BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC REVERSAT

Un résultat métrique d'approximations diophantiennes non homogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 129-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__129_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 129-144.

UN RÉSULTAT MÉTRIQUE D'APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES NON HOMOGÈNES

PAR

MARC REVERSAT

[Centre de Mathématiques, École Polytechnique]

RÉSUMÉ. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

Soit x un élément de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$. On étudie le problème suivant d'approximations diophantiennes non homogènes : évaluer le cardinal $\nu(x, N)$ de l'ensemble des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ et $\| x - u_n \|_d < (1/2)\, \varepsilon_n$ (où $\|.\|_d$ désigne la distance usuelle dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$). On montre en particulier que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de la forme $(n\, \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$, on a, pour toute suite décroissante $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge,

$$\nu(x, N) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \qquad (N \to +\infty)$$

pour presque tout $x \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ (au sens de la mesure de Haar de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$), si et seulement si α est de type constant. C'est un problème symétrique du problème métrique de Khintchine, le résultat en est différent car α n'est presque jamais de type constant.

ABSTRACT. — Let $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ be a sequence of elements of $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ and $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a sequence of positive real numbers. Let x be an element of $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$. In this paper, we are interested by the simultaneous non homogeneous diophantine problem: to compute the number $\nu(x, N)$ of integers n such that $1 \leqslant n \leqslant N$ and $\| x - u_n\|_d < (1/2)\, \varepsilon_n$ (where $\|.\|_d$ means the usual distance in $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$). We prove in particular that if $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is of the form $(n\, \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$, we have, for all decreasing sequence $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ of positive real numbers,

$$\nu(x, N) \sim \textstyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \qquad (N \to +\infty)$$

for alsmost all $x \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ (in the sense of the Haar-measure of $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$), if and only if α is of constant type. This is a symmetrical problem (and a different result because α is of constant type almost never) of the metrical Kihntchine's problem.

1. Introduction

Soit d un entier positif. Nous désignerons par μ_d la mesure de Haar normalisée du groupe compact $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ et par $\|.\|_d$ sa norme : si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un d-uplet de nombres réels dont x désigne l'image canonique dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, on a $\| x \|_d = \sup_{i=1,\ldots,d} \| x_i \|$, où $\|.\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche. Le théorème métrique de Khintchine (KHINČIN) ([2], ch. 7) peut alors s'énoncer ainsi : si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, l'inéquation diophantienne

$$(1.1) \qquad \| n\alpha \|_d < \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

possède une infinité de solutions en entiers positifs n pour μ_d-presque tout ou μ_d-presque aucun $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ selon que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge ou converge.

Si $\eta(\alpha, N)$ désigne le nombre de solutions de (1.1) en entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$, P. ERDÖS [3], W. J. LEVEQUE [9] et W. M. SCHMIDT [15] montrèrent que $\eta(\alpha, N)$ est presque partout équivalent à sa valeur moyenne, c'est-à-dire que pour μ_d-presque tout $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, on a

$$(1.2) \qquad \eta(\alpha, N) \sim \int \eta(\alpha, N)\, d\mu_d(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \qquad (N \to +\infty).$$

De nombreux auteurs étudièrent le problème voisin suivant [14] : étant donnés $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge, une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'applications de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ dans lui-même, et x un élément *fixé* de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, quelle est la mesure de l'ensemble des éléments α de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ tels que le nombre de solutions en entiers n de l'inéquation

$$(1.3) \qquad \| \varphi_n(\alpha) - x \|_d < \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

vérifie la relation (1.2) ? Par exemple, W. M. SCHMIDT [16] étudia ce problème si φ_n est l'application $\alpha \longrightarrow P(n)\,\alpha$ où P est un polynôme à coefficients entiers, W. PHILIPP [12] et B. de MATHAN [10] pour certaines suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lacunaires.

Si maintenant α *est fixé*, on peut étudier la mesure de l'ensemble des éléments x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ pour lesquels l'inéquation (1.3) a une infinité de solutions n. Ce dernier problème conduisit J. LESCA (resp. B. de MATHAN) à introduire la notion de suite eutaxique [7] (resp. fortement eutaxique [10]) : soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, désignons par $\nu(x, N)$ *le nombre de solutions en entiers n, tels que* $1 \leqslant n \leqslant N$, *à l'inéquation* $\| u_n - x \|_d < (1/2)\,\varepsilon_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est dite eutaxique* (*resp. fortement eutaxique*) *relativement à la suite* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *si, pour* μ_d*-presque tout* $x \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, *on a*

$$\lim_{N \to +\infty} \nu(x, N) = +\infty \, (resp. : \nu(x, N) \sim \textstyle\sum_{n=1} \varepsilon_n^d \qquad (N \to +\infty)).$$

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est eutaxique* (*resp. fortement eutaxique*) *relativement à toute suite* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *décroissante de nombres réels positifs, telle que la série* $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ *diverge, elle est dite eutaxique* (*resp. fortement eutaxique*).

Ces problèmes, symétriques des problèmes antérieurs, conduisent à des résultats nouveaux. Par exemple, le théorème métrique non homogène de Khintchine montre que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ est *eutaxique relativement à une suite* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *donnée pour* μ_d*-presque tout* $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$. Or J. Lesca [7] et l'auteur [13] ont montré que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ est eutaxique dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ si et seulement si α est de type constant (pour la définition du type, *voir* [6] et [1]) c'est-à-dire si et seulement si

$$M_d(\alpha) = \lim\ \sup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^{1/d} \| n\,\alpha \|_d} \right) \tag{1.4}$$

est fini, donc en particulier pour μ_d-presque aucun α. De même, il résulte de [16] que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ est fortement eutaxique dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ *relativement à une suite* $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *fixée* pour μ_d-presque tout α, et B. de Mathan a montré que, en dimension 1, la condition (1.4) caractérise les éléments α de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tels que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ soit *fortement eutaxique* [11].

Dans le travail qui suit, nous étudions les suites fortement eutaxiques de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$: pour l'essentiel, nous montrons que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ ($d \geqslant 1$) est fortement eutaxique si, et seulement si, le nombre

$$M_d(\alpha) = \lim\ \sup_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{1/d} \| n\,\alpha \|_d}$$

est fini, et nous étendons cette propriété à des applications linéaires à valeurs dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$. La démonstration de B. de Mathan, en dimension 1, utilise le fait que si $M_1(\alpha)$ est fini, la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ possède « beaucoup » d'intervalles de restes bornés, c'est-à-dire qu'elle est presque à discrépance finie ([4], [8]). Cette propriété très forte de répartition, exceptionnelle pour une suite d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et conséquence de l'existence de l'algorithme des fractions continues, ne se généralise certainement pas aux dimensions supérieures. Ainsi, c'est par une méthode différente que nous étendons au cas $d > 1$ le résultat de B. de Mathan : nous établissons notre résultat en remarquant, après W. W. Adams ([1], prop. 3), que, si $M_d(\alpha)$ est fini, la suite $(n\,\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ possède une discrépance suffisamment petite pour une famille « riche » d'indices.

2. Eutaxie et discrépance

Les résultats annoncés dans le paragraphe précédent sont des corollaires du théorème plus général suivant :

THÉORÈME. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ telle qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant*

(i) $q_{k+1}/q_k = 0(1)$ (uniformément par rapport à k);

(ii) *si, pour tout hypercube I de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ et pour M et N entiers tels que $0 \leqslant M < N$, on désigne par $\pi(I, M, N)$ le nombre d'entiers n tels que $M < n \leqslant N$ et $u_n \in I$, on a*

$$\pi(I, M, M+q_k) = q_k\,\mu_d(I) + O(q_k\,\mu_d(I))^{1-(1/d)} + O(1)$$

uniformément par rapport à I, M et k.

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est fortement eutaxique. Plus précisément, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante de nombres réels positifs, pour tout élément x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, si l'on désigne par $\nu(x, N)$ le nombre de solutions en entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ à l'inéquation $\|u_n - x\|_d < (1/2)\,\varepsilon_n$, on a, pour tout nombre réel positif ξ et pour μ_d-presque tout élément x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$:

$$(2.1)\quad \nu(x, N) = \textstyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d + O\big((\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/4(2d+1))} \max(1, (\log \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1+\xi})\big)$$

uniformément par rapport à l'entier N.

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on désigne par I_n l'hypercube ouvert de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ de centre u_n et de côté ε_n. Si ρ est un nombre réel positif, si x et y sont deux éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, on note $\chi_\rho(x, y)$ la valeur prise en y par la fonction caractéristique de l'hypercube ouvert de centre x et de côté ρ. On a les relations évidentes suivantes (pour $\rho > 0$, x et y éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, N et n entiers positifs) :

$$\chi_\rho(x, y) = \chi_\rho(y, x),$$

$$\nu(x, N) = \textstyle\sum_{n=1}^{N} \chi_{\varepsilon_n}(x, u_n),$$

$$\int \chi_{\varepsilon_n}(x, u_n)\, d\mu_d(x) = \mu_d(I_n) = \varepsilon_n^d.$$

Il suffit d'établir la relation (2.1) lorsque la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge et lorsque de plus $\varepsilon_0 < 1$ (donc $\varepsilon_n < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$). La démonstration se fait alors en deux étapes, selon que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît lentement ou rapidement; soit q un élément de la suite $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

PROPOSITION 1. — *Soient m et M des entiers tels que $0 \leqslant m < M$ et tels que q divise $M-m$. Alors, si ρ désigne un nombre réel tel que $0 < \rho \leqslant \varepsilon_{M-q+1}$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant\ & \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^d \\ & + O((q+\rho^{-d}+\rho^{-1} q^{1-(1/d)})\,\varepsilon_m^{2d}) \\ & + O(\rho\, \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^{d-1}) \\ & + O((\rho^{-1} q^{-(1/d)}+\rho^{-d} q^{-1})\,\varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^d)\end{aligned}$$

uniformément par rapport à m, M et ρ.

PROPOSITION 2. — *Soient m, M et N des entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant M < N$ et tels que q divise $N-M$. Alors, si t désigne un nombre réel tel que $\varepsilon_m \geqslant t \geqslant \varepsilon_{M+1}$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant\ & \varepsilon_m^d \sum_{n=M+1}^{N-q+1} \varepsilon_n^d + O((q\, \varepsilon_m^d + q^{1-(1/d)}\, \varepsilon_m^{d-1} + 1)\,\varepsilon_{M+1}^d) \\ & + O((q^{-(1/d)}\, \varepsilon_m^{d-1} + t\, \varepsilon_m^{d-1} + q^{-1}) \sum_{n=M+1}^{N-q+1} \varepsilon_n^d)\end{aligned}$$

uniformément par rapport à m, M, N et t.

Ces deux propositions conduisent au résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Soient m et N deux entiers tels que $0 \leqslant m < N$. Alors*

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{N} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant\ & \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d \\ & + O((\varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))}) + O(\varepsilon_m^d)\end{aligned}$$

uniformément par rapport à m et N.

Supposons cette proposition démontrée. Elle permet déjà de montrer que

$$\int \nu^2(x, N)\, d\mu_d(x) \sim \Big(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d\Big)^2, \qquad (N \to +\infty).$$

Pour obtenir une relation ponctuelle presque partout, il nous faut raffiner le théorème de Fischer-Riesz selon une méthode utilisée par plusieurs auteurs ([15], [16], [12], [11]) :

Pour tout entier positif N posons $V(N) = [\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d]$ (où $[.]$ désigne la partie entière). Le fait que $0 < \varepsilon_n < 1$ pour tout entier n, et que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge, montre que $N \mapsto V(N)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$, est surjective.

(On a en effet supposé que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des propositions précédentes satisfait $\varepsilon_0 < 1$.) Soit D une partie de $\mathbf{N}$, contenant 0, telle que la restriction de V à D soit une bijection sur $\mathbf{N}$.

Soit $L_{s,t}$ l'ensemble des couples $(M, N) \in D\times D$ tels que $0 \leqslant M < N$, $V(N) \leqslant 2^s$, et tels qu'il existe un entier u avec $V(M) = u\,2^t$, $V(N) = (u+1)\,2^t$. Soit :

$$L_s = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant s} L_{s,t}.$$

LEMME 1. — *Si, pour* $x\in(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ *et pour* M *et* N *entiers, on pose* $\nu(x, M, N) = \nu(x, N)-\nu(x, M)$, *on a*

$$\sum_{(M,N)\in L_s}\int(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^2\,d\mu_d(x) = O(2^{(2-(1/2\,(2d+1)))s}).$$

uniformément par rapport à s.

Preuve. — Soient M et N entiers tels que $0 \leqslant M < N$. On a, d'après la proposition 3 :

$$\int(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^2\,d\mu_d(x) = O((\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^{(2-(1/2\,(2d+1)))}) + O(\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d).$$

Si donc $(M, N)\in L_{s,t}$, il vient

$$\int(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^2\,d\mu_d(x) = O(2^{(2-1/2\,(2d+1)))t}).$$

Le nombre d'éléments de $L_{s,t}$ est au plus 2^{s-t}, donc

$$\sum_{(M,N)\in L_{s,t}}\int(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^2\,d\mu_d(x) = O(2^{s-t}\,2^{(2-1/2\,(2d+1))t})$$

et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{(M,N)\in L_s}&\int(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^N \varepsilon_n^d)^2\,d\mu_d(x)\\ &= O(\sum_{0\leqslant t\leqslant s} 2^{s-t}\,2^{(2-(1/2\,(2d+1)))t})\\ &= O(2^{(2-(1/2\,(2d+1)))s}).\end{aligned}$$

Soit ξ un nombre réel positif. Pour tout entier positif s, soit U_s l'ensemble des éléments x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ tels que :

$$\sum_{(M,N)\in L_s}(\nu(x, M, N)-\sum_{n=M+1}^{N}\varepsilon_n^d)^2 > s^{(1+2\xi)}2^{(2-(1/2(2d+1)))s}.$$

LEMME 2. — *On a, pour tout entier positif s*

$$\mu_d(U_s) = O(s^{-(1+2\xi)}) \tag{2.2}$$

(*uniformément par rapport à s*) *et si N est un élément de D tel que* $V(N) \leqslant 2^s$, *on a pour tout* $x \notin U_s$:

$$|\nu(x, N)-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d| \leqslant s^{1+\xi}2^{(1-(1/4(2d+1)))s}. \tag{2.3}$$

Preuve. — La relation (2.2) résulte directement du lemme 1. Si $N \in D$ et si $V(N) \leqslant 2^s$, le développement 2-adique de $V(N)$ montre qu'il existe une suite d'entiers $N_0 = 0 < N_1 < \ldots < N_H = N$ (où $H \leqslant s$) telle que $(N_h, N_{h+1}) \in L_s$ pour $h = 0, 1, \ldots, H-1$.

On a alors, pour $x \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$:

$$\nu(x, N)-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d = \sum_{h=0}^{H-1}(\nu(x, N_h, N_{h+1})-\sum_{n=N_h+1}^{N_{h+1}}\varepsilon_n^d)$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy :

$$(\nu(x, N)-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d)^2 \leqslant H\sum_{h=0}^{H-1}(\nu(x, N_h, N_{h+1})-\sum_{n=N_h+1}^{N_{h+1}}\varepsilon_n^d)^2.$$

Par conséquent, si $x \notin U_s$:

$$\begin{aligned}(\nu(x, N)-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d)^2 &\leqslant H s^{1+2\xi}2^{(2-(1/2(2d+1)))s}\\ &\leqslant s^{2+2\xi}2^{(2-(1/2(2d+1)))s} \qquad \text{puisque } H \leqslant s,\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (2.3).

Démonstration de la relation (2.1). — La relation (2.3) montre que si $N \in D$, $V(N) = 2^s$ et $x \notin U_s$, on a

$$\nu(x, N) = \sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d + O((\log\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d)^{1+\xi}(\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d)^{1-(1/4(2d+1))}). \tag{2.4}$$

Cette relation est encore vraie pour tout entier positif N (tel que $\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d \geqslant 1$), car il existe toujours des éléments N_1 et N_2 de D tels que $N_1 \leqslant N \leqslant N_2$ et $V(N_2)-V(N_1) \leqslant 1$.

D'autre part, la série $\sum_{s\in\mathbf{N}^*}\mu_d(U_s)$ est convergente, donc l'ensemble des éléments x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, qui appartiennent à une infinité d'ensembles U_s, est de mesure nulle.

Par conséquent, la relation (2.4) montre que, pour μ_d-presque tout x et pour tout entier N positif

$$\nu(x, N) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d + O((\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/4(2d+1))} \max(1, (\log \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1+\xi})).$$

3. Démonstration de la proposition 1

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit q un élément de la suite $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et soient m et H deux entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant H$. Alors, si ρ est un nombre réel tel que $0 < \rho < \varepsilon_{H+1}$, on a*

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant q\, \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^d + O((\rho^{-1} q^{1-(1/d)} + \rho^{-d})\, \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^d) + O(q\, \rho \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^{d-1})$$

uniformément par rapport à m, H, q et ρ.

Preuve. — Si I est un hypercube de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ et S un entier positif, notons $\pi(I, S)$ le nombre d'entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant S$ et $u_n \in I$. Comme il résulte des hypothèses (i) et (ii) de l'énoncé du théorème que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équirépartie, on a

$$(3.1) \qquad \sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) = \lim_{S \to +\infty} \frac{1}{S} \sum_{n=H+1}^{H+q} \pi(I_n \cap I_m, S),$$

et

$$(3.2) \quad \sum_{n=H+1}^{H+q} \pi(I_n \cap I_m, S) = \sum_{n=H+1}^{H+q} \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}(u_m, u_s)\, \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) = \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}(u_m, u_s) \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s).$$

Évaluons $\mathrm{H}_{n=H+1}^{H+q}\, \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s)$. Pour n et s entiers, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, l'inégalité triangulaire montre que $\| u_n - x \|_d < \varepsilon_n/2$ et $\| u_n - u_s \|_d < \rho/2$ impliquent $\| x - u_s \|_d < (1/2)(\varepsilon_n + \rho)$, d'où l'on déduit

$$\chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s)\, \chi_\rho(u_n, x) \leqslant \chi_\rho(u_n, x)\, \chi_{\varepsilon_n + \rho}(x, u_s).$$

En appliquant ceci pour $x = u_r$, $r = 1, \ldots, R$, il vient

$$\chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \sum_{r=1}^{R} \chi_\rho(u_n, u_r) \leqslant \sum_{r=1}^{R} \chi_\rho(u_n, u_r)\, \chi_{\varepsilon_n + \rho}(u_r, u_s)$$

D'autre part, l'équirépartition de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ montre que

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \chi_\rho(u_n, u_r) = \rho^d.$$

Donc

$$\chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \leqslant \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R\,\rho^d} \sum_{r=1}^{R} \chi_\rho(u_n, u_r)\,\chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_r, u_s).$$

En appliquant cette dernière formule pour $n = H+1, \ldots, H+q$ et en sommant sur n, il vient

$$(3.3)\quad \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \leqslant \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R\,\rho^d} \sum_{r=1}^{R} \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_n, u_r)\,\chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_r, u_s).$$

Évaluons $\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho\,(u_r, u_n)\,\chi_{\varepsilon_n+\rho}\,(u_s\,,\,u_r)$. Pour cela remarquons que, d'après l'hypothèse (ii)

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_r, u_n) = q\,\rho^d + O(q^{1-(1/d)}\,\rho^{d-1}) + O(1)$$

et que d'autre part $n \mapsto \chi_{\varepsilon_n+\rho}\,(u_s\,,\,u_r)$ est une fonction décroissante. Par conséquent

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_r, u_n)\,\chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r) \leqslant q\,\rho^d\,\chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}(u_s, u_r) + O((q^{1-(1/d)}\,\rho^{d-1}+1)\,\chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}(u_s, u_r)).$$

En portant ceci dans (3.3), il vient

$$(3.4)\quad \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_s, u_n) \leqslant \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R\,\rho^d} \{ q\,\rho^d + O(q^{1-(1/d)}\,\rho^{d-1}+1) \} \sum_{r=1}^{R} \chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}(u_s, u_r)$$

D'autre part, $\lim_{R\to+\infty} 1/R \sum_{r=1}^{R} \chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}\,(u_s\,,\,u_r) = (\varepsilon_{H+1}+\rho)^d$. En faisant tendre R vers l'infini, il résulte donc de (3.4) :

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_s, u_n) \leqslant q\,(\varepsilon_{H+1}+\rho)^d + O((q^{1-(1/d)}\,\rho^{-1}+\rho^{-d})(\varepsilon_{H+1}+\rho)^d)$$
$$\leqslant q\,\varepsilon_{H+1}^d + O(q\,\rho\varepsilon_{H+1}^{d-1}) + O((q^{1-(1/d)}\,\rho^{-1}+\rho^{-d})\,\varepsilon_{H+1}^d)$$

puisque $\varepsilon_{H+1} \geqslant \rho$.

Avec (3.2), il vient

$$\frac{1}{S}\sum_{n=H+1}^{H+q} \pi(I_n \cap I_m, S) \leqslant \frac{1}{S}\{ \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}(u_m, u_s) \} \{ q\,\varepsilon_{H+1}^d + O(q\rho\varepsilon_{H+1}^{d-1}) + O((q^{1-(1/d)}\,\rho^{-1}+\rho^{-d})\varepsilon_{H+1}^d) \}.$$

Comme $\lim_{S\to+\infty} 1/S \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}\,(u_m\,,\,u_s) = \varepsilon_m^d$, la relation (3.1) donne donc le lemme.

Pour montrer la proposition 1 nous avons encore besoin de la remarque suivante :

LEMME 4. — *Soient a un entier positif, H, M et K des entiers tels que $0 \leqslant H < M = H+(K+1)\,q$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{H+kq+1}^{a} \leqslant q\, \varepsilon_{H+1}^{a} + \sum_{n=H+2}^{M-q+1} \varepsilon_{n}^{a}.$$

Preuve. — $\sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{H+kq+1}^{a} = q\, \varepsilon_{H+1}^{a} + \sum_{k=1}^{K} q\, \varepsilon_{H+kq+1}^{a}$, or, si $k > 0$, et puisque la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante

$$q\, \varepsilon_{H+kq+1}^{a} \leqslant \sum_{n=H+(k-1)\,q+2}^{H+kq+1} \varepsilon_{n}^{a}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{H+kq+1}^{a} \leqslant q\, \varepsilon_{H+1}^{a} + \sum_{n=H+2}^{M-q+1} \varepsilon_{n}^{a}.$$

Démonstration de la proposition 1. — Soit K un entier tel que $M = m+(K+1)\,q$. On a

$$\sum_{n=m+1}^{m+(K+1)\,q} \mu_d (I_m \cap I_n) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{n=m+kq+1}^{m+(k+1)\,q} \mu_d (I_m \cap I_n).$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant K$, on a $m+kq+1 \leqslant M-q+1$, donc $\varepsilon_{M-q+1} \leqslant \varepsilon_{m+kq+1}$, par suite les hypothèses de la proposition 1 montrent que $\rho \leqslant \varepsilon_{m+kq+1}$. Le lemme 3 permet donc d'évaluer chaque somme $\sum_{n=m+kq+1}^{m+(k+1)\,q} \mu_d (I_m \cap I_n)$. Il vient

$$\sum_{n=m+1}^{m+(K+1)\,q} \mu_d (I_m \cap I_n) \leqslant \left\{ 1 + O(q^{-1}\, \rho^{-d} + \rho^{-1}\, q^{-(1/d)}) \right\} \varepsilon_m^d \sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{m+1+kq}^{d} + O(\rho \varepsilon_m^d \sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{m+1+kq}^{d-1}).$$

Avec le lemme 4, on majore les quantités

$$\sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{m+1+kq}^{d} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{m+1+kq}^{d-1},$$

et il en résulte l'évaluation cherchée.

4. Démonstration de la proposition 2

La proposition 2 découle du lemme suivant :

LEMME 5. — *Soient H et m des entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant H$, et t un nombre réel vérifiant $\varepsilon_m \geqslant t \geqslant \varepsilon_{H+1}$. Alors, si q désigne un élément de la suite $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$:*

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d (I_m \cap I_n) \leqslant q\, \varepsilon_m^d\, \varepsilon_{H+1}^d + O((q^{1-(1/d)} + qt)\, \varepsilon_m^{d-1}\, \varepsilon_{H+1}^d) + O(\varepsilon_{H+1}^d).$$

uniformément par rapport à m, H, q et t.

Preuve. — On a

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \sum_{n=H+1}^{H+q} \varepsilon_n^d \chi_{\varepsilon_m+t}(u_m, u_n). \tag{4.1}$$

D'après l'hypothèse (ii),

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_m+t}(u_m, u_n) = q(\varepsilon_m+t)^d + O(q^{1-(1/d)}(\varepsilon_m+t)^{d-1}) + O(1).$$

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, il vient avec (4.1) :

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \varepsilon_{H+1}^d \{q(\varepsilon_m+t)^d + O(q^{1-(1/d)}(\varepsilon_m+t)^{d-1}) + O(1)\},$$

d'où il résulte la formule cherchée.

Démonstration de la proposition 2. — Posons $N = M+(K+1)q$, où K désigne un entier. On a

$$\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_m \cap I_n) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{n=M+kq+1}^{M+(k+1)q} \mu_d(I_m \cap I_n).$$

Le lemme 5 permet de majorer les quantités $\sum_{n=M+kq+1}^{M+(k+1)q} \mu_d(I_m \cap I_n)$ (puisque $t \geqslant \varepsilon_{M+1} \geqslant \varepsilon_{M+kq+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant K$), il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \{\varepsilon_m^d + O((q^{-(1/d)}+t)\,\varepsilon_m^{d-1})\\ + O(q^{-1})\} \sum_{k=0}^{K} q\, \varepsilon_{M+1+kq}^d\end{aligned}$$

et le lemme 4 permet de conclure.

5. Démonstration de la proposition 3

Supposons d'abord

$$\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d \geqslant q_0^{(4d+2)/(4d+1)} \tag{5.1}$$

(où q_0 désigne le premier terme de la suite $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$).
Posons

$$\rho = \varepsilon_m \Big(\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d\Big)^{-3/2\,(2d+1)}, \quad t = \varepsilon_m \Big(\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d\Big)^{-1/2\,(2d+1)}.$$

Comme $t \leqslant \varepsilon_m$, il existe un entier $M_0 \geqslant m$ tel que $\varepsilon_{M_0+1} \leqslant t \leqslant \varepsilon_{M_0}$. Soit alors M l'entier défini par

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{si} \quad m \leqslant M_0 < N \\ N & \text{si} \quad M_0 \geqslant N. \end{cases}$$

Soit $q = q_{k_0}$ un élément de la suite $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que

$$q_{k_0} \leqslant \varepsilon_m^{-d} \Big(\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d\Big)^{1-(1/2\,(2d+1))} < q_{k_0+1}$$

(q_{k_0} existe, d'après l'hypothèse (5.1), car la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est supposée telle que $\varepsilon_0 < 1$, donc telle que $\varepsilon_n < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$). Comme la suite $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ satisfait $q_{k+1}/q_k = 0\,(1)$, on a

$$(5.2) \qquad q = O(\varepsilon_m^{-d}(\textstyle\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))}).$$

• Évaluons $\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d\,(I_m \cap I_n)$. Pour cela appelons M^* le plus petit entier tel que $M^* \geqslant M$ et que M^*-m soit divisible par q. On a

$$(5.3) \qquad \textstyle\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \sum_{n=m+1}^{M^*} \mu_d(I_n \cap I_m),$$

et comme $\varepsilon_{M^*-q+1} \geqslant \varepsilon_M \geqslant t$ (puisque $M \geqslant M^*-q+1$), on a $\varepsilon_{M^*-q+1} \geqslant \rho$. Donc, pour le choix précédent de ρ, la proposition 1 permet d'évaluer le deuxième membre de (5.3).

D'après l'expression (5.2) de q, on a

$$q+\rho^{-d}+\rho^{-1}q^{1-(1/d)} = O(\varepsilon_m^{-d}(\textstyle\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))})$$

$$\rho\textstyle\sum_{n=m+1}^{M^*-q+1} \varepsilon_n^{d-1} \leqslant \dfrac{\rho}{t}\sum_{n=m+1}^{M^*-q+1} \varepsilon_n^d (\text{puisque}\, \varepsilon_{M^*-q+1} \geqslant t)$$

$$\leqslant (\textstyle\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/(2d+1))}$$

$$(\rho^{-1}q^{-1/d}+\rho^{-d}q^{-1})\textstyle\sum_{n=m+1}^{M^*-q+1} \varepsilon_n^d = O((\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-((d+1)/2\,(2d+1))}).$$

Finalement la proposition 1 donne donc

$$\textstyle\sum_{n=m+1}^{M^*} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M^*-q+1} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d(\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))}).$$

Comme $\sum_{n=m+1}^{M^*-q+1} \varepsilon_n^d \leqslant \sum_{n=m+1}^{M} \varepsilon_n^d$ puisque $M^*-q+1 \leqslant M$, il vient avec (5.3) :

$$(5.4) \quad \textstyle\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d(\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))}).$$

• Évaluons $\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d\,(I_n \cap I_m)$, pour $N \geqslant M+1$ (car sinon cette somme est nulle) et toujours avec l'hypothèse (5.1). Désignons par N^* le plus petit entier tel que $N^* \geqslant N$ et que N^*-M soit divisible par q. On a

$$(5.5) \qquad \textstyle\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \sum_{n=M+1}^{N^*} \mu_d(I_n \cap I_m).$$

Évaluons le deuxième terme de (5.5) à l'aide de la proposition 2; pour les valeurs de q et t précédentes, on a

$$q\,\varepsilon_m^d+q^{1-(1/d)}\varepsilon_m^{d-1}+1 = O((\textstyle\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))})$$

$$(q^{-(1/d)}\varepsilon_m^{d-1}+t\,\varepsilon_m^{d-1}+q^{-1})\textstyle\sum_{n=M+1}^{N^*-q+1} \varepsilon_n^d = O((\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2\,(2d+1))}).$$

Par conséquent, la proposition 2 donne

$$\sum_{n=M+1}^{N^*} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=M+1}^{N^*-q+1} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))}).$$

Avec (5.5), il vient alors

$$\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=M+1}^{N} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))}).$$

Cette dernière formule, combinée avec (5.4) donne le résultat cherché (sous l'hypothèse (5.1)).

Supposons maintenant $\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d < q_0^{(4d+2)(4d+1)}$. Soit N' le plus petit entier tel que $N' \geqslant N$ et que $\sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d \geqslant q_0$. On a

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \sum_{n=m+1}^{N'} \mu_d(I_n \cap I_m),$$

et les calculs précédents permettent d'évaluer le deuxième membre de cette inégalité. Il vient donc

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d (\sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))})$$

qui, combinée avec $\sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d = \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d + O(1)$, donne la formule cherchée.

6. Applications

Le théorème permet de caractériser les éléments α de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ pour lesquels la suite $(n\,\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}}$ est fortement eutaxique : si α est un élément de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, posons

$$M_d(\alpha) = \lim\ \sup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^{1/d} \| n\,\alpha \|_d} \right).$$

COROLLAIRE 1. — *La suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ est fortement eutaxique si, et seulement si, $M_d(\alpha)$ est fini. Plus précisément, si $M_d(\alpha)$ est fini : pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décroissante de nombres réels positifs, pour tout nombre réel $\xi > 0$, le nombre $\nu(x, N)$ des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$, et que $\| x - n\,\alpha \| < (1/2)\,\varepsilon_n$, satisfait pour μ_d-presque tout élément x de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$:*

$$\nu(x, N) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d + ((\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/4(2d+1))} (\log \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1+\xi}) + O(1)$$

uniformément par rapport à l'entier N.

Démonstration. — Soit $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, supposons $M_d(\alpha)$ fini. Soit $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite croissante de tous les entiers positifs tels que $\| q_k\,\alpha \|_d < 1/q_k^{1/d}$.

La suite $(q_k)_{k \in \mathbf{N}}$ satisfait l'hypothèse (i) du théorème et un résultat de W. W. ADAMS ([1], prop. 3) montre qu'elle satisfait aussi l'hypothèse (ii) (en fait, W. W. ADAMS ne montre l'hypothèse (ii) que pour des hypercubes dont un sommet est l'origine, cependant la même démonstration est valable pour n'importe quel hypercube). On peut donc appliquer le théorème.

La réciproque résulte du fait que, pour que la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ soit eutaxique (et *a fortiori* fortement eutaxique), il est nécessaire que $M_d(\alpha)$ soit fini [13]. Donc la suite $(n\,\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ n'est fortement eutaxique que pour μ_d-presque aucun α, puisque les éléments α de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ tels que $M_d(\alpha)$ soit fini forment un ensemble négligeable. Cependant cet ensemble a la puissance du continu. Par exemple, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont des réels tels que $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ soit une base d'un corps de nombres, alors l'image canonique α de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ est telle que $M_d(\alpha)$ soit fini.

On peut en fait montrer un résultat plus général que le corollaire précédent : soit $L = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq s}$ une matrice d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ à d lignes et s colonnes. Si $n = (n_1, \ldots, n_s)$ est un s-uplet d'entiers, on écrit $|n| = \max_{j=1,\ldots,s} n_j$. Posons

$$M(L) = \lim\ \sup_{n \in \mathbf{N}^s,\, |n| > 0} \frac{1}{|n|^{s/d}\, \|L(n)\|_d}.$$

Ordonnons $\mathbf{N}^s$ par l'ordre lexicographique. Alors, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — *La suite $(L(n))_{n \in \mathbf{N}^s}$ d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ est fortement eutaxique si, et seulement si, le nombre $M(L)$ est fini.*

On a ici aussi pour μ_d-presque tout x l'estimation (2.1) du théorème.

La démonstration est la même que pour le corollaire 1. Elle utilise une généralisation du résultat de W. ADAMS donnée par M. SWEET ([17], § 2).

7. Problèmes non résolus

Étant donnés un élément α de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, tel que $M_d(\alpha)$ soit fini, et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n^d$ diverge, on peut chercher l'ensemble des x pour lesquels on n'a pas la relation

$$\nu(x, N) \sim \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \qquad (N \to +\infty).$$

Par exemple dans [5], [6] et [1] (et [17] pour les appliquations linéaires), il est montré que cet ensemble est vide si $(n^{1/d}\,\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante non bornée de nombres réels.

On peut chercher aussi d'autres suites fortement eutaxiques, par exemple caractériser les éléments α de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ pour lesquels $(p(n)\,\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ est fortement eutaxique (où p désigne un polynôme à coefficients entiers). On peut d'ailleurs chercher s'il existe « beaucoup » de suites fortement-eutaxiques : mesurer l'ensemble des suites de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ fortement eutaxique (pour la mesure de Haar du groupe compact $((\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d)^{\mathbf{N}}$). Le fait que les suites $(n\,\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ ne sont *fortement-eutaxiques* que pour μ_d-presque aucun α ne donne pas de renseignements sur ce problème. En effet, les suites $(n\,\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ ne sont *eutaxiques* que pour μ_d-presque aucun $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, mais presque toute suite d'éléments de $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$ est eutaxique (relativement à la mesure de Haar de $((\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d)^{\mathbf{N}}$) [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (W. W.). — Simultaneous asymptotic diophantine approximation, *Mathematika*, London, t. 14, 1967, p. 173-180.

[2] CASSELS (J. W. S.). — *An introduction to diophantine approximation.* — Cambridge, Cambridge University Press, 1965 (*Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*, 45).

[3] ERDÖS (P.). — Some results on diophantine approximation, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 5, 1959, p. 359-369.

[4] KESTEN (H.). — On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 12, 1966, p. 193-212.

[5] LANG (S.). — Asymptotic diophantine approximations, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 55, 1966, p. 31-33.

[6] LANG (S.). — *Introduction to diophantine approximations.* — Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).

[7] LESCA (J.). — *Sur les approximations diophantines à une dimension*, Thèse Sc. math., Grenoble, 1968.

[8] LESCA (J.). — Sur la répartition mod 1 des suites $(n\,\alpha)$, *Acta Arithm.*, Warzsawa, t. 20, 1972, p. 345-352.

[9] LEVEQUE (W. J.). — On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, III, *J. für reine und angew. Math.*, t. 102, 1959, p. 215-220.

[10] DE MATHAN (B.). — Approximations diophantiennes dans un corps local, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 21, 1970, 93 p.

[11] DE MATHAN (B.). — Un problème métrique d'approximation diophantienne, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 369-385.

[12] PHILIPP (W.). — Some metrical theorems in number theory, *Pacific J. Math.*, t. 20, 1967, p. 109-127.

[13] REVERSAT (M.). — *Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites*, Thèse spécialité, Bordeaux, 1973 et *Approximations diophantiennes et eutaxie* (à paraître).

[14] REVERSAT (M.). — Les suites eutaxiques, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 15e année, 1973/74, n° 13, 10 p.

[15] SCHMIDT (W. M.). — A metrical theorem in diophantine approximation, *Canad. J. Math.*, t. 12, 1960, p. 619-631.

[16] SCHMIDT (W. M.). — Metrical theorems on fractional parts of sequences, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 110, 1964, p. 493-518.

[17] SWEET (M. M.). — A theorem in diophantine approximations, *J. of Number Theory*, t. 5, 1975, p. 245-251.

(Texte reçu le 9 juin 1975.)

Marc REVERSAT,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau,
91120 Palaiseau.