n \setminus \Delta \to E$:

$$\text{(I.3.3)} \qquad (\zeta, z) \mapsto (\xi_b = \bar{\zeta} - \bar{z}, \zeta, z),$$

la section de Bochner-Martinelli du fibré E.

La forme $S_b^* \mu$ sur $C^n \times C^n \setminus \Delta$ n'est autre que la forme K_B du paragraphe 1.

Le courant $[S_b^* \mu]$ défini par $S_b^* \mu$ sur $C^n \times C^n$ vérifie donc (au sens des courants) (*cf.* N. OVRELID [27], G. ROOS [31], W. KOPPELMAN [17] ou (I.1.6)) :

$$\text{(I.3.3)} \qquad d[S_b^* \mu] = d''[S_b^* \mu] = c_n [\Delta],$$

où $[\Delta]$ désigne le courant d'intégration sur la diagonale.

On suppose, dans tout ce paragraphe, que f est une (p, q)-forme, d''-fermée, de *classe* C^1 *dans* $\bar{\Omega}$, et que φ est une $(n-p, n-q)$-forme, d''-fermée, de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$. Par abus de langage, nous noterons $f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ la forme $\pi_1^* f \wedge \pi_2^* \varphi$ sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$.

D'après (I.3.3) et d'après la formule de Stokes, nous avons

$$-\int_{\Omega \times \Omega} S_b^* \mu \wedge d(\pi_1^* f \wedge \pi_2^* \varphi) + c_n \int_{\Delta \cap (\Omega \times \Omega)} \pi_1^* f \wedge \pi_2^* \varphi$$
$$= \int_{\partial(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})} S_b^* \mu \wedge \pi_1^* f \wedge \pi_2^* \varphi.$$

(Pour une démonstration tout à fait détaillée, *cf.* [27], p. 143 et 144.)

Comme $\pi_1^* f \wedge \pi_2^* \varphi$ est d''-fermée et que $S_b^* \mu \wedge d' (\pi_1^* f \wedge \pi_2^*)$ est nulle car de bidegré $(2n+1, n-1)$, la première intégrale est nulle, et on obtient :

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = \int_{\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} S_b^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z). \tag{I.3.4}$$

Soit maintenant $S_h : \partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta \to E$ une section de E, de classe C^1, définie sur le bord $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ de $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ privé de la diagonale Δ.

Le principe du raisonnement va être le suivant : E étant un fibré à fibres affines, les sections S_b et S_h sont homotopes au-dessus de $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$; comme la forme $\mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ est fermée dans E et que $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ est un bord, la formule de Stokes, montre que

$$\int_{\partial(\Omega \times \Omega)} S_b^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z) = \int_{\partial(\Omega \times \Omega)} S_h^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z).$$

Si de plus on construit S_h de sorte que S_h soit holomorphe en z quand $\zeta \in \partial\Omega$, l'intégrale de $S_h^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ sur $\partial\Omega_\zeta \times \Omega_z$ sera nulle par des considérations de bidegré, et on obtiendra :

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = \int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} S_h^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z),$$

c'est-à-dire une solution tangentielle u donnée par

$$u(z) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega_\zeta} S_h^* \mu \wedge f(\zeta).$$

En pratique, il nous faut tenir compte des singularités de S_b et S_h sur Δ, et expliciter l'homotopie de S_b et S_h, on va donc procéder de façon légèrement différente. On suppose que ξ_h a été construit de sorte que

$$\operatorname{Re} \langle \xi_h, \zeta - z \rangle > 0, \tag{I.3.5}$$

lorsque $(\zeta, z) \in \partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta$.

Soit I l'intervalle compact $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$, on considère l'application F :

$$\begin{gathered} I \times \partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta \to E, \\ (t, \zeta, z) \mapsto (t\xi_b + (1-t)\xi_h, \zeta, z). \end{gathered} \tag{I.3.6}$$

D'après (I.3.5), on a

$$\operatorname{Re} \langle t\xi_b + (1-t)\xi_h, \zeta - z \rangle > 0, \tag{I.3.7}$$

pour $t \in I$ et $(\zeta, z) \in \partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta$.

On considère d'autre part la chaîne notée $\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)$, définie dans $C^n\times C^n$ par

$$\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)=\partial\Omega\times\overline{\Omega}_\varepsilon+\overline{\Omega}_\varepsilon\times\partial\Omega, \tag{I.3.8}$$

(où $\Omega_\varepsilon=\{z\in\Omega;\ \rho(z)<-\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$).

La forme $\mu\wedge\pi_1^* f\wedge\pi_2^*\varphi$ *est fermée* (car $\mu\wedge d'(\pi_1^* f\wedge\pi_2^*\varphi)$ est de bidegré $(2n+1, n)$ en (ζ, z), donc est nulle). Il en résulte qu'on a, d'après la formule de Stokes,

$$\int_{\partial[I\times\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)]}F^*\mu\wedge f(\zeta)\wedge\varphi(z)=0. \tag{I.3.9}$$

Comme $\partial I=\{1\}-\{0\}$ et que F coïncide avec S_b pour $t=1$ et S_h pour $t=0$, on obtient, en posant $\psi=f(\zeta)\wedge\varphi(z)$:

$$\int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)}S_b^*\mu\wedge\psi-\int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)}S_h^*\mu\wedge\psi-\int_{I\times\partial[\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)]}F^*\mu\wedge\psi=0. \tag{I.3.10}$$

Le bord de $\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)$ est la chaîne

$$\partial[\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)]=-\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon+\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z,$$

les bords $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_\varepsilon$ étant orientés par la normale extérieure, et $\partial\Omega\times\partial\Omega$ étant orienté par l'orientation produit.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)}S_b^*\mu\wedge\psi-\int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)}S_h^*\mu\wedge\psi\\ =-\int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon}F^*\mu\wedge\psi+\int_{I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z}F^*\mu\wedge\psi.\end{aligned} \tag{I.3.11}$$

Faisons l'hypothèse (qui serait triviale s'il n'y avait les singularités de $F^*\mu$ sur Δ) que la limite du 2e membre est nulle.

On a alors, d'après (I.3.11) et (I.3.4),

$$c_n\int_\Omega f\wedge\varphi=\int_{\partial(\Omega\times\Omega)}S_h^*\mu\wedge f(\zeta)\wedge\varphi(z). \tag{I.3.12}$$

Calculons l'intégrale sur $\partial\Omega_\zeta\times\Omega_z$. Seule intervient dans le calcul la composante de $S_h^*\mu$ de bidegré (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ. Comme S_h est holomorphe en z lorsque $\zeta\in\partial\Omega$, on a $d_z''\xi_h=0$ et la composante considérée de $S_h^*\mu$ est nulle pour $q>0$.

On a donc

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = \int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} S_h^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z). \tag{1.3.13}$$

D'où le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. — *Soit s_h une section de classe C^1 du fibré E sur $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta$, vérifiant les trois conditions suivantes :*

(i) $\operatorname{Re} \langle \xi_h, \zeta - z \rangle > 0$, $(\zeta, z) \in \partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta$;

(ii) *S_h est holomorphe par rapport à z quand $\zeta \in \partial\Omega$;*

(iii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega \times \partial\Omega_\varepsilon} F^* \mu \wedge \psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega_\varepsilon \times \partial\Omega} F^* \mu \wedge \psi$, *où F est définie par* (I.3.6), *et où $\psi = f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$. Alors la $(p, q-1)$-forme u, définie par*

$$u(z) = \int_{\Omega_\zeta} (S_h^* \mu) \wedge f(\zeta),$$

où $z \in \partial\Omega$, est une solution de l'équation $d_b'' u = f$, au sens de (I.2.4).

En fait, seule intervient dans la formule la composante de $s_h^* \mu$ de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ.

Dans le théorème 3.1, on obtient u en intégrant f sur Ω. On cherche maintenant à démontrer un théorème où u s'obtient en intégrant f sur $\partial\Omega$. Dans ce but, on va remplacer la section s_h par une section de E au-dessus de $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \Delta$ « discontinue » sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$. De façon précise, soit $s_1 : (\partial\Omega_\zeta \times \overline{\Omega}_z) \setminus \Delta \to E$ une section de E, de classe C^1, au-dessus de $\partial\Omega_\zeta \times \Omega_z \setminus \Delta$, qui soit holomorphe en z.

Soit de même $s_2 : (\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z) \setminus \Delta \to E$ une section de E holomorphe en ζ. Bien sûr, s_1 et s_2 ne coïncideront pas sur $\partial\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z \setminus \Delta$.

On suppose que $\operatorname{Re} \langle \xi_i, \zeta - z \rangle > 0$, pour $i = 1, 2$.

On définit les applications F_1 et F_2 :

$$\begin{aligned} &F_1 : I \times (\partial\Omega_\zeta \times \overline{\Omega}_z \setminus \Delta) \to E, \\ &\qquad (t, \zeta, z) \mapsto (t\xi_b + (1-t)\xi_1, \zeta, z), \\ &F_2 : I \times (\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z) \setminus \Delta \to E, \\ &\qquad (t, \zeta, z) \mapsto (t\xi_b + (1-t)\xi_2, \zeta, z). \end{aligned} \tag{I.3.14}$$

Comme $\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)$ ne contient pas $\partial\Omega\times\partial\Omega$, F_1 et F_2 définissent une application F de classe C^1 de $\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)$ dans E. On peut donc utiliser la formule (I.3.9) qui nous donne une formule semblable à (I.3.11) :

$$\text{(I.3.15)}\qquad \int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)} s_b^*\mu\wedge\psi-\int_{\partial\Omega_\zeta\times\Omega_\varepsilon} s_1^*\mu\wedge\psi \\ -\int_{\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z} s_2^*\mu\wedge\psi-\int_{I\times\partial[\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)]} F^*\mu\wedge\psi=0.$$

Seules interviennent la composante de $s_1^*\mu$ de bidegré (p, q) en z et la composante de $s_2^*\mu$ de bidegré $(n-p, n-q)$ en ζ.

Vu les hypothèses faites sur s_1 et s_2, ces composantes sont nulles pourvu que $0<q<n$. On a donc

$$\text{(I.3.16)}\qquad \int_{\partial_\varepsilon(\Omega\times\Omega)} s_b^*\mu\wedge\psi=-\int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon} F_1^*\mu\wedge\psi+\int_{I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z} F_2^*\mu\wedge\psi.$$

Faisons l'hypothèse que les intégrales sur $I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon$ et $I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z$ convergent vers les intégrales correspondantes sur $I\times\partial\Omega\times\partial\Omega$, de sorte que

$$\text{(I.3.17)}\qquad \int_{\partial(\Omega\times\Omega)} s_b^*\mu\wedge\psi=\int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z}(F_2^*\mu-F_1^*\mu)\wedge\psi.$$

Soit Δ_1 le 2-simplexe de R^3, défini par

$$\Delta_1=\{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)\in\mathbf{R}^3;\ \lambda_i\geqslant 0,\ \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1\}.$$

Soit G l'application $\Delta_1\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z\to E$,

$$\text{(I.3.18)}\qquad (\lambda, \zeta, z)\mapsto(\lambda_0\xi_b+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2, \zeta, z),$$

et soit F_3 l'application $I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z\to E$,

$$\text{(I.3.19)}\qquad (t, \zeta, z)\mapsto(t\xi_1+(1-t)\xi_2, \zeta, z).$$

Comme $\mu\wedge\pi_1^*f\wedge\pi_2^*$ est fermée, on a

$$\text{(I.3.20)}\qquad \int_{\partial[\Delta_1\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z]} G^*\mu\wedge f(\zeta)\wedge\varphi(z)=0.$$

En considérant les divers segments orientés constituant le bord de Δ_1, (I.3.20) s'écrit encore :

$$\text{(I.3.21)}\qquad \int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z}(-F_3^*\mu+F_2^*\mu-F_1^*\mu)\wedge\psi=0.$$

D'après (I.3.21) et (I.3.17), on obtient finalement :

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = \int_{I \times \partial\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} F_3^* \mu \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z). \tag{I.3.22}$$

On a donc une solution tangentielle u donnée par

$$u(z) = \frac{1}{c_n} \int_{I \times \partial\Omega_\zeta} F_3^* \mu \wedge f(\zeta).$$

$F_3^* \mu$ désignant par abus de langage, dans cette formule, la composante de degré 1 en t, $(p, q-1)$ en z, et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de $F_3^* \mu$.

THÉORÈME 3.2. — *Soit s_1 et s_2 deux sections de classe C^1 du fibré E, définies respectivement sur $(\partial\Omega_\zeta \times \overline{\Omega}_z) \setminus \Delta$ et $(\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z) \setminus \Delta$, et vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\operatorname{Re} \langle \xi_i, \zeta - z \rangle > 0$, $i = 1, 2$;

(ii) *s_1 est holomorphe en z, et s_2 est holomorphe en ζ;*

(iii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega_\zeta \times \partial\Omega_\varepsilon} F_1^* \mu \wedge \psi = \int_{I \times \partial\Omega \times \partial\Omega} F_1^* \mu \wedge \psi,$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega_\varepsilon \times \partial\Omega_z} F_2^* \mu \wedge \psi = \int_{I \times \partial\Omega \times \partial\Omega} F_2^* \mu \wedge \psi,$

où F_1 et F_2 sont définies par (I.3.14), *et où $\psi = f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$.*

Alors la $(p, q-1)$-forme u, définie par

$$u(z) = \frac{1}{c_n} \int_{I \times \partial\Omega_\zeta} (F_3^* \mu) \wedge f(\zeta), \tag{I.3.23}$$

où $z \in \partial\Omega$, est (*lorsque* $0 < q < n$) *solution de l'équation $d_b'' u = f$, au sens de* (I.2.4).

F_3 est l'application $I \times \partial\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z \to E$,

$$(t, \zeta, z) \mapsto (t \xi_1 + (1-t) \xi_2, \zeta, z).$$

4. Construction des sections du fibré E

Il est clair que nous pouvons utiliser pour les sections s_1 et s_2 du théorème 3.2, les différentes sections construites par HENKIN [10], I. LIEB [7], RAMIREZ [28], OVRELID [26].

Le seul problème nouveau est la construction de la section s_h du théorème 3.1. Lorsque Ω est strictement convexe (*cf.* l'introduction), on pose

$$(\mathrm{I}.4.1)\qquad \begin{cases} P_j(\zeta) = \dfrac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ P(\zeta) = (P_1(\zeta), P_2(\zeta), \ldots, P_n(\zeta)). \end{cases}$$

On définit s_h par la formule

$$(\mathrm{I}.4.2)\qquad \xi_h = -\rho(\zeta)\frac{P(z)}{\langle P(z), \zeta - z\rangle} + P(\zeta),$$

lorsque $(\zeta, z) \in (\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z)\setminus\Delta$

$$\xi_h = P(\zeta),$$

lorsque $(\zeta, z) \in (\partial\Omega_\zeta \times \overline{\Omega}_z)\setminus\Delta$.

Comme $\rho(\zeta) = 0$ pour $\zeta \in \partial\Omega$, les deux définitions coïncident sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$. La section s_h est de classe C^1 sur $\partial(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})\setminus\Delta$. ρ étant strictement convexe, la formule de Taylor montre qu'il existe une constante $c > 0$, telle que

$$(\mathrm{I}.4.3)\qquad \begin{cases} \rho(z) - \rho(\zeta) \geqslant 2\,\mathrm{Re}\langle P(\zeta), z - \zeta\rangle + c\,|z - \zeta|^2, \\ \qquad \text{pour} \quad z \quad \text{et} \quad \zeta \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

On a donc

$$(\mathrm{I}.4.4)\qquad 2\,\mathrm{Re}\langle P(\zeta), \zeta - z\rangle \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + c\,|z - \zeta|^2.$$

Ce qui montre que $\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle > 0$ sur $(\partial\Omega_\zeta \times \overline{\Omega}_z)\setminus\Delta$. D'après (I.4.2) et (I.4.3), on a sur $\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z$:

$$\langle \xi_h, \zeta - z\rangle = -\rho(\zeta) + \langle P(\zeta), \zeta - z\rangle,$$

$$(\mathrm{I}.4.5)\qquad 2\,\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle \geqslant -\rho(\zeta) + c\,|\zeta - z|^2.$$

On a bien $\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle > 0$ sur $\overline{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z\setminus\Delta$.

Remarque. — Dans le cas de la boule unité, on a simplement

$$\xi_h = -(1 - |\zeta|^2)\frac{\bar z}{1 - \langle \zeta, \bar z\rangle} + \bar\zeta \qquad \text{et} \qquad \langle \xi_h, \zeta - z\rangle = 1 - \langle \bar\zeta, z\rangle$$

$$\text{pour} \quad |\zeta| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |z| = 1.$$

Examinons maintenant le cas général d'un *domaine strictement pseudo-convexe.* Il est naturel de remplacer la section $P(\zeta)$ du cas strictement convexe, par l'une des sections $P(\zeta, z)$, holomorphe en z, construite dans [10], [7] ou [26]. Il est d'autre part très commode d'avoir une estimation de $\operatorname{Re}\langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle$, nous avons donc été amené à utiliser la section de LIEB-RAMIREZ ([7] et [28]) qui fournit une telle estimation. Mais la section de Lieb-Ramirez $P(\zeta, z)$ n'est de classe C^1 que si le bord est de classe C^3, car la construction de Ramirez utilise le polynôme en z « canonique »

$$\textstyle\sum_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)\dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta_i} - \sum_{i,j}(\zeta_i - z_i)(\zeta_j - z_j)\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j},$$

qui est de classe C^1 en ζ quand ρ est de classe C^3.

Il nous faut donc remplacer le polynôme de Ramirez [28] par le polynôme $A(\zeta, z)$ d'Ovrelid [26], qui est de classe C^1 en ζ, quand ρ est seulement *de classe* C^2. On peut aussi utiliser le polynôme proposé par RANGE et SIU [29]. D'après N. OVRELID ([26] p. 146 et 147), on a le lemme suivant.

LEMME 4.1. — *Il existe des constantes C, ε, $\delta > 0$ et une fonction $A(\zeta, z) \in \mathscr{C}^1(V_\varepsilon \times \mathbf{C}^n)$ telle que*

(i) *$A(\zeta, z)$ est un polynôme holomorphe du second degré en z;*

(ii) $2\operatorname{Re} A(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta) - \rho(z) + C\,|\zeta - z|^2$, *pour* $\zeta \in V_\varepsilon$ *et* $|\zeta - z| < \delta$;

(iii) $A(\zeta, \zeta) = 0$;

(iv) $d_\zeta A(\zeta, z)\big|_{\zeta = z} = -d_z A(\zeta, z)\big|_{\zeta = z} = d'\rho(z)$.

On remarque que les seules propriétés du polynôme « canonique », utilisées par RAMIREZ ([28] p. 181 à 183), sont les propriétés (i), (ii) et (iii). On peut donc remplacer le polynôme de Raminez par le polynôme $A(\zeta, z)$ qui est classe C^1 en ζ. D'après RAMIREZ ([28], Satz 1, p. 181), on a le lemme ci-après.

LEMME 4.2. — *Il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $g(\zeta, z)$ $\mathscr{C}^1(V_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon)$ telle que :*

(*a*) *g est holomorphe en z,*

(*b*) $\operatorname{Re} g(\zeta, z) > 0$ *pour* $(\zeta, z) \in (\partial\Omega \times \bar{\Omega}) \setminus \Delta$,

(*c*) $g(\zeta, \zeta) = 0$ *pour* $\zeta \in V_\varepsilon$.

D'après la propriété (*c*) (*cf.* [28]), on peut trouver $P(\zeta, z)$ de *classe* C^1 dans $V_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$, holomorphe en z tel que

$$g(\zeta, z) = \langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle. \tag{I.4.6}$$

De plus, d'après [28] (p. 182 et 183), ou d'après LIEB ([7] p. 32), g admet pour $|\zeta - z| < \delta$ (δ assez petit) la représentation suivante

$$g(\zeta, z) = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \chi_i(\zeta) g_i(\zeta, z), \tag{I.4.7}$$

où les χ_i forment une partition C^∞ de l'unité au voisinage de V_ε, et où $g_i(\zeta, z)$ est du type suivant :

$$g_i(\zeta, z) = \frac{A(\zeta, z)}{1 + A(\zeta, z).(h_i - c)}. \tag{I.4.8}$$

$h_i(\zeta, z)$ est holomorphe en z, définie pour $|\zeta - z| < \delta$, et ζ appartenant à un voisinage du support de χ_i. $c \in \mathbf{R}$ est choisie de sorte que

$$\operatorname{Re}(h_i - c) > 0, \qquad \text{pour} \quad \zeta \in \text{Support } \chi_i \quad \text{et} \quad |\zeta - z| < \delta. \tag{I.4.9}$$

Remarque 4.1. — Quitte à multiplier $P(\zeta, z)$ par une fonction $\chi(\zeta)$ de classe C^∞, positive, à support dans V_ε, égale à 1 au voisinage de $V_{\varepsilon/2}$, on peut toujours supposer que $P(\zeta, z)$ est définie dans $\Omega_{-\varepsilon} \times \Omega_{-\varepsilon}$ et que $P = 0$ quand $\zeta \notin V_\varepsilon$.

On définit alors la section s_h en posant

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_h = -\rho(\zeta) \dfrac{P(z, \zeta)}{\langle P(z, \zeta), \zeta - z \rangle} + P(\zeta, z), \\ \qquad \text{pour} \quad (\zeta, z) \in \partial(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}). \end{array}\right. \tag{I.4.10}$$

Vérifions la condition (i) du théorème 3.1, on a

$$\langle \xi_h, \zeta - z \rangle = -\rho(\zeta) + \langle P(\zeta, z), \zeta - z \rangle, \tag{I.4.11}$$

$$\langle \xi_h, \zeta - z \rangle = -\rho(\zeta) + g(\zeta, z). \tag{I.4.12}$$

D'après (I.4.7) et (I.4.8), on a (pour $\zeta \in V_\varepsilon$ et $|\zeta - z| < \delta$) :

$$\operatorname{Re} g = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \chi_i(\zeta) \dfrac{\operatorname{Re} A + |A|^2 \operatorname{Re}(h_i - c)}{|1 + A(h_i - c)|^2}. \tag{I.4.13}$$

D'après (I.4.9), il en résulte

$$\operatorname{Re} g \geqslant \operatorname{Re} A \textstyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\chi_i(\zeta)}{|1 + A(h_i - c)|^2}. \tag{I.4.14}$$

Comme $A(\zeta, \zeta) = 0$, pourvu que δ soit assez petit, on aura

$$\frac{1}{2} < \textstyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\chi_i(\zeta)}{|1 + A(h_i - c)|^2} < \dfrac{3}{2}. \tag{I.4.15}$$

D'autre part, d'après le lemme 4.1, on a

$$2\,\mathrm{Re}\,A(\zeta, z) \geqslant \rho(\zeta)+c\,|\zeta-z|^2. \tag{I.4.16}$$

D'après (I.4.14), (I.4.15), et (I.4.16), on a donc

$$\mathrm{Re}\,g(\zeta, z) \geqslant \frac{3}{4}\rho(\zeta)+\frac{c}{4}|\zeta-z|^2. \tag{I.4.17}$$

Tenant compte de (I.4.12), on obtient :

$$4\,\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta-z\rangle \geqslant -\rho(\zeta)+c\,|\zeta-z|^2 > 0, \tag{I.4.18}$$

pour $(\zeta, z) \in \partial(\Omega\times\Omega)\setminus\Delta$ et $|\zeta-z| < \delta$.

Pour $|\zeta-z| \geqslant \delta$, $\zeta \in \partial\Omega$ et $z \in \overline{\Omega}$, on a, d'après le lemme 4.2 :

$$\mathrm{Re}\,g(\zeta, z) > 0.$$

Soit $m > 0$ la borne inférieure de $\mathrm{Re}\,g$ sur le compact $|\zeta-z| \geqslant \delta$ et $(\zeta, z) \in \partial\Omega\times\overline{\Omega}$. g étant continu, il existe un voisinage $V_{\varepsilon'}$ de $\partial\Omega$ ($\varepsilon > \varepsilon' > 0$), tel que, pour $|\zeta-z| \geqslant \delta$, $\zeta \in V_{\varepsilon'}$ et $z \in \overline{\Omega}$, on ait

$$\mathrm{Re}\,g(\zeta, z) \geqslant \frac{m}{2},$$

d'où

$$\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta-z\rangle \geqslant -\rho(\zeta)+\frac{m}{2}. \tag{I.4.19}$$

Quitte à remplacer ε par ε' et à utiliser la remarque 4.1, on obtient dans tous les cas :

$$\mathrm{Re}\langle \xi_h, \zeta-z\rangle > 0, \qquad \text{pour} \quad (\zeta, z) \in \partial(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})\setminus\Delta.$$

Nous auront également besoin d'estimer $\mathrm{Im}\,g$:

$$\mathrm{Im}\,g = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \chi_i \dfrac{\mathrm{Im}\,A+|A|^2\,\mathrm{Im}\,h_i}{|1+A(h_i-c)|^2}. \tag{I.4.20}$$

Comme $A(\zeta, z)$ est $O(|\zeta-z|)$ et que h_i est de classe C^1 sur le support de χ_i, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$|\mathrm{Im}\,g| \geqslant C_1\,|\mathrm{Im}\,A|-C_2\,|\zeta-z|^2, \tag{I.4.21}$$

pour $|\zeta-z| \leqslant \delta$, δ étant assez petit.

En définitive, nous avons d'après (I.4.18) et (I.4.21) démontré le lemme suivant

LEMME 4.3. — *La section s_h, définie par*

$$\xi_h = -\rho(\zeta)\frac{P(z,\zeta)}{\langle P(z,\zeta), \zeta - z\rangle} + P(\zeta, z),$$

vérifie les conditions :

(*a*) $\operatorname{Re}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle > 0$ *pour* $(\zeta, z) \in \partial(\Omega \times \Omega)\setminus\Delta$.

(*b*) $4 \operatorname{Re}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle \geqslant -\rho(\zeta) + c\,|\zeta - z|^2$,
pour $\zeta \in V_\varepsilon$ *et* $|\zeta - z| \leqslant \delta$ *où* ε *et* δ *sont* > 0 *assez petits.*

(*c*) $|\operatorname{Im} g| \geqslant C_1\,|\operatorname{Im} A| - C_2\,|\zeta - z|^2$, *pour* $|\zeta - z| \leqslant \delta$ *où* C_1 *et* C_2 *sont des constantes.*

Remarque 4.2. — D'après I. LIEB (*cf.* [7], p. 32), on peut choisir les h_i de sorte que $|h_i|$ soit $O(|\zeta - z|^2)$, il en résulte qu'on a

$$|\operatorname{Im} g| \geqslant C_1'\,|\operatorname{Im} A| - C_2'\,|\zeta - z|^4.$$

Mais l'estimation du lemme nous suffira.

Remarque 4.3. — $\langle \xi_h, \zeta - z\rangle = -\rho(\zeta) + g(\zeta, z)$ est holomorphe en z et non nul pour $\zeta \in V_\varepsilon \cap \Omega$ et $z \in \overline{\Omega}$.

Cette propriété nous sera utile au paragraphe 5 pour améliorer la solution donnée par le théorème 3.1.

Nous aurons besoin ultérieurement des estimations suivantes, en désignant par $V_{\varepsilon,\delta}$ l'ensemble $\{(\zeta, z); \zeta \in V_\varepsilon \text{ et } |\zeta - z| < \delta\}$.

LEMME 4.4 :

(*a*) *Pour* $(\zeta, z) \in V_{\varepsilon,\delta}$, $\zeta \in \overline{\Omega}$ *et* $z \in \partial\Omega$, *on a*

$$4\,|\langle \xi_h, \zeta - z\rangle| \geqslant -\frac{1}{2}\rho(\zeta) + \frac{C}{2}|\zeta - z|^2 + C_3\,|\operatorname{Im} A(\zeta, z)|.$$

(*b*) *Pour* $\zeta \in \partial\Omega$, $z \in \overline{\Omega}$, *et* $|\zeta - z| < \delta$, *on a*

$$4\,|\langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle| > -\frac{1}{2}\rho(z) + \frac{C}{2}|\zeta - z|^2 + C_3\,|\operatorname{Im} A(\zeta, z)|.$$

(*c*) *Pour* $z \in \partial\Omega$, $\zeta \in \overline{\Omega}$ *et* $|\zeta - z| < \delta$, *on a*

$$4\,|\langle P(z, \zeta), \zeta - z\rangle| \geqslant -\frac{1}{2}\rho(\zeta) + \frac{C}{2}|\zeta - z|^2 + C_3\,|\operatorname{Im} A(z, \zeta)|.$$

(*a*) est une conséquence triviale du lemme 4.3 (*b*) et (*c*) puisque

$$\operatorname{Im}\langle \xi_h, \zeta - z\rangle = \operatorname{Im} g(\zeta, z).$$

On peut prendre par exemple, $C_3 = \min(C_1, CC_1/4\, C_2)$.

Pour montrer (*b*), on utilise (I.4.7), (I.4.14), (I.4.15) et lemme 4.1 (ii), on obtient donc :

$$\text{(I.4.22)} \quad 4\operatorname{Re}\langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle \geqslant 2\operatorname{Re} A(\zeta, z) \geqslant -\rho(z) + C\,|\zeta - z|^2$$

(puisque $\zeta \in \partial\Omega$ et $z \in \overline{\Omega}$), pour $|\zeta - z| < \delta$.

D'après le lemme 4.3 (*c*), on a

$$\text{(I.4.23)} \qquad |\operatorname{Im}\langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle| \geqslant C_1\,|\operatorname{Im} A| - C_2\,|\zeta - z|^2.$$

(*b*) résulte alors de (I.4.22) et (I.4.23).

Remarque 4.4. — Toutes les estimations du lemme 4 sont des conséquences du lemme 4.3 (*c*). Or il est clair que dans le lemme 4.3 (*c*) on peut remplacer A par n'importe quelle fonction $B(\zeta, z)$ vérifiant :

$$|\operatorname{Im} A| = |\operatorname{Im} B| + O(|\zeta - z|^2).$$

Dans le lemme 4.4 on peut donc remplacer A par une telle fonction B, en modifiant convenablement la constante C_3. Par exemple, on a

$$A(\zeta, z) = -A(z, \zeta) + O(|\zeta - z|^2),$$

on peut donc prendre $B(\zeta, z) = A(z, \zeta)$.

5. Formules explicites pour la résolution de l'opérateur d''

D'après le théorème 3.1, on a une solution tangentielle de $d''_b u = f$, donnée par

$$u(z) = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega} (S_h^* \mu) \wedge f(\zeta).$$

Il nous suffit donc d'expliciter la composante $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de $S_h^*\,\mu$. En fait, le calcul explicite de $S_h^*\,\mu$ va faire apparaître un certain nombre de termes triviaux que nous supprimerons, et nous allons donc modifier la solution u, donnée par le théorème 3.1. Nous traitons d'abord le cas particulièrement simple et important des (0,1)-formes.

Pour alléger l'écriture, posons

$$\text{(I.5.1)} \qquad Q(\zeta, z) = P(z, \zeta)$$

P est holomorphe en z, et Q holomorphe en ζ. On a alors

$$(\text{I}.5.2)\qquad \xi = -\rho(\zeta)\frac{Q}{\langle Q, \zeta - z\rangle} + P,$$

(en supprimant l'indice h dans ξ_h pour simplifier).

La composante $(n, n-1)$ en ζ et $(0,0)$ en z de $S_h^* \mu$ est

$$(\text{I}.5.3)\qquad \nu = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\xi_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n} d''_\zeta \xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d''_\zeta \xi_i} \wedge \ldots \wedge d''_\zeta \xi_n \wedge \omega(\xi)$$

Des calculs immédiats montrent que

$$(\text{I}.5.4)\qquad d''_\zeta \xi_i = -\frac{Q_i}{\langle Q, \zeta - z\rangle} d''_\zeta \rho + d''_\zeta P_i,$$

$$(\text{I}.5.5)\qquad \begin{aligned} \nu = {} & \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\xi_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n} (\Lambda_{j\neq i} d''_\zeta P_j) \wedge \omega(\zeta) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \frac{\xi_i Q_j - \xi_j Q_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} d''\rho \\ & \wedge (\Lambda_{k\neq i, j} d''_\zeta P_k) \wedge \omega(\zeta), \end{aligned}$$

$$(\text{I}.5.6)\qquad \xi_i Q_j - \xi_j Q_i = P_i Q_j - P_j Q_i.$$

D'après (I.5.2) et (I.5.6), on obtient donc :

$$(\text{I}.5.7)\qquad \begin{aligned} \nu = {} & -\frac{\rho}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} Q_i (\Lambda_{j\neq i} d''_\zeta P_j) \wedge \omega(\xi) \\ & + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{P_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n} \Lambda_{j\neq i} d''_\zeta P_j \wedge \omega(\zeta) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \frac{P_i Q_j - P_j Q_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} d''\rho \\ & \wedge (\Lambda_{k\neq i, j} d''_\zeta P_k) \wedge \omega(\zeta). \end{aligned}$$

Le deuxième terme est holomorphe en z (*cf.* remarque 4.3), on obtient donc une nouvelle solution $\tilde{u}$ de (I.2.4), en le supprimant

$$(\text{I}.5.8)\qquad \tilde{u} = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega_\zeta} \tilde{\nu} \wedge f(\zeta),$$

avec

$$(\text{I}.5.9)\quad \tilde{\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i \rho\, Q_i}{[-\rho+\langle P, \zeta-z\rangle]^n \langle Q, \zeta-z\rangle} \bigwedge\nolimits_{j\neq i} d''_\zeta P_j \wedge \omega(\zeta)$$
$$+\sum\nolimits_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}(P_i Q_j - P_j Q_i)}{[-\rho+\langle P, \zeta-z\rangle]^n \langle Q, \zeta-z\rangle} d''\rho$$
$$\wedge (\bigwedge\nolimits_{k\neq i,\, j} d''_\zeta P_k) \wedge \omega(\zeta).$$

On examine maintenant le cas général des (p, q)-formes. Les termes « triviaux » dans $S_h^* \mu$ sont donnés par le lemme suivant

LEMME 5.1. — *Soit* β *et* γ *deux formes sur* $\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z$, β *de bidegré* $(0,0)$ *en* z *et* $(n-p, n-q)$ *en* ζ, γ *de bidegré* $(p, q-2)$ *en* z *et* $(0,0)$ *en* ζ. *On suppose les coefficients de* β *holomorphes par rapport à* z. *On a alors :*

$$\int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} \beta \wedge d''_z \gamma \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z) = 0.$$

En effet φ étant d'' fermée, on a

$$\int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} \beta \wedge d''_z \gamma \wedge f \wedge \varphi = \int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} \beta \wedge f(\zeta) \wedge d''_z(\gamma \wedge \varphi).$$

D'après le théorème de Fubini, β étant holomorphe en z, on a

$$\int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} \beta \wedge d''_z \gamma \wedge f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega_z} d''_z \left[\gamma \wedge \varphi \int_{\Omega_\zeta} \beta \wedge f(\zeta)\right].$$

$\gamma \wedge \varphi$ étant de bidegré $(n, n-2)$ en z, la formule de Stokes montre que la deuxième intégrale est nulle.

Soit $\omega_p(\zeta, z)$ la composante de type $(p, 0)$ en z et $(n-p, 0)$ en ζ de la forme $\omega(\zeta-z)$.

On cherche la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de la forme

$$(\text{I}.5.10)\quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} \xi_i}{\langle \xi, \zeta-z\rangle^n} d''\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d''\xi_i} \wedge \ldots \wedge d''\xi_n \wedge \omega(\zeta-z).$$

On a, d'après (I.5.2) :

$$(\text{I}.5.11)\qquad d''\xi_i = \alpha_i - \frac{Q_i}{\langle Q, \zeta-z\rangle} d''_\zeta \rho,$$

avec

$$(\text{I}.5.12)\qquad \alpha_i = -\rho\, d''_z\left[\frac{Q_i}{\langle Q, \zeta-z\rangle}\right] + d''_\zeta P_i.$$

Il en résulte, comme pour la formule (I.5.7), qu'on a

$$(\mathrm{I}.5.13)\quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i \rho\, Q_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} (\textstyle\bigwedge_{j\neq i} \alpha_j) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} P_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle} (\textstyle\bigwedge_{j\neq i} \alpha_j) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j} (P_i\, Q_j - P_j\, Q_i)}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} d''_\zeta \rho$$
$$\wedge\, (\textstyle\bigwedge_{k\neq i,\, j} \alpha_k) \wedge \omega(\zeta - z).$$

Comme $\alpha_i = -\rho\, d''_z\, [Q_i/\langle Q,\ \zeta - z\rangle] + d''_\zeta\, P_i$, la composante, de type $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ, du deuxième terme est une somme de formes du type $\beta \wedge d''_z\, \gamma$, où β et γ vérifient les hypothèses du lemme 5.1.

On obtient donc une autre solution tangentielle du d'', en considérant au lieu de μ, la forme μ' définie par

$$(\mathrm{I}.5.14)\quad \mu' = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i \rho\, Q_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} (\textstyle\bigwedge_{j\neq i} \alpha_j) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j} (P_i\, Q_j - P_j\, Q_i)}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle} d''_\zeta\, \rho \wedge (\textstyle\bigwedge_{k\neq i,\, j} \alpha_k) \wedge \omega(\zeta - z).$$

Écrivons maintenant α_i sous la forme

$$(\mathrm{I}.5.15)\qquad \alpha_i = \beta_i - \rho\, Q_i\, d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right),$$

avec

$$(\mathrm{I}.5.16)\qquad \beta_i = -\frac{\rho}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\, d''_z\, Q_i + d''_\zeta\, P_i.$$

En posant $\mu'' = \langle \xi,\ \zeta - z\rangle^n \langle Q,\ \zeta - z\rangle\, \mu'$, un calcul immédiat donne la formule suivante :

$$(\mathrm{I}.5.17)\quad \mu'' = \sum_i (-1)^i \rho\, Q_i (\textstyle\bigwedge_{j\neq i} \beta_j) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i,\, j} (-1)^{i+j-1} \varepsilon(i, j)\, Q_i\, Q_j\, \rho^2\, d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right)$$
$$\wedge (\textstyle\bigwedge_{k\neq i,\, j} \beta_k) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i,\, j} (-1)^{i+j} \varepsilon(i, j)\, P_i\, Q_j\, d''_\zeta\, \rho \wedge (\textstyle\bigwedge_{k\neq i,\, j} \beta_k) \wedge \omega(\zeta - z)$$
$$+\sum_{i,\, j,\, k} (-1)^{i+j+k} \varepsilon(i, j, k)\, P_i\, Q_j\, Q_k\, \rho\, d''_\zeta\, \rho$$
$$\wedge\, d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right) \wedge (\textstyle\bigwedge_{l\notin (i,\, j,\, k)} \beta_l) \wedge \omega(\zeta - z),$$

où $\varepsilon(i, j)$ et $\varepsilon(i, j, k)$ sont les signatures des permutations (i, j), respectivement (i, j, k) ($\varepsilon(i, j) = 0$, $\varepsilon(i, j, k) = 0$ si i, j et k ne sont pas distincts). ε étant antisymétrique, le deuxième et le quatrième termes sont nuls, on obtient :

$$\text{(I.5.18)} \quad \mu'' = \sum_i (-1)^i \rho\, Q_i (\Lambda_{j \neq i} \beta_j) \wedge \omega(\zeta - z) + \sum_{i-j} (-1)^{i+j} (P_i Q_j - P_j Q_i) d''_\zeta \rho \wedge (\Lambda_{k \neq i, j} \beta_k) \wedge \omega(\zeta - z).$$

Remarquons enfin que, d'après (I.5.16), la composante $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de μ' est la même que celle de la forme ν, définie par

$$\text{(I.5.19)} \quad \nu = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}(-\rho)^q Q_i}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle^q} \Lambda_{j \neq i} (d''_z Q_j + d''_\zeta P_j) \wedge \omega(\zeta - z) + \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}(-\rho)^{q-1}(P_i Q_j - P_j Q_i)}{\langle \xi, \zeta - z\rangle^n \langle Q, \zeta - z\rangle^q} d'' \rho \wedge (\Lambda_{k \neq i, j} d''_z Q_k + d''_\zeta P_k) \wedge \omega(\zeta - z).$$

On obtient donc le résultat essentiel de cet article.

THÉORÈME 5.1. — *Si f est une forme d''-fermée, de type (p, q) de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, on a une solution u de type $(p, q-1)$ de l'équation $d''_b u = f$, au sens de* (I.2.4), *donnée explicitement par*

$$u(z) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega_\zeta} \tilde{\nu} \wedge f(\zeta),$$

où $z \in \partial\Omega$ et où $\tilde{\nu}$ est la composante de type $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de la forme

$$\nu = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}(-\rho)^q Q_i}{[-\rho + \langle P, \zeta - z\rangle]^n \langle Q, \zeta - z\rangle^q} \Lambda_{j \neq i} (d''_z Q_j + d''_\zeta P_j) \wedge \omega_p(\zeta, z) + \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}(-\rho)^{q-1}(P_i Q_j - P_j Q_i)}{[-\rho + \langle P, \zeta - z\rangle]^n \langle Q, \zeta - z\rangle^q} d''_\zeta \rho \wedge \Lambda_{k \neq i, j} (d''_z Q_k + d''_\zeta P_k) \wedge \omega_p(\zeta, z),$$

où ω_p est la composante $(p, 0)$ en z $(n-p, 0)$ en ζ de $\omega(\zeta - z)$, $P(\zeta, z)$ étant définie par (I.4.6), *et avec $Q(\zeta, z) = P(z, \zeta)$ (ρ désigne $\rho(\zeta)$).*

On remarquera que $P_i Q_j - P_j Q_i$ est nul pour $\zeta = z$.

Il nous reste maintenant à expliciter la solution donnée par le théorème 3.2.

Avec les notations du théorème 3.2, on choisit

$$\xi_1 = P(\zeta, z) \quad \text{et} \quad \xi_2 = -Q(\zeta, z) = -P(z, \zeta).$$

La solution u est donnée par

$$u(z)=\frac{1}{c_n}\int_{I\times\partial\Omega_\zeta}F^*\mu\wedge f(\zeta), \tag{I.5.20}$$

où F est l'application

$$I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z\to E,$$
$$(t,\zeta,z)\to(t\,P-(1-t)\,Q,\zeta,z).$$

Seule intervient la composante de $F^*\mu$ de degré 1 en t, de bidegré $(p,q-1)$ en z et $(n-p,n-q-1)$ en ζ. On a

$$F^*\mu=\textstyle\sum_{i=1}^n\dfrac{(-1)^{i-1}F_i}{\langle F,\zeta-z\rangle^n}dF_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dF_i}\wedge\ldots\wedge dF_n\wedge\omega(\zeta-z). \tag{I.5.21}$$

La composante cherchée est donc la composante $(p,q-1)$ en z et $(n-p,n-q-1)$ en ζ de la forme

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i<j}\dfrac{(-1)^{i+j-1}}{\langle F,\zeta-z\rangle^n}\left(F_i\dfrac{\partial F_j}{\partial t}-F_j\dfrac{\partial F_i}{\partial t}\right)dt\\&\wedge(\textstyle\bigwedge_{k\neq i,j}d''F_k)\wedge\omega(\zeta-z).\end{aligned} \tag{I.5.22}$$

Soit encore par un calcul élémentaire

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\dfrac{P_iQ_j-P_jQ_i}{\langle F,\zeta-z\rangle^n}dt\\&\wedge\textstyle\bigwedge_{k\neq i,j}[t\,d''_\zeta P_k-(1-t)\,d''_z Q_k]\wedge\omega(\zeta-z).\end{aligned} \tag{I.5.23}$$

La composante cherchée est aussi la composante $(p,q-1)$ en z et $(n-p,n-q-1)$ en ζ de la forme

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i<j}\dfrac{(-1)^{i+j+q}(P_iQ_j-P_jQ_i)(1-t)^{q-1}t^{n-q-1}}{[t\langle P,\zeta-z\rangle-(1-t)\langle Q,\zeta-z\rangle]^n}dt\\&\wedge\textstyle\bigwedge_{k\neq i,j}(d''_zQ_k+d''_\zeta P_k)\wedge\omega(\zeta-z).\end{aligned} \tag{I.5.24}$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{q-1}t^{n-q-1}\,dt}{\langle t\,P-(1-t)\,Q,\zeta-z\rangle^n}=\frac{(-1)^{q-1}(q-1)!\,(n-q-1)!}{n!\,\langle P,\zeta-z\rangle^{n-q}\langle Q,\zeta-z\rangle^q}. \tag{I.5.25}$$

On obtient donc le théorème suivant :

THÉORÈME 5.2. — *Si f est une forme d''-fermée, de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, de type (p, q) (avec $0 < q < n$), il existe une solution $u \in \mathscr{C}^0_{p, q-1}(\partial\Omega)$ de l'équation $d''_b u = f$ au sens de* (I.2.4), *donnée à l'aide d'un noyau $\tilde{K}$ sur $\partial\Omega$:*

$$u(z) = \int_{\partial\Omega_\zeta} \tilde{K}(\zeta, z) \wedge f(\zeta),$$

où $z \in \partial\Omega$, et où $\tilde{K}(\zeta, z)$ est la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de la forme K :

$$K = c(n, q) \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j-1}(P_i Q_j - P_j Q_i)}{\langle P, \zeta - z\rangle^{n-q} \langle Q, \zeta - z\rangle^q} \bigwedge_{k=i,j} (d''_z Q_k + d''_\zeta P_k) \wedge \omega_p(\zeta, z),$$

$c(n, q)$ est la constante $((q-1)!\ (n-q-1)!)/c_n n!$ et $\omega_p(\zeta, z)$ est la composante $(p, 0)$ en z et $(n-p, 0)$ en ζ de $\omega(\zeta - z)$.

P et Q sont définis comme dans le théorème 5.1.

Dans le cas $n = 2$, il faut remplacer dans K le symbole

$$\bigwedge_{k \neq i, j} (d''_z Q_k + d''_\zeta P_k)$$

par la constante 1.

Remarque 5.1. — Dans le cas des (0,1)-forme, on a simplement

$$\tilde{K}(\zeta, z) = \frac{1}{nc_n} \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j-1}(P_i Q_j - P_j Q_i)}{\langle P, \zeta - z\rangle^{n-1} \langle Q, \zeta - z\rangle} (\wedge_{k \neq i, j} d''_\zeta P_k) \wedge \omega(\zeta).$$

Remarque 5.2. — Dans le cas où Ω est strictement convexe et ou f est de type (0,1), un calcul élémentaire (on a $P_j = \partial\rho/\partial\zeta_j$) donne la formule simple suivante pour K :

$$\tilde{K}(\zeta, z) = c'_n \frac{d'_\zeta[\langle P(z), \zeta\rangle] \wedge d'\rho \wedge (d'd''\rho)^{n-2}}{\langle P(\zeta), \zeta - z\rangle^{n-1} \langle P(z), \zeta - z\rangle},$$

où ρ est fonction de ζ, et où c'_n est une constante.

Remarque 5.3. — Toujours avec les hypothèses de la remarque précédente, la forme du théorème 5.1 s'écrit encore (par un calcul élémentaire) :

$$\tilde{\mathrm{v}} = c''_n \frac{[-\rho\, d'd''\rho + (n-1)\, d'\rho \wedge d''\rho] \wedge d'_\zeta[\langle P(z), \zeta\rangle] \wedge (d'd''\rho)^{n-2}}{[-\rho + \langle P(\zeta), \zeta - z\rangle]^n \langle P(z), \zeta - z\rangle},$$

ou encore

$$\tilde{\mathrm{v}} = c''_n \frac{\rho^n (d'd'' \operatorname{Log} - \rho)^{n-1} \wedge d'_\zeta[\langle P(z), \zeta\rangle]}{[-\rho + \langle P(\zeta), \zeta - z\rangle]^n \langle P(z), \zeta - z\rangle}.$$

6. Vérification des conditions aux limites

Il nous reste à vérifier les conditions (iii) des théorèmes 5.1 et 5.2. Nous avons besoin auparavant de quelques lemmes.

LEMME 6.1. — *Soit i_ε l'injection canonique de $\partial\Omega_\varepsilon$ dans $\mathbf{C}^n$ et α une $(n, n-2)$-forme sur $\bar{\Omega}$, on a*

$$i_\varepsilon^*(d''\rho \wedge \alpha) = 0. \; .$$

En effet, comme $\rho = -\varepsilon$ sur $\partial\Omega_\varepsilon$, on a

$$i_\varepsilon^*(d'\rho + d''\rho) = i_\varepsilon^*(d\rho) = 0.$$

D'où $i_\varepsilon^*(d''\rho \wedge \alpha) = -i_\varepsilon^*(d'\rho \wedge \alpha) = -i_\varepsilon^*(0) = 0$.

LEMME 6.2. — *Il existe des constantes C_4 et C_5 telles que, pour $\zeta \in \Omega$ et $z \in \partial\Omega$, on ait*

$$-\frac{\rho(\zeta)}{|\langle Q, \zeta - z \rangle|} \leqslant C_4 \quad \textit{et} \quad \frac{|\zeta - z|^2}{|\langle Q, \zeta - z \rangle|} \leqslant C_5.$$

Pour $(\zeta, z) \in V_{\varepsilon,\delta}$, les majorations résultent du lemme (4.4) (*c*). Pour $(\zeta, z) \notin V_{\varepsilon,\delta}$ et $(\zeta, z) \in \bar{\Omega} \times \partial\Omega$, les fonctions considérées sont continues.

Nous allons démontrer que

$$(I.6.1) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega \times \partial\Omega_\varepsilon} F^* \mu \wedge \psi$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{I \times \partial\Omega_\varepsilon \times \partial\Omega} F^* \mu \wedge \psi = \int_{I \times \partial\Omega \times \partial\Omega} F^* \mu \wedge \psi,$$

avec $\psi = f(\zeta) \wedge \varphi(z)$.

Par des considérations de bidegré, analogues à celles faites dans (I.5.21) et (I.5.22), nous voyons que seule compte la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de la forme

$$(I.6.2) \quad \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j-1}}{\langle F, \zeta - z \rangle^n} \left(F_i \frac{\partial F_j}{\partial t} - F_j \frac{\partial F_i}{\partial t} \right) dt \wedge (\Lambda_{k \neq i, j} d'' F_k) \wedge \omega(\zeta - z),$$

avec $F(t, \zeta, z) = t(\bar{\zeta} - \bar{z}) + (1-t)\,\xi_h$ (*cf.* (I.3.6)).

(I.6.2) s'écrit donc encore :

$$(I.6.3) \quad \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}}{\langle F, \zeta - z \rangle^n} [(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)\,\xi_j - (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)\,\xi_i]\, dt$$
$$\wedge (\Lambda_{k \neq i, j} d'' F_k) \wedge \omega(\zeta - z).$$

Envisageons d'abord le cas de l'intégrale sur $I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon$, dans ce cas

$$F(t,\bar{\zeta},\bar{z}) = t(\bar{\zeta}-\bar{z})+(1-t)P(\zeta,z). \tag{I.6.4}$$

Pour $|\zeta-z|<\delta$, on a, d'après (I.4.22) :

$$4\operatorname{Re}\langle F,\zeta-z\rangle \geqslant 4t|\zeta-z|^2+(1-t)C|\zeta-z|^2 \geqslant C|\zeta-z|^2,$$

en supposant $C\leqslant 4$. D'autre part, on a, d'après (I.4.23),

$$|\operatorname{Im}\langle F,\zeta-z\rangle| \geqslant (1-t)[C_1|\operatorname{Im}A|-C_2|\zeta-z|^2].$$

Il en résulte

$$4|\langle F,\zeta-z\rangle| \geqslant \frac{C}{2}|\zeta-z|^2+C_3(1-t)|\operatorname{Im}A|. \tag{I.6.5}$$

F étant de classe C^1 sur $(\partial\Omega\times\bar{\Omega})\setminus\Delta$, il est clair que (I.6.1) est vrai lorsqu'on restreint le domaine d'intégration à

$$(I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon)\cap\{(\zeta,z);\ |\zeta-z|\geqslant\eta\},\quad \text{pour chaque } \eta>0 \text{ fixé.}$$

Il nous suffit donc d'avoir une propriété d'uniforme intégrabilité de $F^*\mu$ au voisinage Δ.

De façon précise, nous montrerons, dans le paragraphe 7 (lemme 7.2), consacré aux estimations, qu'il existe une constante C_6 indépendante de η, ε et $\zeta\in\partial\Omega$ telle que

$$\int_{I\times[\partial\Omega_\varepsilon\cap B(\zeta,\eta)]} |\zeta-z|[C|\zeta-z|^2+2C_3(1-t)|\operatorname{Im}A|]^{-n}\,dt\,dS_\varepsilon(z) < C_6\,\eta\log^2\eta. \tag{I.6.6}$$

Compte tenu de (I.6.3), (I.6.4) et (I.6.5), la majoration (I.6.6) entraîne

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon}(F^*\mu)\wedge\psi = \int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z}(F^*\mu)\wedge\psi.$$

De plus (I.6.6) montre que $F^*\mu$ est intégrable sur $I\times\partial\Omega\times\partial\Omega$.

Dans le cas de l'intégrale sur $I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z$, on a

$$\begin{cases} F(t,\zeta,z) = t(\bar{\zeta}-\bar{z})+(1-t)\xi, \\ \xi = -\rho(\zeta)\dfrac{Q}{\langle Q,\zeta-z\rangle}+P. \end{cases} \tag{I.6.7}$$

D'après le lemme 4.3 (b) et (c), on a

$$4\operatorname{Re}\langle F,\zeta-z\rangle \geqslant 4t|\zeta-z|^2+C(1-t)|\zeta-z|^2 \geqslant C|\zeta-z|^2,$$
$$|\operatorname{Im}\langle F,\zeta-z\rangle| \geqslant (1-t)[C_1|\operatorname{Im}A|-C_2|\zeta-z|^2].$$

Il en résulte la même estimation que dans (I.6.5) :

$$4|\langle F, \zeta - z\rangle| \geqslant \frac{C}{2}|\zeta - z|^2 + C_3(1-t)|\operatorname{Im} A|. \tag{I.6.8}$$

Comme dans le cas précédent, il faut calculer la composante $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de la forme

$$\tau = \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}[(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)\xi_j - (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)\xi_i]}{\langle F, \zeta - z\rangle^n} dt \wedge (\Lambda_{k\neq i, j} d''F_k) \wedge \omega(\zeta - z). \tag{I.6.9}$$

Mais à la différence du cas précédent, ξ et F ne sont pas de classe C^1 dans $\bar{\Omega} \times \partial\Omega_z$, il nous faut étudier les termes ayant $Q, \zeta - z\rangle$ au dénominateur. Or d'après (I.6.7), on a

$$d''F_i = t(d\bar{\zeta}_i - d\bar{z}_i) + (1-t)d''\xi_i, \tag{I.6.10}$$

$$d''\xi_i = d''_\zeta P_i - \frac{Q_i}{\langle Q, \zeta - z\rangle} d''_\zeta \rho - \frac{\rho}{\langle Q, \zeta - z\rangle} d''_z Q_i - \rho\, Q_i d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right). \tag{I.6.11}$$

On peut donc écrire :

$$d''F_i = \gamma_i - \frac{(1-t)Q_i}{\langle Q, \zeta - z\rangle} d''_\zeta \rho - (1-t)\rho\, Q_i d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right), \tag{I.6.12}$$

avec

$$\gamma_i = t(d\bar{\zeta}_i - d\bar{z}_i) + (1-t)\left[d''_\zeta P_i - \frac{\rho}{\langle Q, \zeta - z\rangle} d''_z Q_i\right]. \tag{I.6.13}$$

D'après le lemme 6.1, les termes de $F^*\mu$, où apparaît $d''_\zeta \rho$, donnent des intégrales nulles sur $I \times \partial\Omega_\varepsilon \times \partial\Omega_z$. Dans le calcul de l'intégrale sur $I \times \partial\Omega_\varepsilon \times \partial\Omega_z$, il nous suffit donc de considérer la composante $(p, q-1)$ en z et $(n, n-q-1)$ en ζ de

$$\begin{aligned}\tau' = {} & \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \frac{\varepsilon(i,j)(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)\xi_j}{\langle F, \zeta - z\rangle^n} dt \wedge (\Lambda_{k\neq i,j}\gamma_k) \wedge \omega(\zeta - z) \\ & + \sum_{i,j,k} (-1)^{i+j+k} \frac{\varepsilon(i,j,k)(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)\xi_j Q_k \rho(1-t)}{\langle F, \zeta - z\rangle^n} dt \\ & \wedge d''_z\left(\frac{1}{\langle Q, \zeta - z\rangle}\right) \wedge (\Lambda_{l\notin(i,j,k)}\gamma_l) \wedge \omega(\zeta - z),\end{aligned} \tag{I.6.13}$$

où $\varepsilon(i, j)$ et $\varepsilon(i, j, k)$ sont les mêmes que dans (I.5.17).

Comme $\varepsilon(i, j, k)$ est antisymétrique, on obtient d'après (I.6.7) :

$$\text{(I.6.14)}\quad \tau' = \sum_{i,j}(-1)^{i+j}\frac{\varepsilon(i,j)(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i)\xi_j}{\langle F, \zeta-z\rangle^n}dt\wedge(\Lambda_{k\neq i,j}\gamma_k)\wedge\omega(\zeta-z)$$
$$-\sum_{i,j<k}(-1)^{i+j+k}\frac{\varepsilon(i,j,k)(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i)(P_j Q_k-P_k Q_j)}{\langle F, \zeta-z\rangle^n\langle Q, \zeta-z\rangle^2}$$
$$\times\rho(1-t)\,dt\wedge d''_z(\langle Q, \zeta-z\rangle)\wedge(\Lambda_{l\notin(i,j,k)}\gamma_l)\wedge\omega(\zeta-z).$$

D'après le lemme 6.2, les ξ_j sont bornés ainsi que les coefficients des formes γ_i. Les coefficients du premier terme dans (I.6.14) sont donc majorés par Cte $|\zeta-z|/|\langle F, \zeta-z\rangle|^n$. Comme $P_j Q_k-P_k Q_j$ est $O(|\zeta-z|)$ et que les coefficients de $d''_z(\langle Q, \zeta-z\rangle)$ sont $O(|\zeta-z|)$, les coefficients du deuxième terme de (I.6.14) sont majorés par

$$\text{Cte}\,\frac{|\zeta-z|}{|\langle F, \zeta-z\rangle|^n}\times\frac{-\rho}{|\langle Q, \zeta-z\rangle|}\times\frac{|\zeta-z|^2}{|\langle Q, \zeta-z\rangle|},$$

c'est-à-dire, d'après le lemme 6.2, par Cte $|\zeta-z|/|\langle F, \zeta-z\rangle|^n$.

Les coefficients de τ' sont donc tous $O(|\zeta-z|/|\langle F, \zeta-z\rangle|^n)$.

D'après (I.6.8), il nous suffira donc de démontrer la propriété d'uniforme intégrabilité suivante :

$$\text{(I.6.15)}\quad \int_{I\times[\partial\Omega_\varepsilon\cap B(z,\eta)]}|\zeta-z|\,[C|\zeta-z|^2+2C_3(1-t)|\operatorname{Im}A|]^{-n}$$
$$\times\,dt\,dS_\varepsilon(\zeta)<c'_6\,\eta\log^2\eta,$$

où c'_6 est indépendant de ε, η et $z\in\partial\Omega$. Il en résultera

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z}(F^*\mu)\wedge\psi=\int_{I\times\partial\Omega\times\partial\Omega}(F^*\mu)\wedge\psi.$$

Remarquons que, d'après N. Ovrelid ([26] p. 147), on a

$$A(\zeta, z)=-A(z,\zeta)+O(|\zeta-z|^2),$$

il en résulte que (I.6.15) est équivalente à (I.6.6) (*cf.* remarque 4.4).

Il nous reste maintenant à vérifier les conditions (iii) du théorème 3.2. La condition

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I\times\partial\Omega_\zeta\times\partial\Omega_\varepsilon}F_1^*\mu\wedge\psi=\int_{I\times\partial\Omega\times\partial\Omega}F_1^*\mu\wedge\psi$$

est exactement la même que celle du premier cas envisagé au début de ce paragraphe (puisque $\xi_1=P$).

La condition

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I\times\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_z} F_2^*\mu\wedge\psi = \int_{I\times\partial\Omega\times\partial\Omega} F_2^*\mu\wedge\psi,$$

se traite de façon tout à fait analogue à la précédente (on a $\xi_2 = Q$) en utilisant le lemme 4.4 (c), et conduit à la condition (I.6.6).

7. Estimations des solutions

Les théorèmes 5.1 et 5.2 ont été démontrés en supposant f de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$. Dans le paragraphe 8, nous montrerons qu'ils sont vrais avec des hypothèses beaucoup plus générales sur f. Mais le passage à la limite sur la régularité de f nécessite de disposer d'estimations pour la solution u et pour les noyaux $\tilde{v}$ et $\tilde{K}$. Ces estimations font l'objet du présent paragraphe. Nous démontrons également (I.6.6).

Pour chaque $\zeta \in V_{\varepsilon_0}$, nous utilisons en suivant [7], [10] et [26], un système de coordonnées dans $\mathbf{R}^{2n}$ ayant $\rho(z)-\rho(\zeta)$ et $\operatorname{Im} A(\zeta, z)$ comme deux premières coordonnées. D'après N. Ovrelid ([26] p. 150) et G. H. Henkin ([9], § 3), nous avons comme conséquence du lemme 4.1 (iv) et du théorème des fonctions implicites, le lemme suivant :

Lemme 7.1. — *Il existe des constantes ε_0, R_0 et $C_0 > 0$ et, pour chaque $\zeta \in \overline{V}_{\varepsilon_0}$, une application de classe C^1, $w_\zeta : B(\zeta, \varepsilon_0) \to \mathbf{R}^{2n}$), du type suivant*

$$z \mapsto (w_1 = \rho(z)-\rho(\zeta),\ w_2 = \operatorname{Im} A(\zeta, z),\ w_3, \ldots, w_{2n}),$$

avec $w_\zeta(\zeta) = 0$, et telle que w_ζ admette une application inverse $Z_\zeta : B(0, R_0) \to B(\zeta, \varepsilon_0)$, de classe C^1, vérifiant :

(i) $\| w'_\zeta(z) \| \leqslant C_0$ *pour tout* $z \in B(\zeta, \varepsilon_0)$;

(ii) $\| Z'_\zeta(w) \leqslant \| C_0$ *pour tout* $w \in B(0, R_0)$, *($w'_\zeta(z)$ désignant la dêrivée de w_ζ au point z).*

D'après le lemme 4.1 (iv), on a bien entendu un énoncé analogue en échangeant les rôles de ζ et z.

Lemme 7.2. — *Il existe une constante C_6, indépendante de η, de ε, et de $\zeta \in \partial\Omega$, telle que*

$$\int_{I\times[\partial\Omega_\varepsilon\cap B(\zeta,\eta)]} |\zeta-z|\,[C|\zeta-z|^2+2C_3(1-t)|\operatorname{Im} A|]^{-n} \times dt\, dS_\varepsilon(z) < C_6\,\eta\log^2\eta.$$

Soit J l'intégrale du lemme 7.2. Dans les estimations suivantes, C'_0 désignera une constante ne dépendant que de C_0. D'après le lemme 7.1, on a

$$J \leqslant C'_0 \int_{I \times \{ w_1 = -\varepsilon, | w | \leqslant C_0 \eta \}} | w | [C | w |^2 + 2 C_3 C_0^2 (1-t) | w_2 |]^{-n} \times dt\, dw_2 \ldots dw_{2n}.$$

Utilisant les coordonnées polaires pour les variables $w_3, \ldots, w_{2n}$, on obtient :

$$J \leqslant C'_0 \int_0^1 dt \int_0^{C_0\eta} dr \int_0^{C_0\eta} [r^2 + t w_2]^{-n+(1/2)} r^{2n-3}\, dw_2,$$

$$J \leqslant C'_0 \int_0^{C_0\eta} dr \int_0^{C_0\eta} dw_2 \int_0^1 [r^2 + t w_2]^{-1}\, dt,$$

$$J \leqslant C'_0 \int_0^{C_0\eta} dr \int_0^{C_0\eta} \log\left(1 + \frac{w_2}{r^2}\right) \frac{dw_2}{w_2},$$

$$J \leqslant C'_0 \int_0^{C_0\eta} dr \int_0^{C_0\eta r^{-2}} \log(1+u) \frac{du}{u}.$$

Par des majorations élémentaires $\left(\text{du type} \right.$

$$\left. \int_0^X \log(1+u) \frac{du}{u} < 1 + \log^2 2X \right),$$

on a encore

$$J \leqslant C'_0 \int_0^{C_0\eta} [1 + \log^2 (2 C_0 \eta r^{-2})]\, dr = C'_0 C_0 \eta \int_0^1 \left[1 + \log^2\left(\frac{2}{C_0 \eta t}\right)\right] dt$$

Soit

$$J \leqslant C_6 \eta \log^2 \eta.$$

Le lemme 7.2 achève de justifier les passages à la limite du paragraphe 6.

Le lemme suivant étudie les propriétés de sommabilité uniforme sur le bord $\partial\Omega_z$ des noyaux du théorème 5.1.

LEMME 7.3. — *Il existe pour $\alpha > n$ une constante $C_7(\alpha)$ et des constantes C_8 et C_9 indépendantes de $\zeta \in \Omega$, telles que :*

(*a*) $\displaystyle\int_{\partial\Omega_z} [-\rho(\zeta) + | \zeta - z |^2 + | \operatorname{Im} A(\zeta, z) |]^{-\alpha}\, dS(z) < C_7(\alpha) [-\rho(\zeta)]^{n-\alpha};$

$$(b) \qquad \int_{\partial\Omega_z} \frac{[-\rho(\zeta)]^q \, dS(z)}{|-\rho+\langle P, \zeta-z\rangle|^n \, |\langle Q, \zeta-z\rangle|} \leqslant C_8;$$

$$(c) \quad \int_{\partial\Omega_z} \frac{[-\rho(\zeta)]^{q-1} \, |P_i Q_j - P_j Q_i|}{|-\rho+\langle P, \zeta-z\rangle|^n \, |\langle Q, \zeta-z\rangle|} \, dS(z) \leqslant C_9 [-\rho(\zeta)]^{-1/2}$$

Il suffit de montrer l'estimation (a) pour $\zeta \in V_{\varepsilon_0} \cap \Omega$, et on peut restreindre l'intégration sur $\partial\Omega_z$ à $\partial\Omega_z \cap B(\zeta, \varepsilon_0)$, de telle sorte qu'on peut utiliser le changement de variable du lemme 7.1. Appelons $J(\alpha)$ l'intégrale de (a), on a

$$J(\alpha) \leqslant C_0' \int_{\{w_1=0, \, |w| \leqslant C_0\varepsilon_0\}} [-\rho(\zeta) + C_0^{-2} |w|^2 + |w_2|]^{-\alpha} \, dw_2 \ldots dw_{2n}.$$

En utilisant les coordonnées polaires, on a

$$J(\alpha) \leqslant C_0' \int_0^{C_0\varepsilon_0} dr \int_0^{C_0\varepsilon_0} (-\rho + r^2 + w_2)^{-\alpha} \, r^{2n-3} \, dw_2.$$

On majore en intégrant de 0 à $+\infty$:

$$J(\alpha) \leqslant C_0' \int_0^{+\infty} (-\rho + r^2)^{-\alpha+1} \, r^{2n-3} \, dr,$$

$$J(\alpha) \leqslant C_0' (-\rho)^{n-\alpha} \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-\alpha+1} \, t^{2n-3} \, dt,$$

$$J(\alpha) \leqslant C_7(\alpha) (-\rho)^{n-\alpha}.$$

En utilisant le lemme 4.4 (a) et (c), ainsi que la remarque 4.4, on voit que

$$\text{(I.7.1)} \qquad \begin{aligned} &|-\rho+\langle P, \zeta-z\rangle|^n \, |\langle Q, \zeta-z\rangle|^q \\ &\quad \geqslant C' [-\rho(\zeta) + |\zeta-z|^2 + |\operatorname{Im} A(\zeta, z)]^{n+q}, \end{aligned}$$

où C' est une constante convenable.

Il suffit alors d'appliquer le (a) avec $\alpha = n+q$.

Pour démontrer le (c), on remarque que $P_i Q_j - P_j Q_i = O(|\zeta - z|)$. D'après (I.7.1), on est ramené à l'estimation (a) avec $\alpha = n+q-(1/2)$ (on « simplifie » par $|\zeta - z|$).

Le lemme 7.3 nous permet de donner des conditions sur f qui assurent l'existence d'une solution $u \in L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$ pour l'équation $d_b'' u = f$.

PROPOSITION 7.1. — *Si les coefficients de f et de $\delta^{-1/2} d''\rho \wedge f$ sont des mesures bornées sur Ω, la solution u de l'équation $d''_b u = f$ donnée par le théorème* 5.1, *appartient à $L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$ et on a*

$$\| u \|_{L^1(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega)(\| f \|_1 + \| \delta^{-1/2} d''\rho \wedge f \|_1).$$

(δ *désignant la distance à $\partial\Omega$*).

Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme 7.1, de l'expression explicite de u dans le théorème 5.1, et du théorème de Fubini.

Le lemme suivant nous permettra d'obtenir $u \in L^\infty(\partial\Omega)$.

LEMME 7.4. — *Soit μ une mesure $\geqslant 0$, bornée sur Ω, telle qu'il existe des constantes $\alpha > n$ et $C > 0$, de sorte que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \partial\Omega$, on ait*

$$\mu[D(x, t)] \leqslant C t^\alpha.$$

Alors il existe une constante $C(\Omega, \alpha)$ indépendante de μ et de $z \in \partial\Omega$, telle que

$$\int_{\Omega_\zeta} [-\rho(\zeta) + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} A(\zeta, z)|]^{-n} d\mu(\zeta)$$
$$\leqslant C(\Omega, \alpha) \sup_{t>0,\, x\in\partial\Omega} t^{-\alpha} \mu[D(x, t)].$$

($D(x, t)$ *est la boule de Hörmander définie dans l'introduction*).

Utilisons le système de coordonnées du lemme 7.1, en échangeant les rôles de ζ et z, et remarquons que, d'après la condition (iv), $d_\zeta A(\zeta, z)|_{\zeta=z} = d'\rho(z)$ du lemme 4.1, nous pouvons choisir pour coordonnées $w_3, \ldots, w_{2n}$ un système de coordonnées réelles du plan tangent complexe en z à $\partial\Omega$.

Appelons $D'(z, t)$ la pseudo-boule, définie par

(I.7.2) $$D'(z, t) = \{\zeta \in \Omega;\ -\rho(\zeta) + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} A(\zeta, z)| < t\}.$$

Comme la fonction $-\rho(\zeta) + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} A(\zeta, z)|$ est équivalente à $|w_1| + |w|^2 + |w_2|$, la pseudo-boule $D'(z, t)$ est « équivalente » à la pseudo-boule $D(z, t)$ au sens suivant

$$D(z, C_1 t) \subset D'(z, t) \subset D(z, C_2 t) \qquad \text{pour} \quad 0 < t < \varepsilon_0^2,\ z \in \partial\Omega,$$

C_1 et C_2 étant des constantes ne dépendant que de Ω.

Il en résulte que

(I.7.3) $$t^{-\alpha} \mu[D'(z, t)] \leqslant t^{-\alpha} \mu[D(z, C_2 t)].$$

L'intégrale J du lemme 7.4, s'écrit d'autre part :

(I.7.4) $$J = \int_0^{+\infty} t^{-n}\, d\mu(t), \quad \text{en posant } \mu(t) = \mu[D'(z, t)].$$

En intégrant par parties, on obtient :

(I.7.5) $$\int_0^{\varepsilon_0} t^{-n}\, d\mu(t) = \varepsilon_0^{-n}\, \mu(\varepsilon_0) + n \int_0^{\varepsilon_0} t^{-n-1}\, \mu(t)\, dt.$$

Le lemme 7.4 résulte trivialement de (I.7.5), (I.7.4) et (I.7.3).

PROPOSITION 7.2. — *Si la mesure* $\mu = |f| + |\delta^{-1/2} d''\rho \wedge f|$ *vérifie l'hypothèse du lemme* 7.4, *la solution u du théorème* 5.1 *est dans* $L^{\infty}_{p,q}(\partial\Omega)$, *et on a*

$$\| u \|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega, \alpha) \sup_{t>0,\, z \in \partial\Omega} t^{-\alpha} \mu[D(z, t)].$$

Remarquons que, d'après le lemme 4.4 (*c*), on a

$$|\langle Q, \zeta - z \rangle| \geqslant \mathrm{Cte}\, |\rho|^{1/2}\, |\zeta - z|.$$

Il en résulte, d'après le théorème 5.1 et le lemme 4.4, en faisant des majorations et minorations élémentaires, que

(I.7.6) $$|u(z)| \leqslant \mathrm{Cte} \int_{\Omega_\zeta} \frac{d\mu(\zeta)}{|-\rho + \langle P, \zeta - z \rangle|^n}.$$

La proposition est alors une conséquence immédiate de (I.7.6) du lemme 4.4 (*a*) et du lemme 7.4.

On étudie maintenant les propriétés du noyau $\tilde{K}(\zeta, z)$ du théorème 5.2.

LEMME 7.5. — *Pour tout* $\beta < 2n/(2n-1)$, *il existe une constante* $C(\beta)$ *telle que*

(*a*) $$\int_{\partial\Omega_\zeta} |\tilde{K}(\zeta, z)|^\beta\, dS(\zeta) < C(\beta) \quad \textit{pour tout } z \in \partial\Omega.$$

(*b*) $$\int_{\partial\Omega_z} |\tilde{K}(\zeta, z)|^\beta\, dS(z) < C(\beta) \quad \textit{pour tout } \zeta \in \partial\Omega.$$

Compte tenu de l'expression explicite de $\tilde{K}$ dans le théorème 5.2, et du lemme 4.4 et de la remarque 4.4, il nous suffit de démontrer le lemme en remplaçant $\tilde{K}$ par le noyau $|\zeta - z|/(|\zeta - z|^2 + |\mathrm{Im}\, A(\zeta, z)|)^n$, ou encore par le noyau $(|\zeta - z|^2 + |\mathrm{Im}\, A(\zeta, z)|)^{-n+(1/2)}$.

En utilisant le système de coordonnées du lemme 7.1, il suffit d'évaluer l'intégrale

$$\int_0^{C_0\varepsilon_0} dr \int_0^{C_0\varepsilon_0} (r^2+w_2)^{-\beta(n-(1/2))}\, r^{2n-3}\, dw_2.$$

Il est élémentaire de vérifier que l'intégrale converge pour $\beta < 2n/(2n-1)$.

En utilisant un lemme classique sur les noyaux (*cf.* par exemple N. KERZAN [15] p. 328), il résulte du lemme 7.5 que K est continu de $L^r(\partial\Omega)$ dans $L^s(\partial\Omega)$ pour tout s vérifiant :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\beta} - 1, \qquad \beta < \frac{2n}{2n-1}.$$

On a donc le résultat suivant.

PROPOSITION 7.3. — *Le noyau $\tilde{K}$ donnant la solution u du théorème 5.2 est continu de $L^r(\partial\Omega)$ dans $L^s(\partial\Omega)$ pour tout s tel que $1/s > (1/r)-(1/2n)$, on a donc*

$$\|u\|_{L^s(\partial\Omega)} \leqslant C(\Omega, s)\|f_b\|_{L^r(\partial\Omega)}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant s \leqslant +\infty.$$

En particulier, K envoie $L^1(\partial\Omega)$ dans $L^1(\partial\Omega)$, et L^∞ dans L^∞.

Il nous faut justifier le remplacement de la norme $\|f\|_{L^r(\partial\Omega)}$ par $\|f_b\|_{L^r(\partial\Omega)}$, où f_b est défini par (I.1.4). Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la base duale du champ de repère en $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ défini comme dans (I.1.4), on a

$$f = \bar{\gamma}_1 \wedge g + f_b,$$

où g est de type $(p, q-1)$ et f_b de type (p, q). Il en résulte que

$$\text{(I.7.7)} \qquad \tilde{K}\wedge f = \tilde{K}\wedge\bar{\gamma}_1\wedge g + \tilde{K}\wedge f_b.$$

Soit i l'injection canonique de $\partial\Omega$ dans $\mathbf{C}^n$. Comme $i^*(d'\rho + d''\rho) = 0$, on a

$$\text{(I.7.8)} \qquad i^*(\tilde{K}\wedge d''\rho\wedge g) = -i^*(\tilde{K}\wedge d'\rho\wedge g) = 0,$$

car $\tilde{K}\wedge d'\rho\wedge g$ est de bidegré $(n+1, n-2)$.

Comme $\bar{\gamma}_1$ est proportionnel à $d''\rho$, il résulte de (I.7.8) :

$$i^*(\tilde{K}\wedge\bar{\gamma}_1\wedge g) = 0.$$

D'après (I.7.7), on a donc

$$i^*(\tilde{K}\wedge f) = i^*(\tilde{K}\wedge f_b)$$

ce qui achève de démontrer la proposition 7.3.

8. Régularisation

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le théorème 5.1 est encore vrai lorsque f vérifie seulement les hypothèses de la proposition 7.1, la forme u appartenant alors à $L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$. On procède en approchant f par ses régularisées mais l'exposant $-1/2$ et la présence de $d''\rho$ dans le terme $(-\rho)^{-1/2}\,d''\rho\wedge f$ compliquent la situation et nécessitent quelques précautions.

Soit $\chi\in\mathscr{D}(\mathbf{C}_n)$ une fonction positive, telle que $\displaystyle\int\chi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)=1$ et telle que χ soit à support dans la boule de rayon 1/2. On pose

$$\chi_\varepsilon(\zeta)=\varepsilon^{-2n}\chi\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right).$$

Soit $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 en dehors de Ω.

On considère les formes régularisées f_ε :

$$f_\varepsilon=\tilde{f}\bigstar\chi_\varepsilon. \tag{I.8.1}$$

On suppose que ρ a été choisie de sorte que

$$|\operatorname{grad}\rho|\leqslant 1 \quad \text{sur } \overline{\Omega}. \tag{I.8.2}$$

Il en résulte que f_ε est d''-fermée et de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}_\varepsilon$. On peut donc appliquer le théorème 5.1 à f_ε dans Ω_ε, il existe $u_\varepsilon\in L^1_{p,q-1}(\partial\Omega_\varepsilon)$ telle que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\wedge\varphi=\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\wedge\varphi, \tag{I.8.3}$$

pour toute φ d''-fermée de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, avec

$$u_\varepsilon(z)=\int_{\Omega_\varepsilon}\tilde{v}_\varepsilon(\zeta,z)\wedge f_\varepsilon(\zeta), \tag{I.8.4}$$

où $\tilde{v}_\varepsilon(\zeta,z)$ est le noyau du théorème 5.1 pour l'ouvert Ω_ε, et où $z\in\partial\Omega_\varepsilon$. Remarquons que le noyau $\tilde{v}_\varepsilon$ est donné par la formule du théorème 5.1, dans laquelle on a remplacé $-\rho$ par $-\rho-\varepsilon$, puisque $P(\zeta,z)$ est définie pour $z\in\overline{\Omega}$ et $\zeta\in V_{\varepsilon_0}$. Il en résulte, d'après la proposition 7.1, qu'il existe une constante $C(\Omega)$ indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)}\leqslant C(\Omega)\left[\|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}+\||\rho_\varepsilon|^{-1/2}\,d''\rho\wedge f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}\right], \tag{I.8.5}$$

où $\rho_\varepsilon=\rho+\varepsilon$.

L'estimation de $\| \, | \rho_\varepsilon |^{-1/2} d''\rho \wedge f_\varepsilon |_{L^1(\Omega_\varepsilon)}$ fait l'objet des lemmes qui suivent.

LEMME 8.1. — *Soit* μ *une mesure sur* Ω *telle que* $\int_\Omega |\rho|^{-1/2} d|\mu| < +\infty$*; il existe une constante* $C(\Omega)$*, indépendante de* ε *et de* μ*, telle que*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\rho_\varepsilon|^{-1/2} |\tilde{\mu} \bigstar \chi_\varepsilon| \, d\lambda \leqslant C(\Omega) \int_\Omega |\rho|^{-1/2} d|\mu|.$$

On peut supposer $\mu \geqslant 0$. Il s'agit d'évaluer l'intégrale

$$\text{(I.8.6)} \qquad I = \int_{\Omega_\varepsilon} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2} d\lambda(z) \int_{\Omega_\zeta} \chi_\varepsilon(\zeta - z) \, d\mu(\zeta).$$

On évalue d'abord l'intégrale

$$\text{(I.8.7)} \qquad I_1 = \int_{\rho(\zeta) \geqslant -2\varepsilon} d\mu(\zeta) \int_{\Omega_\varepsilon} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2} \chi_\varepsilon(\zeta - z) \, d\lambda(z).$$

On majore I_1 par

$$\text{(I.8.8)} \quad I_1 \leqslant \varepsilon^{-2n} \|\chi\|_\infty \int_{\rho(\zeta) \geqslant -2\varepsilon} d\mu(\zeta) \int_{\Omega_\varepsilon \cap B(\zeta, \varepsilon/2)} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2} d\lambda(z).$$

Comme $\int_0^\varepsilon dt/\sqrt{t} = 2\sqrt{\varepsilon}$, l'intégrale en z est majorée par $C(\Omega)\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon^{2n-1}$, on a donc

$$\text{(I.8.9)} \qquad \begin{aligned} I_1 &\leqslant \|\chi\|_\infty C(\Omega) \varepsilon^{-1/2} \int_{\rho(\zeta) \geqslant -2\varepsilon} d\mu(\zeta) \\ &\leqslant \|\chi\|_\infty C(\Omega) \sqrt{2} \int_{\rho(\zeta) \geqslant -2\varepsilon} |\rho|^{-1/2} d\mu. \end{aligned}$$

On estime maintenant l'intégrale I_2 :

$$\text{(I.8.10)} \qquad I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2} d\lambda(z) \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \chi_\varepsilon(\zeta - z) \, d\mu(\zeta).$$

Sur le domaine d'intégration de I_2, on a $|\zeta - z| < \varepsilon/2$ et $-\rho(\zeta) > 2\varepsilon$, d'après (I.8.2), on a donc

$$-\rho_\varepsilon(z) > -\rho(\zeta) - \frac{3\varepsilon}{2} > -\frac{1}{4}\rho(\zeta).$$

Il en résulte

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\varepsilon}} [-\rho(\zeta)]^{-1/2}\, d\mu(\zeta) \int_{\Omega_\varepsilon} \chi_\varepsilon(\zeta - z)\, d\lambda(z),$$

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\varepsilon}} [-\rho(\zeta)]^{-1/2}\, d\mu(\zeta). \tag{I.8.11}$$

Le lemme résulte alors de (I.8.4), (I.8.9) et (I.8.11).

Le lemme suivant tient compte du fait que la multiplication par $d''\rho$ ne commute pas avec la convolution.

LEMME 8.2. — *Il existe une constante* $C(\Omega)$, *indépendante de* ε *et de* f, *telle que*

$$\| |\rho_\varepsilon|^{-1/2} [(d''\rho \wedge \tilde{f}) \bigstar \chi_\varepsilon - d''\rho \wedge (\tilde{f} \bigstar \chi_\varepsilon)] \|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C(\Omega)\, \varepsilon^{1/2} \| f \|_1.$$

Par un calcul immédiat, on a

$$\begin{aligned} &(d''\rho \wedge \tilde{f}) \bigstar \chi_\varepsilon - d''\rho \wedge (\tilde{f} \bigstar \chi_\varepsilon) \\ &\quad = \int_{\mathbf{C}^n} \chi_\varepsilon(\zeta - z)\, [d''\rho(\zeta) - d''\rho(z)] \wedge \tilde{f}(\zeta), \end{aligned} \tag{I.8.12}$$

où la notation $d''\rho\,(z)$ (un peu ambiguë) désigne la valeur de la forme $d''_\zeta\rho$, au point $\zeta = z$.

Désignons par J_ε le membre de gauche de l'inégalité du lemme 8.2, on a donc, d'après (I.8.12) et (I.8.2),

$$J_\varepsilon \leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2}\, d\lambda(z) \int_{\mathbf{C}^n} \chi_\varepsilon(\zeta - z)\, |\zeta - z|\, |\tilde{f}(\zeta)|. \tag{I.8.13}$$

Comme $|\zeta - z| \leqslant \varepsilon/2$ sur le support de $\chi_\varepsilon(\zeta - z)$, on obtient :

$$J_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-2n+1} \|\chi\|_\infty \int_{\Omega_\zeta} |f(\zeta)| \int_{\Omega_\varepsilon \cap B(\zeta,\, \varepsilon/2)} [-\rho_\varepsilon(z)]^{-1/2}\, d\lambda(z). \tag{I.8.14}$$

En majorant de manière identique à (I.8.8) et (I.8.9), on a

$$J_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{1/2} \|\chi\|_\infty\, C(\Omega) \| f \|_1.$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des lemmes 8.1, 8.2 et de (I.8.5).

LEMME 8.3. — *Il existe* $C(\Omega)$ *indépendante de* ε *et de* f, *telle que*

$$\| u_\varepsilon \|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leqslant C(\Omega) [\| f \|_1 + \| |\rho|^{-1/2} d''\rho \wedge f \|_1],$$

où u_ε *est donnée par* (I.8.4).

Pour ε assez petit, $\partial\Omega_\varepsilon$ est C^1 difféomorphe à $\partial\Omega$, soit $\Phi_\varepsilon : \partial\Omega \to \partial\Omega_\varepsilon$ un tel C^1-difféomorphisme, choisi de telle sorte que $\Phi_\varepsilon \to \mathrm{Id}$ quand $\varepsilon \to 0$, uniformément en norme C^1 sur $\partial\Omega$.

On va montrer que $u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ converge vers u dans $L^1(\partial\Omega)$, où u est défini par

$$u(z) = \int_{\Omega_\zeta} \nu(\zeta, z) \wedge f(\zeta), \qquad z \in \partial\Omega. \tag{I.8.15}$$

Pour alléger les notations, nous emploierons abusivement u_ε au lieu de $u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$, et $\nu_\varepsilon(\zeta, z)$ au lieu de $\nu_\varepsilon(\zeta, \Phi_\varepsilon(z))$. Nous allons d'autre part tronquer f au voisinage du bord à l'aide d'une fonction $\psi_\eta \in \mathscr{D}(\mathbf{C}^n)$, telle que $0 \leqslant \psi_\eta \leqslant 1$, ψ_η étant à support dans $\Omega_{2\eta}$ et égale à 1 dans un voisinage de $\overline{\Omega}_{3\eta}$, $(\eta > 0)$.

On pose alors

$$\begin{cases} f^\eta = \psi_\eta f, & f'^\eta = (1-\psi_\eta) f, \\ f_\varepsilon^\eta = (f^\eta) \star \chi_\varepsilon, & f_\varepsilon'^\eta = (f'^\eta) \star \chi_\varepsilon, \end{cases} \tag{I.8.16}$$

de sorte que $f_\varepsilon = f_\varepsilon^\eta + f_\varepsilon'^\eta$ et $f = f^\eta + f'^\eta$.

On a alors (avec l'abus de langage déjà signalé) :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - u = {} & \int_{\Omega_\varepsilon} \nu_\varepsilon \wedge f_\varepsilon'^\eta - \int_\Omega \nu \wedge f'^\eta \\ & + \int_{\Omega_\eta} (\nu_\varepsilon - \nu) \wedge f_\varepsilon^\eta + \int_{\Omega_\eta} \nu \wedge (f_\varepsilon^\eta - f^\eta), \end{aligned} \tag{I.8.17}$$

avec $\varepsilon < \eta$.

Soit $\alpha > 0$ donné, on choisit η assez petit de sorte que

$$\| f'^\eta \|_1 + \| [-\rho]^{-1/2} d''\rho \wedge f'^\eta \|_1 < \alpha. \tag{I.8.18}$$

D'après le lemme 8.3, il en résulte que les deux premières intégrales de (I.8.17) sont majorées en norme $L^1(\partial\Omega)$ par $C(\Omega)\,\alpha$, uniformément en ε. η étant fixé, $\nu_\varepsilon \to \nu$ uniformément sur $\partial\Omega \times \overline{\Omega}_\eta$ quand $\varepsilon \to 0$, f_η^ε étant bornée en norme $L^1(\Omega)$ indépendamment de ε, la troisième intégrale de (I.8.17) tend vers zéro uniformément en z quand $\varepsilon \to 0$. Enfin ν étant continu sur $\partial\Omega_z \times \Omega_\eta$, les propriétés élémentaires de la convolution montre que la dernière intégrale tend vers zéro uniformément en z quand $\varepsilon \to 0$. On a donc finalement

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon - u \|_{L^1(\partial\Omega)} = 0. \tag{I.8.19}$$

Un passage à la limite, dans (I.8.3), montre que $\int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi$, pour toute φ d''-fermée de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$.

II. Résolution de l'équation $i\,d'\,d''\,W = \theta$ et zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna

1. Préliminaires et énoncé des résultats

On se propose de montrer que les théorèmes d'existence, obtenus pour l'opérateur d'', entraînent un bon théorème d'existence pour l'opérateur $id'\,d''$, permettant de caractériser les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna par la condition de Blaschke. On adopte le point de vue des formes différentielles et des courants, qui fut utilisé systématiquement pour la première fois par P. LELONG [21], dans les problèmes de zéros de fonctions holomorphes. Nous allons donc résoudre dans Ω l'équation

(II.1.1) $$i\,d'\,d''\,W = \theta,$$

où θ est un courant, positif, fermé dans Ω, de bidegré (1, 1). Nous renvoyons à P. LELONG [22] pour les notions relatives aux courants positifs, fermés et à [20] et [21] pour les relations entre les courants positifs fermés et les zéros des fonctions holomorphes. Nous rappelons simplement les résultats suivants :

θ s'écrit canoniquement :

(II.1.2) $$\theta = i\sum_{1 \leqslant j,\,k \leqslant n} \theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

où les θ_{jk} sont des mesures. La condition de positivité signifie que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^n$, on a

(II.1.3) $$\sum_{1 \leqslant j,\,k \leqslant n} \theta_{j,\,k}\, \lambda_j \bar{\lambda}_k \geqslant 0.$$

La mesure $\geqslant 0$, $\sigma = 2\sum_{j=1}^{n} \theta_{jj}$, est appelée la mesure trace et majore les coefficients de θ.

Si β est la forme $\beta = (i/2)\, d'\, d''\, |z|^2$, σ est encore donnée par

(II.1.4) $$\sigma = \theta \wedge \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Le cas particulier le plus important est celui du courant d'intégration $[X]$ sur une hypersurface complexe X de Ω, σ est alors la mesure aire de X. Plus généralement (*cf.* [21]), on peut considérer le cas d'un diviseur sur Ω.

DÉFINITION 1.1. — *On dira qu'un courant positif* θ *sur* Ω (*resp. une hypersurface* X *de* Ω) *vérifie la condition de Blaschke si*

$$\text{(II.1.5)} \quad \int_\Omega \delta(z)\, d\sigma(z) < +\infty \qquad \left(\textit{resp.} \int_X \delta(z) \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} < +\infty\right).$$

DÉFINITION 1.2. — *Nous dirons qu'une fonction plurisousharmonique* W *dans* Ω (*resp. une fonction holomorphe* F *dans* Ω) *appartient à la classe de Nevanlinna si*

$$\text{(II.1.6)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\varepsilon>0} \displaystyle\int_{\partial\Omega_\varepsilon} W^+(z)\, dS_\varepsilon(z) < +\infty \\ \left(\textit{resp.} \sup_{\varepsilon>0} \displaystyle\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \log^+ |F|\, dS_\varepsilon < +\infty\right), \end{array} \right.$$

avec $W^+ = \sup(0, W)$.

Nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Si le courant positif, fermé,* θ *vérifie la condition de Blaschke et si la classe de cohomologie de* θ *dans* $H^2(\Omega, \mathbf{C})$ *est nulle, il existe une fonction plurisousharmonique* W *dans la classe de Nevanlinna, solution dans* Ω *de l'équation* $i\, d'\, d''\, W = \theta$.

En fait, nous montrons dans l'appendice I que W vérifie une propriété un peu plus forte que (II.1.6). Lorsque $\theta = [X]$, la solution W de l'équation $(i/\pi)\, d'\, d''\, W = \theta$ est, d'après P. LELONG ([21], p. 261), du type $\log|F|$ où F est holomorphe dans Ω, le théorème 3 de l'introduction est alors un corollaire du théorème 1.1.

Pour résoudre l'équation (II.1.1), nous suivons la méthode classique. Nous commençons par résoudre l'équation

$$\text{(II.1.7)} \qquad i\, dw = \theta$$

au sens des courants dans Ω, puis nous décomposons w :

$$\text{(II.1.8)} \qquad w = -w_{1,0} + w_{0,1},$$

où $w_{1,0}$ et $w_{0,1}$ sont de bidegré (1, 0) et (0, 1).

D'après (II.1.7), $w_{0,1}$ est d''-fermé. Soit donc U une solution de

$$\text{(II.1.9)} \qquad d''\, U = w_{0,1}.$$

Des calculs classiques montrent alors que $W = 2 \operatorname{Re} U$ est solution de $i\, d'\, d''\, W = \theta$. Lorsque θ est de classe C^1 et que Ω est convexe, w et $w_{0,1}$ sont donnés explicitement par les formules d'homotopie classiques

$$\text{(II.1.10)} \qquad \begin{cases} w_{0,1} = \sum_{j,k}\left[\int_0^1 tz_k\, \theta_{kj}(tz)\, dt\right] d\bar{z}_j, \\ w_{1,0} = \overline{w}_{0,1}. \end{cases}$$

Le plan de la démonstration va donc être le suivant. Dans le paragraphe 2, nous étudions les propriétés des coefficients de θ liées à la condition de Blaschke. Ces propriétés nous seront utiles pour estimer $w_{0,1}$. Dans le paragraphe 3, nous supposons Ω convexe, et nous étudions alors la solution $w_{0,1}$, donnée par (II.1.10), nous montrons que $w_{0,1}$ satisfait aux hypothèses du théorème 1 (de l'introduction) :

$$\text{(II.1.11)} \quad \int_\Omega |w_{0,1}| < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega \delta^{-1/2}\, |d''\rho \wedge w_{0,1}| < +\infty,$$

en supposant d'abord θ de classe C^1, puis θ quelconque en utilisant une régularisation et un passage à la limite faible. On peut donc appliquer le théorème 1 et obtenir U, et par suite W ayant une valeur au bord dans $L^1(\partial\Omega)$. Le paragraphe 4 traite ensuite le cas où Ω est strictement qseudoconvexe (non convexe). Le paragraphe 5 résoud la petite difficulté aui provient du fait que la valeur au bord de la solution U est une valeur pu bord au sens de la proposition 2.1 du I et non pas au sens usuel.

L'appendice I donne une autre solution de cette difficulté et montre même que W est dans la classe de Nevanlinna en un sens fort. De plus, l'appendice I montre le rôle (caché en apparence) du potentiel de Green du courant θ.

Nous utilisons très souvent la possibilité d'approcher θ par des courants régularisés $\theta \star \chi_\varepsilon$ qui sont également positifs et fermés, et de faire un passage à la limite faible pour les solutions w_ε et U_ε correspondantes, sans répéter à chaque fois des arguments classiques et fastidieux.

Rappelons enfin qu'on associe à la (1,1)-forme positive $i \sum_{j,k} \theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$, la forme hermitienne positive $\sum_{j,k} \theta_{jk}\, dz_j \otimes d\bar{z}_k$. Par abus de langage, nous noterons également θ cette forme hermitienne.

2. Condition de Malliavin et condition « mixte »

Comme le courant θ est positif et fermé, la condition de Blascke entraîne de remarquables propriétés de sommabilité des coefficients de θ, que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Lorsque θ est une (1,1)-forme positive à coefficients continus sur Ω, nous désignerons par $\theta_\zeta(\xi_1, \xi_2)$ la valeur de la forme hermitienne positive θ_ζ au point $\zeta \in \Omega$ sur le couple de vecteurs (ξ_1, ξ_2) de $\mathbf{C}^n$. Si ξ_1 et ξ_2 sont deux champs de vecteurs sur Ω, nous noterons $\theta(\xi_1, \xi_2)$, la fonction $\zeta \mapsto \theta_\zeta[\xi_1(\zeta), \xi_2(\zeta)]$. Nous aurons besoin de définir $\theta(\xi_1, \xi_2)$, lorsque ξ_1 et ξ_2 sont deux champs continus de vecteurs sur Ω, et lorsque θ est un courant positif sur Ω.

On procède par dualité; soit d'abord $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un champ continu de repères sur un ouvert de Ω. Soit $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la base duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dans $\mathbf{C}^n$. Le 0-courant $\theta(e_j, e_k)$ est alors défini par

$$\text{(II.2.1)} \qquad \theta(e_j, e_k) \bigwedge_{l=1}^{n} (i\gamma_l \wedge \bar{\gamma}_l) = \theta \wedge (i\bar{\gamma}_j \wedge \gamma_k) \bigwedge_{l \neq j,k} (i\gamma_l \wedge \bar{\gamma}_l),$$

ou encore lorsque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormée

$$\text{(II.2.2)} \qquad 2\theta(e_j, e_k)\frac{\beta^n}{n!} = \theta \wedge \left(\frac{i}{2}\bar{\gamma}_j \wedge \gamma_k\right) \bigwedge_{l=j,k} \left(\frac{i}{2}\gamma_l \wedge \bar{\gamma}_l\right).$$

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux champs continus quelconques, on définit $\theta(\xi_1, \xi_2)$ par linéarité à l'aide des composantes de ξ_1 et ξ_2 dans un champ de repère local.

Soit ρ une fonction de classe C^2, strictement plurisousharmonique, vérifiant $d'\rho \neq 0$ au voisinage de $\partial\Omega$ et définissant Ω. Pour $\zeta \in \Omega$, on définit le plan « tangent complexe » T_ζ^c au point ζ, comme le noyau de $d'\rho$ en ζ.

Nous utiliserons fréquemment par la suite un champ continu local de repères orthonormés $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, tel que $(e_2, \ldots, e_n)$ constitue une base de T_ζ^c. Nous définirons la trace tangentielle σ_b de θ par

$$\text{(II.2.3)} \qquad \sigma_b = \sum_{i=2}^{n} \theta(e_i, e_i).$$

σ_b est indépendante du choix de la base orthonormée $(e_2, \ldots, e_n)$ de T^c, mais dépend du choix de ρ. Si θ est continue, σ_b au point ζ n'est autre que la trace de la restriction de θ_ζ à T_ζ^c. Si θ est continue et si ξ est un champ continu, on pose

$$\text{(II.2.4)} \qquad \|\theta(\xi, .)\|_{T^c} = \left(\sum_{i=2}^{n} |\theta(\xi, e_i)|^2\right)^{1/2},$$

où $(e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de T^c. Pour chaque ζ, c'est la norme de $\theta_\zeta(\xi, .)$ restreinte à T_ζ^c.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* θ *un courant, positif, fermé, de bidegré* (1,1) *dans* Ω, *vérifiant la condition de Blaschke.* θ *vérifie alors les propriétés suivantes*

1° $\displaystyle\int_\Omega -\rho\,(i\,d'\,d''\rho)^{n-1}\wedge\theta = \int_\Omega i\,d'\rho\wedge d''\rho\wedge(i\,d'\,d''\rho)^{n-2}\wedge\theta$;

2° $\displaystyle\int_\Omega \sigma_b\frac{\beta^n}{n!} \leqslant C(\Omega,\ \rho)\int_\Omega \delta(z)\,d\sigma(z)$ (condition de Malhiavin);

3° *Si* ξ_1 *et* ξ_2 *sont deux champs de vecteurs continus sur* Ω, *tels que, pour tout* $\zeta\in\Omega$, $\|\xi_j(\zeta)\| \leqslant 1$ *et* $\xi_2(\zeta)\in T^c_\zeta$, *on a*

$$\int_\Omega \delta^{1/2}\,|\theta(\xi_1,\ \xi_2)|\frac{\beta^n}{n!} \leqslant C(\Omega,\ \rho)\int_\Omega \delta(z)\,d\sigma(z) \quad (\textit{condition « mixte »}).$$

4° *Si* ξ *est un champ continu de vecteurs de norme* $\leqslant 1$ *sur* Ω, *et si* θ *est continue sur* Ω, *on a*

$$\int_\Omega \delta^{1/2}\,\|\theta(\xi,\ .)\|_{T^c}\frac{\beta^n}{n!} \leqslant C(\Omega,\ \rho)\int_\Omega \delta(z)\,d\sigma(z).$$

La propriété 2° a été établie par P. MALLIAVIN [24], dans une formulation différente. Elle signifie intuitivement que les coefficients de θ relatifs au plan tangent T^c sont intégrables. Les propriétés 3° et 4° signifient que les coefficients « mixtes » du courant θ (on « prend la valeur de θ » sur un couple de vecteurs (ξ_1, ξ_2) dont l'un seulement est supposé « tangent complexe ») sont intégrables avec le poids $\delta^{1/2}$.

La propriété 1° qui signifie en fait que les conditions de P. MALLIAVIN et de BLASCHKE sont équivalentes, nous a été suggérée par W. STOLL (dans le cas de la boule) au Congrès d'analyse complexe de l'Université du Michigan (août 1974). Lorsque θ est de classe C^1 dans Ω, la propriété 1° n'est autre que la formule de Stokes :

$$\text{(II.2.5)} \qquad \int_\Omega d\left[i\,\rho\,d''\rho\wedge(i\,d'\,d''\rho)^{n-2}\wedge\theta\right] = 0,$$

qui s'écrit encore :

$$\text{(II.2.6)} \quad \int_\Omega -\rho\,(i\,d'\,d''\rho)^{n-1}\wedge\theta - \int_\Omega i\,d'\rho\wedge d''\rho\wedge(i\,d'\,d''\rho)^{n-2}\wedge\theta = 0.$$

La formule (II.2.6), dans le cas où θ est positif, fermé quelconque, s'obtient par des passages à la limite standart (lorsque θ est défini dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, on approche θ par ses régularisées $\theta \star \chi_\varepsilon$ qui convergent faiblement vers θ; le cas général s'obtient à partir du cas précédent par exhaustion en utilisant (II.2.6) dans Ω_ε).

D'après les hypothèses sur ρ, l'intégrale $\int_\Omega -\rho\,(i\,d'\,d''\rho)^{n-1} \wedge \theta$ est équivalente à l'intégrale de Blaschke $\int_\Omega \delta\,(z)\,d\sigma\,(z)$.

Choisissons localement un champ continu de repères $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ comme dans (II.2.3) de telle sorte que $(e_2\,(\zeta), \ldots, e_n\,(\zeta))$ soit une base orthonormée de T^c_ζ qui diagonalise la forme hermitienne positive $i\,d'\,d''\rho\,(\zeta)$ restreinte à T^c_ζ.

Soit $\lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $i\,d'\,d''\rho$ restreinte à T^c, et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ la base duale (comme dans II.2.2), on a alors :

(II.2.7) $$i\,d'\rho \wedge d''\rho \wedge (i\,d'\,d''\rho)^{n-2} \wedge \theta = |d'\rho|^2\, i\gamma_1 \wedge \bar{\gamma}_1 \wedge \big(\textstyle\sum_{j=2}^n i\lambda_j \gamma_j \wedge \bar{\gamma}_j\big)^{n-2} \wedge \theta,$$

(II.2.8) $$i\,d'\rho \wedge d''\rho \wedge (i\,d'\,d''\rho)^{n-2} \wedge \theta \geqslant (n-2)!\,\lambda_2^{n-2}\,|d'\rho|^2\,\sigma_b\,2^n\,\frac{\beta^n}{n!}.$$

Le 2° résulte trivialement de (II.2.8) et du 1° (et des hypothèses sur ρ).

Le 3° et 4° résultent, lorsque θ est continu, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à la forme hermitienne $\geqslant 0$, θ :

(II.2.9) $$2\,\delta^{1/2}\,|\theta(\xi_1, \xi_2)| \geqslant \delta\theta(\xi_1, \xi_1) + \theta(\xi_2, \xi_2),$$

(II.2.10) $$2\,\delta^{1/2}\,|\theta(\xi_1, \xi_2)| \geqslant \delta\sigma + \sigma_b.$$

Les inégalités (II.2.9) et (II.2.10) sont encore vraies pour θ positif quelconque, par passage à la limite faible; le 3° est donc vérifié dans le cas général. Remarquons que le 4° est équivalent au 3° lorsque θ est continu.

Le 4° sera commode ultérieurement, car $\|\,\theta\,(\xi, .)\,\|_{T^c}$ est indépendant du choix d'une base de T^c.

3. Transformation des mesures par l'opérateur d'homotopie de « Cartan-Poincaré »

Soit Ω un ouvert strictement convexe, défini à l'aide d'une norme ρ sur $\mathbf{C}^n$:

$$\Omega = \{\, z \in \mathbf{C}^n;\ \rho(z) < 1 \,\}.$$

On pose, dans ce paragraphe, $\delta\,(z) = 1 - \rho\,(z)$.

Soit g une fonction continue sur Ω, on considère l'opérateur K défini par

$$(Kg)(z) = \int_0^1 g(tz)\, dt. \tag{II.3.1}$$

Il est bien connu que si g est nulle au voisinage de 0, et si

$$\int_\Omega \delta(z) \,|\, g(z) \,|\, d\lambda(z) < +\infty,$$

alors Kg est intégrable.

Le lemme suivant généralise ce résultat.

LEMME 3.1. — *Soit α un nombre réel tel que $\alpha > -1$. On a alors :*

$$\int_\Omega [\delta(z)]^\alpha \,|\, Kg(z) \,|\, d\lambda(z) \leqslant \frac{1}{\alpha+1} \int_\Omega [\delta(z)]^{\alpha+1} \,|\, g(z) \,|\, \frac{d\lambda(z)}{[\rho(z)]^{2n+1}}.$$

Seul le cas $\alpha = 0$ et $\alpha = -1/2$, nous intéressera.

La démonstration est purement technique et résulte du théorème de Fubini. On a

$$\int_\Omega [\delta(z)]^\alpha \,|\, Kg(z) \,|\, d\lambda(z) \leqslant \int_\Omega [\delta(z)]^\alpha d\lambda(z) \int_0^1 |\, g(tz) \,|\, dt. \tag{II.3.2}$$

Posons

$$I = \int_\Omega [\delta(z)]^\alpha d\lambda(z) \int_0^1 |\, g(tz) \,|\, dt. \tag{II.3.3}$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$I = \int_0^1 dt \int_\Omega [\delta(z)]^\alpha \,|\, g(tz) \,|\, d\lambda(z). \tag{II.3.4}$$

Faisons pour chaque t fixé le changement de variable $tz = \zeta$, on obtient (Ω étant convexe) :

$$I = \int_0^1 dt \int_{\rho(\zeta) \leqslant t} \left[\delta\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right]^\alpha |\, g(\zeta) \,|\, \frac{d\lambda(\zeta)}{t^{2n}}. \tag{II.3.5}$$

Appliquons encore le théorème de Fubini :

$$I = \int_\Omega |\, g(\zeta) \,|\, d\lambda(\zeta) \int_{\rho(\zeta)}^1 \left[\delta\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right]^\alpha \frac{dt}{t^{2n}}. \tag{II.3.6}$$

Il en résulte aussitôt

$$(\text{II}.3.7)\qquad I \leqslant \int_{\Omega} |g(\zeta)| \frac{d\lambda(\zeta)}{[\rho(\zeta)]^{2n}} \int_{\rho(\zeta)}^{1} \left[1 - \frac{\rho(\zeta)}{t}\right]^{\alpha} dt.$$

Posant $\tau = 1-(\rho(\zeta)/t)$, on obtient :

$$(\text{II}.3.8)\qquad \int_{\rho(\zeta)}^{1} \left[1 - \frac{\rho(\zeta)}{t}\right]^{\alpha} dt = \rho(\zeta) \int_{0}^{1-\rho(\zeta)} \tau^{\alpha} \frac{d\tau}{(1-\tau)^2} \leqslant \frac{1}{\rho(\zeta)} \int_{0}^{1-\rho(\zeta)} \tau^{\alpha}\, d\tau,$$

$$\int_{\rho(\zeta)}^{1} \left[1 - \frac{\rho(\zeta)}{t}\right]^{\alpha} dt \leqslant \frac{[1-\rho(\zeta)]^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\,\rho(\zeta)}.$$

Il en résulte

$$(\text{II}.3.9)\qquad I \leqslant \frac{1}{\alpha+1} \int_{\Omega} [1-\rho(\zeta)]^{\alpha+1} |g(\zeta)| \frac{d\lambda(\zeta)}{[\rho(\zeta)]^{2n+1}}.$$

On considère maintenant l'opérateur de Cartan-Poincaré appliqué à la forme positive, fermée, θ, définie dans Ω :

$$(\text{II}.3.10)\qquad w_{0,1} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} z_k \displaystyle\int_{0}^{1} t\,\theta_{kj}(tz)\, dt\right] d\bar{z}_j.$$

On peut toujours supposer θ nulle au voisinage de 0.

D'après le lemme 3.1, appliqué avec $\alpha = 0$, $w_{0,1}$ est à coefficients intégrables dans Ω, lorsque θ vérifie la condition de Blaschke.

Pour pouvoir résoudre l'équation $d'' U = w_{0,1}$ dans Ω, avec u admettant une valeur au bord dans $L^1(\partial\Omega)$, il suffit alors de vérifier la condition suivante :

$$(\text{II}.3.11)\qquad \int_{\Omega} [\delta(z)]^{-1/2} \| d''\rho \wedge w_{0,1} \| \, d\lambda(z) < +\infty.$$

Posons, pour condenser l'écriture,

$$(\text{II}.3.12)\qquad z.\theta = \textstyle\sum_{k,j} z_k \theta_{kj}(z)\, d\bar{z}_j.$$

On a alors :

$$w_{0,1} \wedge d''\rho = \int_{0}^{1} t\,[z.\theta(tz)] \wedge d''\rho(z)\, dt.$$

$$(\text{II}.3.13)\qquad w_{0,1} \wedge d''\rho = \int_{0}^{1} [tz.\theta(tz)] \wedge d''\rho(tz)\, dt + \int_{0}^{1} [tz.\theta(tz)] \wedge [d''\rho(z) - d''\rho(tz)]\, dt.$$

Il en résulte

$$(\text{II}.3.14)\quad \|w_{0,1}\wedge d''\rho\| \leqslant \int_0^1 \|[tz.\theta(tz)]\wedge d''\rho(tz)\|\,dt + \int_0^1 \|[tz.\theta(tz)]\wedge[d''\rho(tz)-d''\rho(z)]\|\,dt.$$

Posant $g(z) = \|[z.\theta(z)]\wedge d''\rho(z)\|$, il résulte du lemme 3.1 que la condition (II.3.11) est vérifiée pourvu que l'on ait

$$(\text{II}.3.15)\qquad \int_\Omega [\delta(z)]^{1/2}\|[z.\theta]\wedge d''\rho\|\,d\lambda(z) < +\infty.$$

$$(\text{II}.3.16)\quad \int_\Omega [\delta(z)]^{-1/2}\,d\lambda(z) \times \int_0^1 \|[tz.\theta(tz)]\wedge[d''\rho(tz)-d''\rho(z)]\|\,dt < +\infty.$$

La condition (II.3.15) sera une conséquence immédiate de la « condition mixte ». Vérifions (II.3.16). Comme ρ est de classe C^2, on a

$$(\text{II}.3.17)\qquad \|d''\rho(tz)-d''\rho(z)\| \leqslant C(1-t) \qquad \text{pour} \quad z\in\Omega.$$

On doit donc montrer que

$$(\text{II}.3.18)\qquad \int_\Omega [\delta(z)]^{-1/2}\,d\lambda(z)\int_0^1 t\,\sigma(tz)(1-t)\,dt < +\infty.$$

En utilisant le théorème de Fubini et le changement de variable $tz = \zeta$, on obtient :

$$J = \int_\Omega \sigma(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\int_{\rho(\zeta)}^1 (1-t)\left[\delta\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right]^{-1/2}\frac{dt}{t^{2n-1}},$$

$$J \leqslant \int_\Omega \sigma(\zeta)\frac{d\lambda(\zeta)}{[\rho(\zeta)]^{2n-1}}\int_{\rho(\zeta)}^1 (1-t)\left[1-\frac{\rho(\zeta)}{t}\right]^{-1/2} dt.$$

Comme $(1-t)$ est majoré par $1-\rho(\zeta)$ dans la « seconde » intégration, on obtient :

$$J \leqslant 2\int_\Omega [1-\rho(\zeta)]^{3/2}\,\sigma(\zeta)\frac{d\lambda(\zeta)}{[\rho(\zeta)]^{2n}}.$$

L'intégrale de droite est finie puisque σ vérifie la condition de BLASCHKE, ce qui démontre (II.3.18) et par suite (II.3.16).

Vérifions maintenant la condition (II.3.15) :

$$\int_\Omega [\delta(z)]^{1/2} \| (z.\theta) \wedge d''\rho \| \, d\lambda(z) < +\infty.$$

Remarquons d'abord que si f est une (0,1)-forme, on a en utilisant en $z \in \Omega$ un repère orthonormé $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tel que $(e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de T_z^c :

$$d''\rho(z) = \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1} d\bar{z}_1 \qquad \text{et} \qquad f \wedge d''\rho = \textstyle\sum_{i=2}^n \dfrac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1} f_i \, d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_1.$$

Il en résulte donc

$$\text{(II.3.19)} \qquad \| f \wedge d''\rho \|^2 = \left| \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_1} \right|^2 \textstyle\sum_{i=2}^n | f_i |^2 = | d''\rho |^2 \, \| f_b \|^2,$$

où f_b désigne la restriction de f à T_z^c au sens de (I.1.4).

Appliquant cette relation (II.3.19) avec $f = z.\theta$ et en considérant θ_z comme une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^n$, on a

$$\text{(II.3.20)} \qquad \| (z.\theta) \wedge d''\rho \|^2 = | d''\rho |^2 . | z |^2 \textstyle\sum_{i=2}^n | \theta_z(\xi, e_i) |^2,$$

avec $\xi = z/|z|$. Comme ξ est unitaire et que les e_i appartiennent à T_z^c, on a la condition « mixte » (*cf.* proposition 2.1 ([4])) :

$$\int_\Omega [\delta(z)]^{1/2} \left(\textstyle\sum_{i=2}^n | \theta_z(\xi, e_i) |^2\right)^{1/2} d\lambda(z) < +\infty,$$

qui entraîne, d'après (II.3.20), l'estimation (II.3.15), et achève donc de démontrer (II.3.11).

La construction de w et les majorations ont été faites en supposant θ à coefficients continus sur Ω. Mais comme toutes les estimations de w en norme L^1 ((II.3.11) et lemme 3.1) s'accompagnent d'une majoration précise par $C(\Omega) \int_\Omega \delta(z) \, d\sigma(z)$, où la constante $C(\Omega)$ est indépendante des petites déformations de classe C^2 de Ω, il est immédiat lorsque θ est positif, fermé (quelconque), d'obtenir par régularisation et passage à la limite faible, une solution w à coefficients mesures bornées sur Ω vérifiant :

$$i \, dw = \theta,$$

$$\| w_{0,1} \|_1 < +\infty \qquad \text{et} \qquad \| \delta^{-1/2} w_{0,1} \wedge d''\rho \|_1 < +\infty.$$

4. Le cas général ou Ω est strictement pseudoconvexe

D'après le théorème I de l'introduction et (II.1.11), le seul problème est de résoudre globalement dans Ω l'équation

$$(\text{II}.4.1) \qquad i\,dw = \theta,$$

de sorte que la composante $w_{0,1}$ de bidegré (0,1) de w vérifie

$$(\text{II}.4.2) \qquad \int_\Omega |w_{0,1}| < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega \delta^{-1/2}\,|w_{0,1} \wedge d''\rho|| < +\infty,$$

la composante $w_{1,0}$ de bidegré (1,0) vérifiant la condition conjuguée.

Ω étant strictement pseudoconvexe, Ω est localement isomorphe à un ouvert strictement convexe. On peut donc localement (dans $\overline{\Omega}$) résoudre l'équation $i\,dw = \theta$, w vérifiant (II.4.2). Soit donc $(\Omega_j)_{j=1}^N$ un recouvrement ouvert fini de $\overline{\Omega}$ et w_j une solution de (II.4.1) et (II.4.2) dans Ω_j. Soit ψ_j une partition C^∞ de l'unité dans Ω, subordonnée à Ω_j. On a alors

$$(\text{II}.4.3) \qquad \theta - i\,d(\textstyle\sum_{j=1}^N \psi_j\, w_j) = -i\sum_{j=1}^N d\psi_j \wedge w_j.$$

La forme $\sum_{j=1}^N d\psi_j \wedge w_j$ est fermée, à coefficients mesures bornées dans Ω d'après (II.4.2), et cohomologue à θ. Il nous suffit donc de montrer le lemme suivant (car $\sum_{j=1}^N \psi_j\, w_j$ vérifie (II.4.2)).

LEMME 4.1. — *Soit θ un courant de degré 2 sur Ω, à coefficients mesures bornées sur Ω, et dont la classe de cohomologie dans $H^2(\Omega, \mathbf{C})$ est nulle. Il existe alors un courant w sur Ω d'ordre nul, tel que*

$$dw = \theta \qquad \textit{et} \qquad \int_\Omega [\delta]^{-1/2}\,|w| < +\infty.$$

On pourrait même remplacer $-1/2$ par α avec $\alpha > -1$. D'après les formules explicites (II.3.10) et le lemme 3.1, le problème est localement possible, l'idée de la démonstration est donc d'utiliser l'isomorphisme de Dolbeault. Nous allons définir trois faisceaux $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$, et $\mathscr{F}_2$ sur $\overline{\Omega}$, à l'aide des préfaisceaux de leurs sections. Soit U un ouvert de $\overline{\Omega}$.

$\theta \in \Gamma(U, \mathscr{F}_2)$ si, et seulement si, θ est un courant de degré 2, d'ordre nul, sur $U \cap \overline{\Omega}$, vérifiant $d\theta = 0$, et pour tout compact $K \subset U$,

$$(\text{II}.4.4) \qquad \int_K |\theta| < +\infty.$$

$w \in \Gamma(U, \mathscr{F}_1)$ si, et seulement si, w est un courant de degré 1, d'ordre nul sur $U \cap \Omega$, tel que dw soit aussi d'ordre nul et tel que, pour tout K compact de U,

$$\int_K \delta^{-1/2} |w| + \int_K |dw| < +\infty. \tag{II.4.5}$$

Enfin $g \in \Gamma(U, \mathscr{F}_0)$ si, et seulement si, g est un 0-courant d'ordre nul sur $U \cap \Omega$, tel que dg soit d'ordre nul et tel que, pour tout $K \subset U$ (K compact),

$$\int_w \delta^{-1/2} (|g| + |dg|) < +\infty. \tag{II.4.6}$$

Remarquons que le faisceau constant $\mathbf{C}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{F}_0$. On a donc la suite d'homomorphismes de faisceaux

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{F}_0 \xrightarrow{d} \mathscr{F}_1 \xrightarrow{d} \mathscr{F}_2 \to 0. \tag{II.4.7}$$

Les formules explicites d'homotopie pour l'opérateur d dans un convexe et le lemme 3.1 (avec $\alpha = -1/2$) montrent que la suite (II.4.7) est *exacte* ($\overline{\Omega}$ étant localement isomorphe à un convexe).

LEMME 4.2. — *Les faisceaux $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ sont fins.*

En effet, si $w \in \Gamma(U, \mathscr{F}_1)$ et si $\psi \in \mathscr{C}^\infty(U)$ est à support compact dans U, on a $\psi\, w \in \Gamma(U, \mathscr{F}_1)$, car la formule

$$d(\psi\, w) = d\psi \wedge w + \psi\, dw$$

montre que $\psi\, w$ vérifie (II.4.5). Le même raisonnement vaut pour $\mathscr{F}_0$.

On peut alors répéter le raisonnement de l'isomorphisme de Dolbeault, soit $\mathscr{F}_1^*$ le sous-faisceau de $\mathscr{F}_1$ noyau de d. On a les suites exactes

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \to \mathscr{F}_1^* \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to 0, \\ 0 \to \ \mathbf{C} \ \to \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_1^* \to 0. \end{array} \right. \tag{II.4.8}$$

Les suites exactes de cohomologie correspondantes donnent les suites exactes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1) \xrightarrow{d} \Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_2) \to H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1^*) \to H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1), \\ H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_0) \to H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1^*) \to H^2(\overline{\Omega}, \mathbf{C}) \to H^2(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_0). \end{array} \right. \tag{II.4.9}$$

Comme $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ sont fins (lemme 4.2), les $H^i(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_0)$ et $H^i(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1)$ sont nuls pour $i > 0$, et on a

$$\text{(II.4.10)} \qquad \begin{cases} H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1^*) \simeq \Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_2)/d[\Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1)], \\ H^1(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1^*) \simeq H^2(\overline{\Omega}, \mathbf{C}), \end{cases}$$

d'où

$$\text{(II.4.11)} \qquad \Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_2)/d[\Gamma(\overline{\Omega}, \mathscr{F}_1)] \simeq H^2(\overline{\Omega}, \mathbf{C}).$$

Comme $H^2(\overline{\Omega}, \mathbf{C})$ et $H^2(\Omega, \mathbf{C})$ sont isomorphes (Ω étant de classe C^2), (II.4.11) achève de démontrer le lemme 4.1.

5. **Procédure exhaustive**

Comme la valeur au bord de la solution U pour l'équation $d'' U = f = w_{0,1}$, donnée par le théorème 1, n'est une valeur au bord au sens usuel que lorsque $w_{0,1} = f$ est continue dans $\overline{\Omega}$, on n'est pas certain *a priori* que la solution W de (II.1.1), obtenue par application directe du théorème 1, soit bien dans la classe de Nevanlinna au sens usuel.

On va montrer qu'il en est bien ainsi en régularisant w, et en faisant un passage à la limite utilisant le fait que la solution W est plurisousharmonique. w étant la solution de (II.4.1) construite dans le paragraphe 4, on pose

$$\text{(II.5.1)} \qquad f = w_{0,1},$$

et on régularise f comme dans le paragraphe 8 de I : $f = \tilde{f} \star \chi_\varepsilon$.

On résoud

$$\text{(II.5.2)} \qquad d'' U_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

en appliquant le théorème 5.1 et la proposition 2.1 de I.

La valeur au bord de U, vérifiant comme dans le lemme 8.3 :

$$\text{(II.5.3)} \qquad \int_{\partial\Omega_\varepsilon} |U_\varepsilon| \, dS_\varepsilon \leqslant M,$$

où M est une constante indépendante de ε.

Posant $W_\varepsilon = 2 \operatorname{Re} U_\varepsilon$, on obtient, dans Ω_ε,

$$\text{(II.5.4)} \qquad i\, d'\, d''\, W_\varepsilon = \theta \star \chi_\varepsilon,$$

(χ_ε étant à support dans $B(0, \varepsilon/2)$, $\theta \star \chi_\varepsilon$ est bien défini dans un voisinage de $\overline{\Omega}_\varepsilon$).

Comme $\theta \star \chi_\varepsilon$ est positif, W_ε est plurisousharmonique dans Ω_ε. Soit alors H_ε la fonction harmonique dans Ω_ε, continue dans $\bar{\Omega}_\varepsilon$, qui coïncide avec W_ε^+ sur $\partial\Omega_\varepsilon$ (W_ε est continue dans $\bar{\Omega}_\varepsilon$). H_ε est positive et vérifie, d'après (II.5.3),

$$W_\varepsilon \leqslant H_\varepsilon \quad \text{dans } \bar{\Omega}_\varepsilon, \tag{II.5.5}$$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} H_\varepsilon \frac{\partial\rho}{\partial n} dS_\varepsilon \leqslant M', \tag{II.5.6}$$

où $\partial\rho/\partial n$ désigne la dérivée normale et M' une constante qui dépend de M et de ρ.

Comme H_ε est harmonique et positive dans Ω_ε, et que ρ est sous-harmonique, la formule de Green montre que l'intégrale $\int_{\partial\Omega_\eta} H_\varepsilon\, \partial\rho/\partial n\, dS_\eta$ est une fonction décroissante de η pour $\eta < \varepsilon$.

On a donc, d'après (II.5.6),

$$\int_{\partial\Omega_\eta} H_\varepsilon \frac{\partial\rho}{\partial n} dS_\eta < M' \quad \text{pour tout } \eta < \varepsilon. \tag{II.5.7}$$

(II.5.7) montre que la famille H_ε est une famille normale de fonctions harmoniques $\geqslant 0$, on peut donc trouver une suite ε_n telle que H_{ε_n} converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction harmonique $\geqslant 0$, H, dans Ω.

D'après (II.5.7), on a

$$\int_{\partial\Omega_\eta} H \frac{\partial\rho}{\partial n} dS_\eta < M' \quad \text{pour tout } \eta > 0. \tag{II.5.8}$$

D'autre part, d'après le lemme 8.3 et la proposition 2.1 de I, U_ε, et par suite W_ε, reste bornée en norme $L^1(\Omega_\varepsilon)$, on peut donc extraire de la suite ε_n une sous-suite, notée encore ε_n, telle que W_{ε_n} converge faiblement au sens des mesures vers une limite W dans Ω.

D'après (II.5.4), on a, dans Ω, $i\, d'\, d''\, W = \theta$; W est donc plurisousharmonique dans Ω. Pour toute fonction $\geqslant 0$, $g \in \mathscr{C}^0(\Omega)$, on a, d'après (II.5.5),

$$\int_\Omega W_\varepsilon g\, d\lambda \leqslant \int_\Omega H_\varepsilon g\, d\lambda \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Par passage à la limite, on en déduit

$$\int_{\Omega} W g\, d\lambda \leqslant \int_{\Omega} H g\, d\lambda \quad \text{pour toute fonction } \geqslant 0,\ g \in \mathbf{C}^0(\Omega),$$

on a donc, dans Ω, $W \leqslant H$; H étant positive, on en déduit, d'après (II.5.8),

$$\int_{\partial\Omega_\eta} W^+ \frac{\partial \rho}{\partial n}\, dS_\eta < M' \quad \text{pour tout } \eta > 0.$$

W est donc dans la classe de Nevanlinna.

APPENDICE I

Formule de Cauchy-Martinelli et fonction de Green

Dans cet appendice, nous faisons le lien entre le terme « de Cauchy-Martinelli » de la formule (I.2.11) et la fonction de Green de l'ouvert Ω.

Lorsque f est la forme $w_{0,1}$, composante de bidegré (0,1) de la forme w, solution de $i\, dw = \theta$ (*cf.* II, paragraphes 3 et 4), nous transformons la formule (I.2.11) qui donne U en fonction de f et de la solution tangentielle u, et nous obtenons pour $W = 2\,\mathrm{Re}\, U$, une formule explicite dans Ω en fonction de θ et de $\mathrm{Re}\, u$, faisant apparaître la fonction de Green $G(\zeta, z)$ de Ω et le noyau de Poisson de Ω. Le potentiel de Green de θ « correspond » donc au terme de Cauchy-Martinelli de (I.2.11).

On en déduit aussitôt que la solution W de $i\, d'\, d''\, W = \theta$ vérifie un peu mieux que (II.1.6), on a $W_{|\partial\Omega_\varepsilon}$ converge vers $W_{|\partial\Omega} = 2\,\mathrm{Re}\, u$ dans $L^1(\partial\Omega)$, quand $\varepsilon \to 0$. Nous terminons en démontrant la majoration annoncée (I.2.20), concernant

$$|K(z, \zeta) - K(z^*, \zeta)|.$$

La solution U de $d''\, U = f$, admettant la valeur au bord u, est donnée, d'après le paragraphe 2, formule (I.2.11), par

$$U(z) = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega} K(z, \zeta) \wedge f(\zeta) + \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega} K(z, \zeta)\, u(\zeta), \tag{1}$$

où K est donné par

$$K(z, \zeta) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \dfrac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|z-\zeta|^{2n}} \wedge (\bigwedge_{k \neq j} d\bar\zeta_j) \wedge \omega(\zeta). \tag{2}$$

La fonction de Green $G(\zeta, z)$ de l'ouvert Ω peut s'écrire :

$$G(\zeta, z) = c'_n \, | \zeta - z |^{-2n+2} - H(\zeta, z), \tag{3}$$

où $H(\zeta, z)$ est harmonique en ζ, de classe C^{∞} dans $\overline{\Omega}$ par rapport à ζ pour chaque z fixé dans Ω. c'_n désigne la constante $(n-2)!/4\,\pi^n$.

D'après (2) et (I.1.11), on a

$$\frac{1}{c_n} K(\zeta, z) = 2\, i\, d'_\zeta \left[c'_n \, | \zeta - z |^{-2n+2} \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \right], \tag{4}$$

où β est la forme kählérienne $\beta = (i/2)\, d'\, d'' \, | z |^2$.

D'après (4) et (3), K s'exprime donc en fonction de G par

$$\frac{1}{c_n} K(z, \zeta) = 2\, i\, d'_\zeta \left[G(\zeta, z) \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \right] + 2\, i (d'_\zeta H) \wedge \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5}$$

Comme H est harmonique en ζ, la forme $d'_\zeta H \wedge \beta^{n-1}$ est d''_ζ fermée.

En utilisant (I.2.4) avec $\varphi = d'_\zeta H \wedge \beta^{n-1}$, la formule (1) s'écrit encore, d'après (5),

$$U(z) = \frac{2}{(n-1)!} \left[\int_{\Omega_\zeta} i\, d'_\zeta G \wedge \beta^{n-1} \wedge f(\zeta) + \int_{\partial\Omega_\zeta} i\, d'_\zeta G \wedge \beta^{n-1} \wedge u(\zeta) \right]. \tag{6}$$

Cette formule n'est en fait qu'une variante de (I.2.16).

Comme G est nulle lorsque $\zeta \in \partial\Omega$, on a $d'_\zeta G + d''_\zeta G = 0$ sur $\partial\Omega$, en posant $d^c = i(d'' - d')$, (6) s'écrit donc encore :

$$U(z) = \frac{2}{(n-1)!} \left[\int_{\Omega_\zeta} i\, d'_\zeta G \wedge \beta^{n-1} \wedge f(\zeta) - \int_{\partial\Omega_\zeta} \frac{i}{2} d^c_\zeta G \wedge \beta^{n-1} u(\zeta) \right]. \tag{7}$$

En calculant la forme $(i/2)\, d^c_\zeta G \wedge \beta^{n-1}$ au point $\zeta \in \partial\Omega$, dans un repère $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tel que $(e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de T^c_ζ, on obtient encore :

$$U(z) = \frac{2}{(n-1)!} \int_{\Omega_\zeta} i\, d'_\zeta G \wedge \beta^{n-1} \wedge f(\zeta) - \int_{\partial\Omega_\zeta} \frac{\partial G}{\partial n} u(\zeta)\, dS(\zeta), \tag{8}$$

où $\partial G/\partial n$ est la dérivée normale à $\partial\Omega$ au point ζ, $\partial\Omega$ étant orienté par la normale extérieure.

$-\ \partial G/\partial n\, (\zeta, z)$ n'est autre que le noyau de Poisson $R(z, \zeta)$ de Ω, on a donc

$$U(z) = \frac{2\, i}{(n-1)!} \int_{\Omega_\zeta} d'_\zeta G \wedge \beta^{n-1} \wedge f(\zeta) + \int_{\partial\Omega_\zeta} R(z, \zeta)\, u(\zeta)\, dS(\zeta). \tag{9}$$

Supposons pour l'instant f de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$, et appliquons la formule de Stokes dans la première intégrale de (9), on a

$$(10)\quad U(z)=\frac{2}{(n-1)!}\int_{\Omega_\zeta} -G(z,\zeta)\beta^{n-1}\wedge i\,d'_\zeta f+\int_{\partial\Omega_\zeta} R(z,\zeta)u(\zeta)\,dS(\zeta).$$

Comme $W = 2 \operatorname{Re} U$, que $\theta = 2 \operatorname{Re} i\,d'f$, et que les noyaux G et R sont réels, on obtient finalement :

$$(11)\quad W(z)=\int_{\Omega_\zeta} -2G(z,\zeta)\frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!}\wedge\theta+\int_{\partial\Omega_\zeta} R(z,\zeta)2\operatorname{Re}u(\zeta)\,dS(\zeta).$$

Cette formule est démontrée lorsque f et θ sont de classe C^1, il est immédiat de l'étendre au cas général en utilisant la même procédure exhaustive que dans le paragraphe 5 de II. On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION. — *La fonction plurisousharmonique W solution de l'équation $i\,d'\,d''\,W = \theta$, construite dans* II, *est donnée par la formule*

$$W(z)=\int_{\Omega_\zeta} -2G(z,\zeta)\frac{\beta^{n-1}\wedge\theta}{(n-1)!}+\int_{\partial\Omega_\zeta} R(z,\zeta)2\operatorname{Re}u(\zeta)\,dS(\zeta).$$

où G est la fonction de Green de Ω, $R(z,\zeta)$ le noyau de Poisson de Ω, et u la solution de $d''_b\,u = w_{0,1}$ au sens de (I.2.4) (*cf.* (II.1.8)).

La restriction de W à $\partial\Omega_\varepsilon$ converge donc vers $2 \operatorname{Re} u$ *en norme L^1 sur le bord.*

On voit que le rôle joué dans la théorie par le potentiel de Green $\int_{\Omega_\zeta} -G(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$ est finalement assez modeste.

On démontre maintenant la majoration (I.2.20). Rappelons que $z^* \in \complement\,\bar{\Omega}$ vérifie :

$$(12)\quad \begin{cases} |z-z^*|\leqslant C_1\,\delta(z) \\ |z-\zeta|\leqslant C_2\,|z^*-\zeta| \end{cases},\qquad \text{pour tout}\quad \zeta\in\Omega\quad\text{et}\quad z\in\Omega.$$

Commençons par majorer le nombre E, défini par,

$$(13)\qquad E=|z-\zeta|^{-2n}-|z^*-\zeta|^{-2n}=\frac{|z^*-\zeta|^{2n}-|z-\zeta|^{2n}}{|z-\zeta|^{2n}\,|z^*-\zeta|^{2n}}.$$

Comme $|A^n-B^n|\leqslant n\,|A-B|\,C^{n-1}$ si $C\geqslant\max(A,B)$, on obtient, en prenant $C=(1+C_2)\,|z^*-\zeta|$ (d'après (12)),

$$E\leqslant 2n(1+C_2)^{2n-1}\frac{\big||z^*-\zeta|-|z-\zeta|\big|}{|z-\zeta|^{2n}\,|z^*-\zeta|},$$

$$E \leqslant 2n(1+C_2)^{2n-1} \frac{|z-z^*|}{|z-\zeta|^{2n}|z^*-\zeta|},$$

$$E \leqslant 2n C_1 C_2 (1+C_2)^{2n-1} \frac{\delta(z)}{|z-\zeta|^{2n+1}}. \tag{14}$$

On a d'autre part

$$\frac{z_i-\zeta_i}{|z-\zeta|^{2n}} - \frac{z_i^*-\zeta_i}{|z^*-\zeta|^{2n}}$$
$$= (z_i-\zeta_i)[|z-\zeta|^{-2n}-|z^*-\zeta|^{-2n}]+(z_i-z_i^*)|z^*-\zeta|^{-2n}.$$

D'après (13), (14) et (12), on en déduit :

$$\left| \frac{z_i-\zeta_i}{|z-\zeta|^{2n}} - \frac{z_i^*-\zeta_i}{|z^*-\zeta|^{2n}} \right| \leqslant \mathrm{Cte} \frac{\delta(z)}{|z-\zeta|^{2n}}, \tag{15}$$

c'est-à-dire

$$|K(z,\zeta)-K(z^*,\zeta)| \leqslant \mathrm{Cte} \frac{\delta(z)}{|z-\zeta|^{2n}}. \tag{16}$$

APPENDICE II

d''-cohomologie à support compact

Dans cet appendice, nous démontrons la proposition 2.3 du I.

D'après le paragraphe I, le problème est au fond de donner des formules intégrales explicites pour la d''-cohomologie à support compact dans Ω. D'après les formules générales de décomposition pour l'opérateur d'', figurant par exemple dans [27] (théorème 2.2, p. 142), il nous suffirait de construire une section $s : \overline{\Omega \times \Omega} \setminus \Delta \to E$ de classe C^1, qui coïncide avec s_b au voisinage de Δ, et qui est holomorphe en ζ (et non pas en z) quand z est assez près du bord $\partial\Omega$.

Si f est d''-fermée et à support compact dans Ω, on a une solution U à support compact dans Ω de l'équation $d'' U = f$, donnée par

$$U(z) = \int_{\Omega_\zeta} s^* \mu \wedge f(\zeta), \tag{1}$$

$s^* \mu$ désignant en fait par abus de langage la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de $s^* \mu$ (avec $q < n$). Mais on constate alors que U est seulement dans $L^1(\Omega)$ quand f est dans $L^1(\Omega)$, ce qui n'est guère commode pour les passages à la limite, L^1 n'étant pas réflexif.

On va donc procéder de manière un peu différente, quoique fondamentalement équivalente. f désigne donc une (p, q)-forme, de classe C^1, à support compact dans Ω, et φ désigne désormais une $(n-p, n-q)$-forme, de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$ (on ne suppose plus φ d''-fermée).

La relation $d[s_b^* \mu] = d''[s_b^* \mu] = c_n[\Delta]$, au sens des courants dans $C^n \times C^n$, entraîne la relation suivante (qui n'est autre qu'une variante de (I.3.4)) :

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_{\Omega \times \Omega} (s_b^* \mu) \wedge f(\zeta) \wedge d'' \varphi(z) + \int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} (s_b^* \mu) \wedge f(\zeta) \wedge \varphi(z). \tag{2}$$

Utilisons la section s_2 du théorème 3.2, définie sur $\bar{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z \setminus \Delta$, holomorphe en ζ. D'après le paragraphe 5, s_2 est défini par

$$s_2(\zeta, z) = (-Q(\zeta, z), \zeta, z). \tag{3}$$

Soit d'autre part F_2 la chaîne d'homotopie de s_b et s_2, définie par (I.3.14). Comme f est à support compact dans Ω, la formule de Stokes montre que

$$\int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} s_b^* \mu \wedge f \wedge \varphi = \int_{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} s_2^* \mu \wedge f \wedge \varphi + \int_{I \times \Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} F_2^* \mu \wedge f \wedge d'' \varphi. \tag{4}$$

Comme s_2 est holomorphe en ζ, des considérations de bidegré montrent que la deuxième intégrale de (4) est nulle pour $q < n$ (lorsque $q = n$, il faut supposer f orthogonale aux $(n-p, 0)$-formes holomorphes dans Ω).

D'après (2) et (4), on obtient donc :

$$c_n \int_{\Omega} f \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_{\Omega \times \Omega} s_b^* \mu \wedge f \wedge d'' \varphi + \int_{I \times \Omega_\zeta \times \partial\Omega_z} F_2^* \mu \wedge f \wedge d'' \varphi. \tag{5}$$

On va prolonger $F_2^* \mu$ à $I \times \Omega_\zeta \times \Omega_z$ de la façon suivante. Soit $\varkappa$ la forme différentielle

$$\varkappa = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i \bigwedge_{j \neq i} d\xi_j \wedge \omega(\zeta - z). \tag{6}$$

$F_2^* \mu$ est alors donnée par

$$F_2^* \mu = \frac{F_2^* \varkappa}{[t|\zeta - z|^2 - (1-t)\langle Q, \zeta - z \rangle]^n}. \tag{7}$$

On peut alors, d'après le paragraphe 4, prolonger $F_2^* \mu$ à $I \times \Omega_\zeta \times \Omega_z$ par la forme Ψ, définie par

$$\Psi = \frac{F_2^* \varkappa}{\{t|\zeta - z|^2 + (1-t)[-\rho(z) + \langle Q, z - \zeta \rangle]\}^n}, \tag{8}$$

où F_2 est définie par

$$F_2(t, \zeta, z) = (t(\bar{\zeta}-\bar{z})-(1-t)\,Q, \zeta, z), \tag{9}$$

et est une application de $I \times \Omega_\zeta \times \Omega_z$ dans $\mathbf{C}^{3n}$ (mais F_2 n'est à valeurs dans E que sur $I \times \Omega_\zeta \times \partial\Omega_z$).

Remplaçons $F_2^* \mu$ par Ψ dans (5), et appliquons la formule de Stokes par rapport à la seule variable z, nous obtenons

$$c_n \int_\Omega f \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_{\Omega \times \Omega} s_b^* \mu \wedge f \wedge d'' \varphi - \int_{I \times \Omega \times \Omega} (d_z'' \Psi) \wedge f \wedge d'' \varphi.) \tag{10}$$

Comme Ψ est singulière sur Δ, il est nécessaire de justifier l'intégration par parties en montrant que $d_z'' \Psi$ est localement intégrable, ce que nous ferons dans un lemme ultérieur en même temps que l'estimation de la solution obtenue. D'après (10), nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *Soit f une (p, q)-forme $(q < n)$, d''-fermée, à* support compact *dans Ω. On a une solution U à l'équation $d'' U = f$ dans Ω, donnée par*

$$U(z) = \frac{1}{c_n} \int_{\Omega_\zeta} s_b^* \mu \wedge f(\zeta) + \frac{(-1)^{p+q}}{c_n} \int_{I \times \Omega_\zeta} d_z'' \Psi \wedge f(\zeta), \tag{11}$$

où Ψ est la forme définie par (6), (8) *et* (9).

U est nulle sur le bord $\partial\Omega$, *au sens de la formule de Stokes,*

$$\int_\Omega f \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_\Omega U \wedge d'' \varphi,$$

pour toute $(n-p, n-q)$-forme φ de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$.

Si $q = n$, l'énoncé est encore vrai si on suppose f orthogonale au $(n-p, 0)$-formes holomorphes dans Ω.

Nous allons maintenant estimer le noyau qui donne U en fonction de f, et montrer que ce noyau est continue de $L^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour r convenable > 1. On commence donc par calculer $F_2^* \varkappa$, puis Ψ, puis $d_z'' \Psi$: Désignons abusivement par ξ la fonction de t, ζ et z :

$$\xi = t(\bar{\zeta}-\bar{z})-(1-t)\,Q. \tag{12}$$

D'après (6), nous devons calculer la composante de bidegré $(p, q-2)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de la forme

$$\textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \left(\xi_i \frac{\partial \xi_j}{\partial t} - \xi_j \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right) dt \wedge (\bigwedge_{k \neq i, j} d'' \xi_k) \wedge \omega(\zeta - z), \tag{3}$$

où d'' est la différentielle extérieure par rapport aux variables (ζ, z). Soit encore

(14) $\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}[(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i)\,Q_j-(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,Q_i]\,dt\wedge(\bigwedge_{k\neq i,\,j}d''\xi_k)\wedge\omega(\zeta-z).$

Comme $d''_z\, d''\,\xi_k = 0$ (puisque Q_k est holomorphe en ζ), la composante cherchée de $d''_z\,\Psi$ n'est autre que la composante de bidegré $(p, q-1)$ en z et $(n-p, n-q)$ en ζ de la forme

$$(15)\quad \sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}d''_z\left\{\frac{(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i)\,Q_j-(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,Q_i}{[t\,|\zeta-z|^2+(1-t)(-\rho(z)+\langle Q, z-\zeta\rangle)]^n}\right\}\wedge dt$$
$$\wedge(\bigwedge_{k\neq i,\,j}d''\xi_k)\wedge\omega(\zeta-z).$$

Les coefficients de $d''_z\,\Psi$ sont donc majorés (d'après (15) et (12), soit par

$$(16)\qquad \frac{\text{Cte}}{|\,t\,|\zeta-z|^2+(1-t)(-\rho(z)+\langle Q, z-\zeta\rangle)\,|^n}$$

soit par

$$(17)\qquad \frac{\text{Cte}[\,|\zeta-z|^2+(1-t)\,|\zeta-z|\,]}{|\,t\,|\zeta-z|^2+(1-t)(-\rho(z)+\langle Q, z-\zeta\rangle)\,|^{n+1}}$$

(où le terme en $(1-t)$ du numérateur provient du terme en $(1-t)\,d''_z\rho$ de la différentielle du dénominateur de (15)).

Nous allons en déduire le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *La solution U de l'équation $d''\,U = f$, donnée par* (11), *vérifie l'estimation :*

$$\|\,U\,\|_{L^r(\Omega)} \leqslant C(\Omega, r)\,\|\,f\,\|_{L^r(\Omega)},$$

pour tout r tel que $1-1/2\,n+2 < 1/r \leqslant 1$, $C(\Omega, r)$ étant une constante ne dépendant que de Ω et r.

Il suffit de montrer que

$$(18)\qquad \int_0^1 dt\int_{\Omega_z}|\,d''_z\,\psi(t, \zeta, z)\,|^r\,d\lambda(z) < C,$$

où la constante C est indépendante de $\zeta\in\Omega$ (l'estimation correspondante pour $s_b^*\,\mu$ est classique avec $1/r > 1-(1/2\,n)$).

Posons

$$(19)\qquad L = t\,|\zeta-z|^2+(1-t)[-\rho(z)+\langle Q, z-\zeta\rangle],$$

qui s'écrit encore, d'après (I.4.6),

$$(20)\qquad L = t\,|\zeta-z|^2+(1-t)[-\rho(z)+g(z, \zeta)].$$

D'après (I.4.12) et le lemme 4.3 (b) (en échangeant les rôles de ζ et z, et en remarquant que l'estimation de $\langle \xi_h, \zeta - z \rangle$ est en fait une estimation de $-\rho(\zeta)+g(\zeta, z)$), on obtient pour L l'estimation suivante

$$(21) \qquad |L| \geqslant C_0[|\zeta - z|^2+(1-t)(-\rho(z)+|\operatorname{Im} A|)],$$

où C_0 est une constante convenable ne dépendant que de Ω. Compte tenu de (16), (17), et (21), l'estimation (18) sera une conséquence des deux estimations suivantes :

$$(22) \qquad \int_0^1 dt \int_{\Omega_z} [|\zeta - z|^2+(1-t)(-\rho(z)+|\operatorname{Im} A|)]^{-nr} d\lambda(z) < C_1,$$

$$(23) \qquad \int_0^1 dt \int_{\Omega_z} \frac{(1-t)^r |\zeta - z|^r d\lambda(z)}{[|\zeta - z|^2+(1-t)(-\rho(z)+|\operatorname{Im} A|)]^{(n+1)r}} < C_2,$$

où C_1 et C_2 sont indépendantes de $\zeta \in \Omega$.

Démontrons d'abord l'estimation (23) en utilisant, pour chaque ζ fixé, le système de coordonnées du paragraphe 7. On est amené à montrer que

$$(24) \qquad \int_0^1 dt \int_{|w|<R_0} \frac{(1-t)^r |w|^r d\lambda(w)}{[|w|^2+(1-t)(|w_1|+|w_2|)]^{(n+1)r}} < +\infty.$$

En « simplifiant » par $|w|^r$, et en utilisant les coordonnées polaires dans le plan (w_1, w_2) et dans le sous-espace $(w_3, \ldots, w_{2n})$, il suffit de montrer que

$$(25) \qquad I = \int_0^1 dt \int_0^{R_0} du \int_0^{R_0} \frac{t^r u v^{2n-3} dv}{(v^2+tu)^{(n+(1/2))r}} < +\infty.$$

On majore la dernière intégrale en intégrant de 0 à $+\infty$, on obtient donc

$$(26) \qquad I \leqslant \int_0^1 dt \int_0^{R_0} t^r u (tu)^{n-1-(n+(1/2))r} du \int_0^{+\infty} \frac{v^{2n-3} dv}{(v^2+1)^{(n+(1/2))r}}.$$

L'intégrale converge pourvu que $1 \leqslant r < (2n+2)/(2n+1)$.

De même pour démontrer la majoration (22), il suffit de démontrer que

$$(27) \qquad J = \int_0^1 dt \int_{|w|<R_0} [|w|^2+(1-t)(|w_1|+|w_2|)]^{-nr} d\lambda(w) < +\infty,$$

soit encore en coordonnées polaires (et changeant t en $1-t$),

$$(28) \qquad J \leqslant \int_0^1 dt \int_0^{R_0} du \int_0^{R_0} \frac{u v^{2n-3} dv}{(v^2+u^2+tu)^{nr}} < +\infty.$$

On majore, en intégrant v entre 0 et $+\infty$,

$$J \leqslant \int_0^1 dt \int_0^{R_0} u(u^2+tu)^{n-1-nr}\, du \int_0^{+\infty} \frac{v^{2n-3}dv}{(v^2+1)^{nr}}. \tag{29}$$

Soit encore

$$J \leqslant \int_0^1 dt \int_0^{R_0} (u^2+tu)^{n-(1/2)-nr}\, du \int_0^{+\infty} \frac{v^{2n-3}\, dv}{(v^2+1)^{nr}}. \tag{30}$$

L'intégrable converge pour $n-(1/2)-nr > -1$, c'est-à-dire

$$1 \geqslant \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{2n+1},$$

ce qui achève de démontrer la proposition 2.

Comme les espaces $L^r(\Omega)$ pour $r > 1$ sont réflexifs, le résultat suivant est une conséquence immédiate des proposition 1 et 2, en utilisant une régularisation et un passage à la limite faible.

COROLLAIRE. — *Soit f une (p, q)-forme $(q < n)$, d''-fermée, à support compact dans Ω et à coefficients mesures sur Ω. Il existe une solution U à l'équation $d''U = f$ dans Ω, vérifiant $\| U \|_{L^r(\Omega)} \leqslant C(\Omega, r)\, \| f \|_1$, pour tout r tel que $1-(1/(2n+2)) < 1/r < 1$.*

De plus, U admet une valeur au bord nulle sur $\partial\Omega$, au sens de la formule de Stokes $\int_\Omega f \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_\Omega U \wedge d''\varphi$, pour toute $(n-p, n-q)$-forme φ de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition annoncée.

PROPOSITION 3. — *Soit $f \in \mathscr{M}^1_{p,q}(\Omega)$ une forme, d''-fermée à coefficients mesures bornées sur Ω et $u \in L^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$ (ou $u \in \mathscr{M}^1_{p,q-1}(\partial\Omega)$) une solution de l'équation $d''_b u = f$ au sens de* (I.2.4). *Il existe une solution U de l'équation $d''_b\, U = f$ dans Ω, admettant u comme valeur au bord au sens suivant*

$$\int_\Omega f \wedge \varphi - \int_{\partial\Omega} u \wedge \varphi = (-1)^{p+q} \int_\Omega U \wedge d''\varphi,$$

pour toute $(n-p, n-q)$-forme φ de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$. De plus, U vérifie

$$\| U \|_{L^r(\Omega)} \leqslant C(\Omega, r)(\| f \|_1 + \| u \|_{L^1(\partial\Omega)}),$$

pour tout r tel que $1 \geqslant 1/r > 1-(1/(2n+2))$.

Remarquons d'abord que si on applique le corollaire dans Ω_ε au lieu de Ω, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}$ assez petit, on peut choisir la constante $C(\Omega_\varepsilon, r)$ indépendante de ε. L'hypothèse sur f et u signifiant, d'après (I.2.4), que $\tilde{f}-[\partial\Omega]_{0,1}\wedge u$ est d''-fermée dans Ω_ε pour $\varepsilon < 0$, on peut appliquer le corollaire en y remplaçant Ω par Ω_ε et f par $\tilde{f}-[\partial\Omega]_{0,1}\wedge u$. Il existe donc $U_\varepsilon \in L^1_{p,q-1}(\Omega_\varepsilon)$ tel que

$$(31) \qquad \| U_\varepsilon \|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C(\Omega, r)[\| f \|_1 + \| u \|_{L^1(\partial\Omega)}],$$

pour r tel que $1 \geqslant 1/r > 1-(1/(2n+2))$, U_ε vérifiant de plus :

$$(32) \qquad \int_\Omega f\wedge\varphi - \int_{\partial\Omega} u\wedge\varphi = (-1)^{p+q}\int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon \wedge d''\varphi.$$

D'après (31), on peut extraire de la famille U_ε une sous-suite faiblement convergente dans $L^r(\Omega)$. Un passage à la limite dans (32) entraîne alors la proposition 3.

APPENDICE III

Représentations intégrales pour les fonctions holomorphes

Lorsque f est une (n, n)-forme sur Ω, la solution tangentielle de l'équation $d''\,U = f$, donnée par le théorème 5.1, peut également s'interpréter par dualité comme une formule de représentation intégrale pour les fonctions holomorphes. D'après le théorème 5.1, nous avons la relation suivante

$$(1) \qquad c_n \int_\Omega f\wedge\varphi = \int_{\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z} \nu\wedge f(\zeta)\wedge\varphi(z),$$

où φ est une fonction holomorphe dans Ω de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$. Comme la formule est vraie pour toute forme f de type (n, n), elle signifie que

$$(2) \qquad \varphi(\zeta) = \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega_z} \tilde{\nu}\wedge\varphi(z),$$

où $\tilde{\nu}$ est la composante de bidegré $(0, 0)$ en ζ et $(n, n-1)$ en z de ν. Le théorème 5.1 donne $\tilde{\nu}$ de façon explicite. Il est d'autre part immédiat d'étendre la formule (2) au cas où φ est seulement holomorphe dans Ω et continue dans $\bar{\Omega}$ (appliquer (2) en remplaçant Ω par Ω_ε $(\varepsilon > 0)$ et passer à la limite). On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si* φ *est une fonction holomorphe dans* Ω *et continue dans* $\bar{\Omega}$, φ *admet la représentation intégrale suivante :*

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{[-\rho(\zeta)]^n\, Q_i(\bigwedge_{j\neq i} d_z''\, Q_j)\wedge\omega(z)}{[-\rho(\zeta)+\langle P, \zeta-z\rangle]^n \langle Q, \zeta-z\rangle^n}\,\varphi(z),$$

où P et Q sont donnés par (I.4.6) *et* (I.5.1), *où* $\zeta\in\Omega$.

Dans le cas de la boule unité, on a $P = \bar{\zeta}$ et $Q = \bar{z}$, on obtient la formule de Poisson-Szegö :

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{c_n}\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{(1-|\zeta|^2)^n}{|1-\langle\bar{\zeta}, z\rangle|^{2n}}\,\bar{z}_i \bigwedge_{j\neq i} d\bar{z}_j\wedge\omega(z)\,\varphi(z).$$

Dans le cas général, le noyau de la proposition 1 a le même comportement qu'un noyau de Poisson-Szegö. Les formules du théorème 5.1 sont intuitivement des formules du type Poisson-Szegö pour les formes différentielles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLESON (L.). — Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.*, t. 76, 1962, p. 547-559.

[2] CARLESON (L.). — The corona theorem, « *Proocedings of the 15th Scandinavian Congress* [1968, Oslo] », p. 121-132. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 118).

[3] CHEE PAK SONG. — The Blaschke condition for bounded holomorphic function, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 148, 1970, p. 248-263.

[4] FOLLAND (G. B.) and KOHN (J. J.). — *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex.* — Princeton, Princeton University Press 1972, (*Annals of Mathematics Studies*, 75).

[5] FOLLAND (G. B.) and STEIN (E. M.). — Parametrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudoconvex boundaries; *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 80, 1974, p. 253-258.

[6] FOLLAND (G. B.) and STEIN (E. M.). — Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 27, 1974, p. 429-522.

[7] GRAUERT (H.) und LIEB (I.). — Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial}f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen, « *Complex analysis. Proceedings of the conference at Rice University* [1969, Houston] », p. 29-50. — Houston, William Marsh Rice University, 1971 (*Rice University Studies*, 56, n° 2).

[8] GRUMAN (L.). — The zeros of holomorphic functions in strictly pseudoconvex domains, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[9] HENKIN (G. M.). — Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains, and some applications, *Math. USSR-Sbornik*, t. 7, 1969, p. 597-616; [in Russian] *Mat. Sbornik*, t. 78 (120), 1969, p. 611-632.

[10] HENKIN (G. M.). — Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and application to the $\bar{\partial}$-problem, *Math. USSR-Sbornik*, t. 11, 1970, p. 273-282; [in Russian] *Mat. Sbornik*, t. 82 (124), 1970, p. 300-308.

[11] HENKIN (G. M.). — Rešenija s ocenkami uravnenij G. Levi i Puankare-Lelona..., *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, t. 224, 1975, p. 771-774.

[12] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions.* — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962 (Prentice-Hall Series in moder Analysis).

[13] HÖRMANDER (L.). — L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions, *Math. Scand.*, t. 20, 1967, p. 65-78.

[14] HÖRMANDER (L.). — Generators for some rings of analytic functions, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1967, p. 943-949.

[15] KERZMAN (N.). — Hölder and L^p estimates for the solutions of $\partial\bar{u} = f$ in strongly pseudoconvex domains, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 24, 1971, p. 301-379.

[16] KERZMAN (N.) and NAGEL (A.). — On finitely generated ideals in certain function algebras, *J. Funct. Anal.*, t. 7, 1971, p. 212-215.

[17] KOPPELMAN (W.). — The Cauchy Integral for differential forms, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1967, p. 554-556.

[18] LAVILLE (G.). — Résolution du $\partial\bar{\partial}$ avec croissance dans les ouverts pseudo-convexes étoilés de C^n, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 554-556.

[19] LAVILLE (G.). — *Diviseurs et classes de Nevanlinna*, Thèse 3e cycle, Univ. P.-et-M.-Curie [Paris-VI], 1975.

[20] LELONG (P.). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 239-262.

[21] LELONG (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables).* — Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*, Été 1967, 28).

[22] LELONG (P.). — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives.* — Paris, Londres, New York, Gordon and Breach, Dunod, 1968 (*Cours et Documents de Mathématiques et de Physique*).

[23] LIEB (I.). — Die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvex Gebieten, *Math. Annalen*, t. 190, 1970, p. 6-44.

[24] MALLIAVIN (P.). — Fonctions de Green d'un ouvert strictement pseudoconvexe et de classe de Nevanlinna, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, série A, p. 141-144.

[25] MUELLER (G.). — *Functions of finite order in the ball*, Thesis, University of Notre-Dame, 1971.

[26] OVRELID (N.). — Integral representation formulas and L^p estimates for the $\bar{\partial}$-equation, *Math. Scand.*, t. 29, 1971, p. 137-160.

[27] OVRELID (N.). — Integral representation formulas for differential formes and solutions of the $\bar{\partial}$-equation, « *Colloque international du C.N.R.S.*, n° 208 *: Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe* ». — Paris, Gauthier-Villars, 1974 (*Agora Mathematica*).

[28] RAMIREZ de ARELLANO (E.). — Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis, *Math. Annalen*, t. 184, 1970, p. 172-187.

[29] RANGE (M.) and SIU (Y. T.). — *Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries*, Preprint, Yale University, 1972.

[30] ROMANOV (A. V.). — Formula i ocenki dlja rešenij kasatel'nogo uravnenija Koŝi-Rimana, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, t. 220, 1975, p. 532-535.

[31] ROOS (G.). — *L'intégrale de Cauchy dans C^n*, Preprint, Université de Paris-VII, 1970-1971.

[32] ROOS (G.). — Formules intégrales pour les formes différentielles sur C^n, I, *Annali della Scuola Normale di Pisa*, t. 26, 1972, p. 171-179.

[33] SERRE (J.-P.). — Un théorème de dualité, *Comment. math. Helvet.*, t. 29, 1955, p. 9-26.

[34] SIU (Y. T.) and TRAUTMANN (G.). — Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 172).

[35] SKODA (H.). — Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$, *Bull. Soc. math. France*, t. 100, 1972, p. 353-408.

[36] SKODA (H.). — Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' dans les ouverts strictement pseudo-convexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, 1975, série A, p. 633-636.

[37] SKODA (H.). — Zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans les ouverts strictement pseudo-convexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, 1975, série A, p. 1677-1680.

[38] STEIN (E. M.). — *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. — Princeton, Princeton University Press, 1972 (*Mathematical Notes*).

[39] STOUT (E. L.). — The second cousin problem with bounded data, *Pacific J. Math.*, t. 26, 1968, p. 379-387.

[40] STOUT (E. L.). — On the multiplicative cousin problem with bounded data, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (à paraître).

[41] HARVEY (R.). — *Summer Institut on several complex variables*, at Williamstown, August 1975, edited by the American Mathematical Society.

(Texte reçu le 15 septembre 1975.)

Henri SKODA,
Villa La Clarté,
Avenue Albert-1er,
Cimiez,
06100 Nice.