BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD LAUMON

Degré de la variété duale d'une hypersurface à singularités isolées

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 51-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__51_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 51-63.

DEGRÉ DE LA VARIÉTÉ DUALE D'UNE HYPERSURFACE À SINGULARITÉS ISOLÉES

PAR

GÉRARD LAUMON

[E.N.S., Paris]

RÉSUMÉ. — Après avoir défini la notion de pinceaux de Lefschetz pour une hypersurface à singularités isolées sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et après avoir esquissé une démonstration de leur existence, on utilise la fibration donnée par un de ceux-ci pour calculer le degré de la variété duale d'une telle hypersurface. La formule obtenue fait intervenir les invariants locaux de Tessier attachés à une singularité isolée d'hypersurface. On donne une autre démonstration dans le cas des courbes planes.

0. Introduction

Soit P un espace projectif de dimension $\geqslant 1$ sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, et soit X une hypersurface projective de P, de dimension n et de degré d, lisse en dehors d'un ensemble fini F de points fermés. Notons $\check{P}$ l'espace projectif dual, paramétrant les hyperplans de P, et $X^{\perp}$ l'adhérence dans $\check{P}$ de la variété des hyperplans tangents à $X-F$. Nous supposerons que $X^{\perp}$ est une hypersurface de P. Le degré $d^{\perp}$ de $X^{\perp}$ est le nombre d'hyperplans tangents à $X-F$ passant par une sous-variété linéaire assez générale de co-dimension 2 de P. L'objet de cet article est d'établir (moyennant certaines hypothèses sur le plongement $X \subsetneq P$, vérifiées en tout cas si $p=0$) une formule (4.2.1) exprimant $d^{\perp}$ à l'aide de n, d, et d'invariants locaux attachés aux points singuliers de X.

Lorsque $p=0$ et que X est une courbe telle que F se compose de ν points nodaux ordinaires et γ points cuspidaux ordinaires, $d^{\perp}$ est donné par la classique formule de Plücker :

$$d^{\perp}=d(d-1)-2\nu-3\gamma. \tag{0.1}$$

La caractéristique et la dimension étant à nouveau quelconques, mais X étant supposée lisse et telle que le « morphisme de Gauss » $X \rightarrow \check{P}$,

$x \mapsto$ (hyperplan tangent à X en x) soit génériquement net, $d^\perp$ est donné par la formule

$$d^\perp = d(d-1)^n, \tag{0.2}$$

qui découle aisément de la formule de Katz [SGA 7] (XVII, 5.7.3; *voir* (4.2)).

La formule que nous démontrons ici généralise (0.1) et (0.2). L'idée du calcul est, comme dans [SGA 7] (XVIII, 3.2), de choisir un « pinceau de Lefschetz » pour X (ce qui nécessite une hypothèse sur le plongement $X \subsetneq P$), et d'évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré de X à l'aide de la fibration définie par le pinceau : les termes locaux figurant dans $d^\perp$ apparaissent comme certains « nombres de cycles évanescents » aux points de F. Lorsque $p = 0$, le calcul se simplifie, les termes locaux s'exprimant alors à l'aide de nombres de Milnor intermédiaires, définis par TEISSIER dans [10].

1. Variété duale et pinceaux de Lefschetz

1.1. Soit k un corps algébriquement clos. Soit n un entier > 0, on notera $\mathbf{P}_k^{n+1}$ (ou P si aucune confusion n'est à craindre) l'espace projectif de dimension $n+1$ sur le corps k. On notera $\check{\mathbf{P}}_k^{n+1}$ (ou $\check{P}$) l'espace projectif dual de P, paramétrant les hyperplans de P.

Soit X une hypersurface de P, i. e. pour nous un sous-k-schéma fermé, réduit de P, purement de codimension 1. Soit X_{sg} le lieu singulier de X.

Nous appellerons *variété duale* (stricte) de X, muni de son plongement projectif $X \subsetneq P$, et nous noterons $X^\perp$, l'adhérence dans $\check{P}$ de la variété des hyperplans tangents à $X - X_{sg}$.

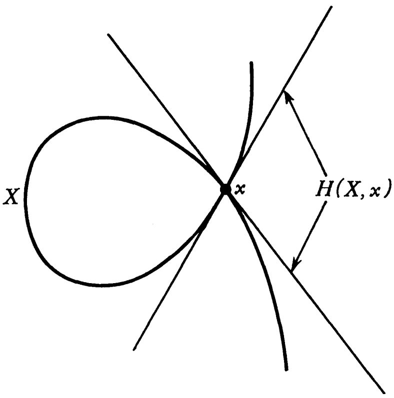
Nous appellerons *variété duale totale* de X, muni de son plongement projectif $X \subsetneq P$, et nous noterons $X^{\hat{\perp}}$, la variété des hyperplans tangents à X, i. e. contenus dans l'espace tangent de Zariski de X en un de leurs points d'intersection avec X. Pour $t \in \check{P}$, nous noterons H_t l'hyperplan de P correspondant. Pour $x \in P$, nous noterons $x^\perp$ l'hyperplan de $\check{P}$ égal à $\{ t \in \check{P} ; x \in H_t \}$. On a alors

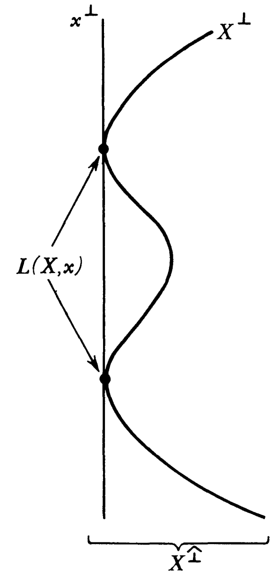
$$X^{\hat{\perp}} = X^\perp \cup (\textstyle\bigcup_{x \in X_{sg}} x^\perp).$$

Pour tout $x \in X$, on pose

$$L(X, x) = X^\perp \cap x^\perp, \tag{1.1.1}$$

$$H(X, x) = \textstyle\bigcup_{t \in L(X, x)} H_t, \tag{1.1.2}$$





1.2. On rappelle qu'un *pinceau d'hyperplans* de P est une famille $(H_t)_{t\in D}$ d'hyperplans de P paramétrée par une droite D de $\check{P}$. *L'axe* Δ du pinceau est l'intersection de hyperplans du pinceau; c'est une variété linéaire de codimension 2 de P, et on a $D = \Delta^{\perp}$.

DÉFINITION 1.2.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit X une hypersurface 1.1 de P à singularités isolées. Un pinceau d'hyperplans $(H_t)_{t\in D}$ de P sera dit de Lefschetz pour le plongement $X \subsetneq$ P s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1.2.1.1. L'axe Δ du pinceau ne rencontre pas X_{sg} et est transverse au lieu lisse de X.

1.2.1.2. Il existe un ensemble fini S de points fermés de D et une partition $S_1 \cup S_2$ de S tels que :

(i) si $t \in D-S$, H_t ne rencontre pas X_{sg} et est transverse à $X-X_{sg}$;

(ii) si $s \in S_1$, H_s ne rencontre pas X_{sg}, et $X \cap H_s$ a un point singulier x_s, et un seul, et ce point est une singularité quadratique non dégénérée ([SGA 7], XVII, 1.2);

(iii) si $s \in S_2$, H_s rencontre X_{sg} en un point x, et un seul, ce point est la seule singularité de $X \cap H_s$, et $s \notin L(X\ \ x_s)$.

On appellera S (resp. S_1, S_2) *l'ensemble exceptionnel* (resp. *exceptionnel quadratique*, *exceptionnel singulier*) du pinceau.

1.2.2. Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons que k est algébriquement clos de caractéristique 0, et que $X^{\perp}$ est une hypersurface de P.

THÉORÈME 1.2.3. — *Avec les notations et hypothèses de* 1.2.1, *il existe un ouvert dense V de Grass* $(1, \check{P})$ (*grassmanienne des droites de* $\check{P}$) *tel que si $D \in V$, $(H_t)_{t \in D}$ soit un pinceau de Lefschetz pour X.*

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1.2.4 (EULER). — *Soit Z une sous-variété de « l'hyperplan universel »* $\{(x, t) \in P \times \check{P};\ x \in H_t\}$ de $P \times \check{P}$. *Soit $z = (x, t)$ un point du lieu lisse de Z, alors si $T_{Z,z}$ désigne l'espace tangent à Z en z et si $p : P \times \check{P} \to P$ et $q : P \times \check{P} \to \check{P}$ sont les projections canoniques, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p_* T_{Z,z} \subset H_t$;

(ii) $q_* T_{Z,z} \subset x^{\perp}$.

LEMME 1.2.5. — *Pour que Δ ne rencontre pas X_{sg} et soit transverse à la partie lisse de X, il faut et il suffit que, pour tout point $t \in D \cap X^{\hat{\perp}}$. D ne soit pas contenu dans $H(X^{\hat{\perp}}, t)$* (1.1.2).

Cela résulte du lemme 1.2.4.

LEMME 1.2.6. — *Pour que H_t ne rencontre pas X_{sg} et soit transverse à la partie lisse de X, il faut et il suffit que $t \notin X^{\hat{\perp}}$.*

LEMME 1.2.7. — *Pour que H_s ne rencontre pas X_{sg} et que $X \cap H_s$ présente une singularité, et une seule, singularité qui soit quadratique non dégénérée, il faut et il suffit que $s \in X^{\perp} \cap$ (lieu lisse de $X^{\hat{\perp}}$).*

La démonstration est analogue à celle de [SGA 7] (XVII, 3.5).

LEMME 1.2.8. — *Pour que H_s rencontre X_{sg} en un point x_s, et un seul, que ce point soit la seule singularité de $X \cap H_s$ et que $s \notin L(X, x_s)$* (1.1.1), *il faut et il suffit que $s \in (X^{\hat{\perp}} - X^{\perp}) \cap$ (lieu lisse de $X^{\hat{\perp}}$).*

Cela résulte des définitions.

PROPOSITION 1.2.9. — *Pour que $(H_t)_{t \in D}$ soit un pinceau de Lefschetz pour X, il faut et il suffit que la droite D ne rencontre pas la partie singulière de $X^{\hat{\perp}}$ et soit transverse à la partie lisse de $X^{\hat{\perp}}$.*

Cela résulte aussitôt de la définition 1.2.1, et des lemmes 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7 et 1.2.8.

COROLLAIRE 1.2.10. — *Si* $(H_t)_{t\in D}$ *est un pinceau de Lefschetz pour* X, *le degré de la variété duale* $X^{\perp}$ *de* X *est égal au cardinal de l'ensemble exceptionnel quadratique du pinceau.*

1.2.11. — Le théorème 1.2.3 résulte de la proposition 1.2.9 et du fait que la condition « D ne rencontre pas la partie singulière de $X^{\hat{\perp}}$ et est à la partie lisse de $X^{\hat{\perp}}$ » est ouverte et non vide.

2. Une formule de Hurwitz

2.1. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et soit C une courbe projective, lisse et connexe sur k. Soit s un point fermé de C, et soit $C_{(s)}$ le spectre de l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_{c,s}$. Notons η_s le point générique de $C_{(s)}$, et $\bar{\eta}_s$ un point géométrique au-dessus de η_s. Le groupe d'inertie I_s de C en s est alors $I_s = \mathrm{gal}(k(\bar{\eta}_s)/k(\eta_s))$. Soit l un nombre premier.

2.2. Soit maintenant M un $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible sur C ([SGA 4] et [SGA 5]), notons M_s (resp. $M_{\bar{\eta}_s}$) sa fibre au point géométrique s (resp. $\bar{\eta}_s$) de C. M_s est munie de l'action triviale de I_s, et $M_{\bar{\eta}_s}$ est munie d'une action continue de I_s. Posons $\beta_s(M) = \dim_{\mathbf{Q}_l}(M_{\bar{\eta}_s}) - \dim_{\mathbf{Q}_l}(M_s)$, on a $\beta_s(M) = 0$ sauf pour un nombre fini de points fermés de C.

Notons χ les caractéristiques d'Euler-Poincaré pour la topologie étale, on a alors la formule ([5] ou [SGA 5]) :

$$\chi(C, M) = \chi(C)\dim_{\mathbf{Q}_l}(M_{\bar{\eta}}) - \textstyle\sum_{s\in C(k)} \beta_s(M), \tag{2.2.1}$$

où $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de C.

2.3. Soit X un schéma réduit et propre sur k. Soit $f : X \to C$ un morphisme propre et lisse en dehors d'un ensemble fini F de points fermés de X.

De la suite spectrale de Leray pour f on déduit la formule

$$\chi(X) = \textstyle\sum_i (-1)^i \chi(C, \mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_l). \tag{2.3.1}$$

Soient X_s la fibre de f en s, et $F_s = F \cap X_s$. On sait ([SGA 7] XIII) qu'il existe sur X_s des faisceaux de $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels constructibles Φ_s^i ($i \geqq 0$) concentrés sur F_s tels que l'on ait la suite exacte longue

$$\ldots \to (\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_l)_s \to (\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}_s} \to \textstyle\bigoplus_{x\in F_s} \Phi_{s,x}^i \to \ldots, \tag{$\star$}$$

où $\Phi_{s,x}^i$ est la fibre de Φ_s^i en $x \in X_s$.

On appelle ces faisceaux, les faisceaux *des cycles évanescents* de f. De plus, chaque $\mathbf{Q}_l$-vectoriel $\Phi^i_{s,x}$ ($s \in C$, $x \in X_s$) est de dimension finie ([SGA 7] XIII, 2.4.2) et muni d'une action continue de I_s. Si $H^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^i$ est une somme directe de $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels de dimension finie, on pose

$$\dim_{\mathbf{Q}_l}(H^\bullet) = \textstyle\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_l}(H^i).$$

Avec ces notations, on déduit de la suite exacte longue ($\star$) la relation

$$(2.3.2)\quad \dim_{\mathbf{Q}_l}((\mathrm{R}^\bullet f_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}_s}) - \dim_{\mathbf{Q}_l}((\mathrm{R}^\bullet f_* \mathbf{Q}_l)_s) = \textstyle\sum_{x \in F_s} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^\bullet_{s,x}).$$

On déduit de (2.2.1), (2.3.1) et (2.3.2) le résultat suivant (*cf.* [SGA 7] XVI) :

$$(2.3.3)\qquad \chi(X) = \chi(C)\chi(X_{\bar{\eta}}) - \textstyle\sum_{x \in F} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^\bullet_{f(x)\ x}).$$

3. Les termes locaux

3.1. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soient $\mathbf{A}_k^{n+1}$ l'espace affine de dimension $n+1$ sur k, et $X \subset \mathbf{A}_k^{n+1}$ une hypersurface affine réduite, d'équation $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ (où $(x_0, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées sur $\mathbf{A}_k^{n+1}$,) et présentant en $x = (0, \ldots, 0)$ une singularité isolée; ceci signifie que l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x}$, engendré par les dérivées partielles $\partial f / \partial x_i$ ($i = 0, \ldots, n$) est primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x}$, et donc que la dimension

$$\mu_x(f) = \dim_k\left(\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x} \middle/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right)$$

est finie. On peut voir que $\mu_x(f)$ ne dépend pas de l'équation locale de X en x choisie; on posera

$$(3.1.1)\qquad \mu_x^{(n+1)}(X) = \mu_x(f)$$

(l'exposant $n+1$ rappelant la dimension de l'espace ambiant). L'entier $\mu_x^{(n+1)}(X)$ est appelé le *nombre de Milnor* de X en x (*cf.* [4]).

Considérons alors le morphisme $f : \mathbf{A}_k^{n+1} \to \mathbf{A}_k^1$ donné par une équation de X. On peut supposer que f est lisse en dehors de x. On dispose alors sur $X = f^{-1}(0)$ des « faisceaux de cycles évanescents » Φ^i ($i \geqslant 0$). Ceux-ci sont concentrés en x, leurs fibres Φ^i_x sont des $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels de dimension finie, et l'on a une suite exacte longue

$$\ldots \to (\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_l)_0 \to (\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}} \to \Phi^i_x \to \ldots,$$

où $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbf{A}_k^1$. On a de plus le résultat suivant ([SGA 7] XVI, 2.4) :

$$\mu_x^{(n+1)}(X) = (-1)^n \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi_x^{\bullet}). \tag{3.1.2}$$

3.2. Soit encore $X \subset \mathbf{A}_k^{n+1}$ une hypersurface réduite d'équation $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ présentant en x une singularité isolée. En complétant X projectivement, on peut définir $L(X, x) = X^\perp \cap x^\perp \subset x^\perp \simeq \mathbf{P}_k^n$; il est clair que $L(X, x) \subset \mathbf{P}_k^n$ ne dépend pas de la complétion projective choisie. Pour $t \in x^\perp \cong \mathbf{P}_k^n$, H_t est un hyperplan projectif passant par x, on note encore H_t sa trace dans $\mathbf{A}_k^{n+1}$. TEISSIER a montré ([10], II.1.6) (sur $\mathbf{C}$ seulement, mais on passe facilement de là au cas où la caractéristique de k est nulle) que le nombre de Milnor en x de $X \cap H_t \subset \mathrm{H}_t \cong \mathbf{A}_k^n$ ne dépend pas de t lorsque t parcourt $\mathbf{P}_k^n - \mathrm{L}(X, x)$, aussi on peut poser

$$\mu_x^{(n)}(X) = \mu_x^{(n)}(X \cap H_t) \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{P}_k^n - L(X, x).$$

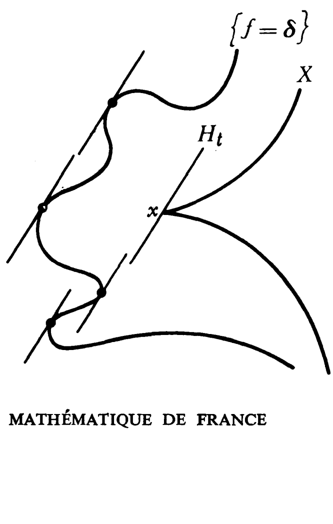
3.3. Le terme local que nous avons en vue est le suivant

$$\varepsilon_x(X) = \mu_x^{(n+1)}(X) + \mu_x^{(n)}(X). \tag{3.3.1}$$

TEISSIER a montré dans [10] que si $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ est une équation locale de X ou x, on a

$$\varepsilon_x(X) = e_{\mathcal{O}_{X,x}}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\mathcal{O}_{X,x}\right), \tag{3.3.2}$$

où $e_{\mathcal{O}_{X,x}}$ est la multiplicité dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Géométriquement, si $k = \mathbf{C}$, on peut montrer que $\varepsilon_x(X)$ est le nombre d'hyperplans tangents à l'hypersurface $\{f(x_0, \ldots, x_n) = \delta\}$, en des points voisins de x, et parallèles à un hyperplan H_t, où $\delta \in \mathbf{C}$ est de module suffisamment petit, et où $t \in \mathbf{P}_k^n - L(X, x)$.



4. Le calcul du degré

4.1. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et $X \subset P$ une hypersurface réduite à singularités isolées. Soit $X^{\perp} \subset \check{P}$ sa variété duale que l'on suppose être une hypersurface. Choisissons un pinceau $(\mathrm{H}_t)_{t \in D}$ de Lefschetz pour X (l'existence d'un tel pinceau résulte du théorème 1.2.3). Soit

$$\tilde{X} = \{(x, t) \in X \times D;\ x \in H_t\}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

les projections canoniques. Le morphisme π est propre et plat, et sa fibre en $t \in D$ n'est autre que $H_t \cap X$, donc elle est lisse pour $t \notin S$, où S est l'ensemble exceptionnel du pinceau. On peut donc appliquer à $\pi : X \rightarrow D$ la formule (2.3.3). Elle s'écrit

$$(4.1.1) \qquad \chi(\tilde{X}) = \chi(D)\chi(X \cap H_{\bar{\eta}}) - \textstyle\sum_{s \in S} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\cdot}_{s,\, x_s})$$

(où $\bar{\eta}$ est un point générique géométrique de D, $X \cap H_{\bar{\eta}}$ désignant en fait le produit fibré $X \times_{k(\bar{\eta})} H_{\bar{\eta}}$, et où les Φ^i sont les faisceaux des cycles évanescents de π sur X_s, ceux-ci étant concentrés en x_s).

D'autre part, on a $\chi(D) = \chi(\mathbf{P}^1_k) = 2$, et on a ([SGA 7] XVIII, 2.3) :

$$(4.1.2) \qquad \chi(\tilde{X}) = \chi(X) + \chi(\Delta \cap X).$$

Calculons les termes locaux. Soient S_1 (resp. S_2) l'ensemble exceptionnel quadratique (resp. singulier) du pinceau. Nous distinguerons deux cas :

(*a*) $s \in S_1$: alors X est lisse en x_s donc localement isomorphe à $\mathbf{A}^n_k$, par suite, on a (3.1.2) :

$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\cdot}_{s,\, x_s}) = \mu^{(n)}_{x_s}(\pi^{-1}(s)).$$

Or $\pi^{-1}(s) = X \cap H_s$ présente en x_s une singularité quadratique non dégénérée, donc $\mu^{(n)}_{x_s}(\pi^{-1}(s)) = 1$. Par suite, tenant compte du corollaire 1.2.10, on a

$$(4.1.3) \qquad \textstyle\sum_{s \in S_1} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\cdot}_{s,\, x_s}) = (-1)^{n-1} d(X^{\perp}),$$

où $d(X^{\perp})$ est le degré de la variété duale $X^{\perp}$ de X.

(*b*) $s \in S_2$: choisissons des coordonnées homogènes $(\bar{x}_0 : \ldots : x_{n+1})$ sur P telle que $x_{n+1}(x_s) \neq 0$ et $x_i(x_s) = 0$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Soit $f(x_0, \ldots, x_{n+1}) = 0$ une équation homogène de X, elle est de degré d égal au degré de X. Soit, pour $u \in \mathbf{A}_k^1$, X_u l'hypersurface d'équation $f(x_0, \ldots, x_{n+1}) - ux_{n+1}^d = 0$. On a donc $X_0 = X$.

Posons $(\mathscr{B}, b_0) = (D \times_k \mathbf{A}_k^1, (s, 0))$, et soit

$$\mathscr{Z} = \{(u, t, x) \in \mathscr{B} \times P;\ x \in X_u \cap H_t).$$

Notons G : $\mathscr{Z} \to \mathscr{B}$ le morphisme restriction de la projection canonique $\mathscr{B} \times P \to \mathscr{B}$.

Soit B l'hensélisé, strict de $\mathscr{B}$ en b_0, on note encore b_0 le point fermé de B. Soient $B_1 = B \times_{\mathscr{B}} \mathbf{A}_k^1$ et $B_2 = B \times_{\mathscr{B}} D$, où les flèches $\mathbf{A}_k^1 \to \mathscr{B}$, $D \to \mathscr{B}$ sont respectivement $u \mapsto (s, u)$, $t \mapsto (t, 0)$. Soient η_j le point générique de B_j, et $\bar{\eta}_j$ un point géométrique au-dessus de η_j (pour $j \neq 1, 2$).

Nous noterons $g : Z \to B$ le morphisme déduit de $G : \mathscr{Z} \to \mathscr{B}$ par le changement de base $B \to \mathscr{B}$, et $g_j : Z_j \to B_j$ le morphisme déduit de $g : Z \to B$ par le changement de base $B_j \to B$ $(j = 1, 2)$. Le morphisme $g_1 : Z_1 \to B_1$ est localement isomorphe sur B_1 pour la topologie étale au morphisme $\{(u, x) \in \mathbf{A}_k^1 \times H_s;\ x \in X_u\} \to \mathbf{A}_k^1$, restriction de la projection canonique. En particulier, soient $\Phi^i(g_1)$ ses faisceaux de cycles évanescents sur $X \cap H_s$, ils sont concentrés en x_s et on a, d'après (3.1.2),

$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}(g_1)_{x_s}) = \mu_{x_s}^{(n)}(X \cap H_s),$$

et comme $s \notin L(X, x_s)$, on a, par 3.2,

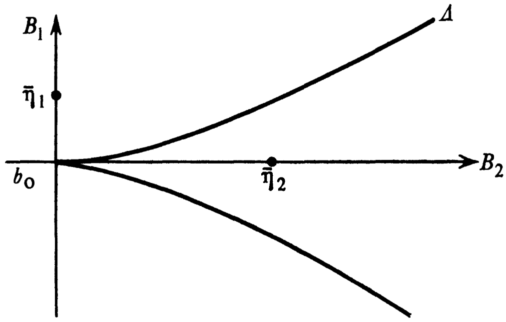
$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}(g_1)_{x_s}) = \mu_{x_s}^{(n)}(X).$$

Le morphisme $g_2 : Z_2 \to B_2$ est localement isomorphe sur B_2 pour la topologie étale à $\pi : \tilde{X} \to D$ et donc, si $\Phi^i(g_2)$ sont ses faisceaux de cycles évarrescents sur $X \cap H_s$, ils sont concentrés en x_s, et on a

$$\dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}(g_2)_{x_s}) = \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}_{s, x_s}),$$

où les Φ_{s,x_s}^i sont ceux définis en 4.1.

Soit Γ le lieu de non lissité dans Z du morphisme g; par hypothèse, $\Gamma \cap g^{-1}(b_0) = \{x_s\}$. D'après [1], $\dim_{x_s}(\Gamma) = 1$ et $g_{|\Gamma} : \Gamma \to B$ est un morphisme fini, donc si on note Δ l'image de $g_{|\Gamma}$, Δ est une courbe algébrique dans B (appelée *diagramme de Cerf de G*). De plus, le cône tangent à Δ en b_0 est B_2 [3] :



En particulier $\bar{\eta}_1 \notin \Delta$. D'autre part, on sait que $\bar{\eta}_2 \notin \Delta$ puisque $X \cap H_{\bar{\eta}_2}$ est lisse par hypothèse sur le pinceau. On déduit alors du théorème d'acyclicité locale des morphismes propres et lisses ([SGA 4] XVI, 2.5) que, pour tout $i \geqslant 0$, les $\mathbf{Q}_l$-vectoriels $(R^i g_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}_j}$ ($j = 1, 2$) sont isomorphes. On en déduit aussitôt

$$\dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}(g_1)_{x_s}) = \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}(g_2)_{x_s})$$

et donc, d'après ce qui précède, on a, pour tout $s \in S_2$,

(4.1.4) $$\dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^{\bullet}_{s,\, x_s}) = (-1)^{n-1}\, \mu^n_{x_s}(X).$$

On peut alors énoncer le résultat principal de cet article :

THÉORÈME 4.1.5. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, n un entier positif, $P = \mathbf{P}_k^{n+1}$, $X \subset P$ une hypersurface réduite à singularités isolées, et $X^{\perp} \subset \check{P}$ sa variété duale, supposée être une hypersurface. Soient H un hyperplan de P, et Δ une sous-variété linéaire de codimension 2 de P, tous deux ne rencontrant pas X_{sg}, et transverses à la partie lisses de X. Alors si $d(X^{\perp})$ est le degré de $X^{\perp}$, on a*

$$d(X^{\perp}) = (-1)^n\left[\chi(X)+\chi(X\cap\Delta)-2\chi(X\cap H)\right]-\textstyle\sum_{x\in X_{sg}}\mu_x^{(n)}(X).$$

En effet, $\chi(X \cap \Delta)$ et $\chi(X \cap H)$ ne dépendent pas de Δ et H s'ils sont assez généraux, donc le théorème 4.1.5 résulte de (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) et (4.1.4).

COROLLAIRE 4.2.1. — *Si k, n, X sont comme dans le théorème 4.1.5, et si d est le degré de X, alors le degré $d(X^{\perp})$ de $X^{\perp}$ est donné par la formule*

(4.2.1) $$d(X^{\perp}) = d(d-1)^n - \textstyle\sum_{x\in X_{sg}}\varepsilon_x(X),$$

où les $\varepsilon_x(X)$ sont ceux de 3.3.

En effet, avec les notations de 4.1, soit $f : \{(u, x) \in B_1 \times P ; x \in X_u\} \rightarrow B_1$ la restriction de la projection canonique $B_1 \times P \rightarrow B_1$. On déduit alors de la suite exacte longue de 3.1 et de (3.1.2) la formule

$$\chi(X) = \chi(X_{\bar{\eta}_1}) + (-1)^n \sum_{x \in X_{sg}} \mu_x^{(n+1)}(X).$$

Or si V_n est une hypersurface projective lisse de degré d et de dimension n, on a la formule de Hirzebruch [2] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_p \chi(V_n, \Omega^p) y^p z^{n+1} = \frac{1}{(1+yz)(1-z)} \frac{(1+yz)^d - (1-z)^d}{(1+yz)^d + y(1-z)^d}.$$

Or $\sum (-1)^p \chi(V_n, \Omega^p) = \chi(V_n)$ car k est de caractéristique nulle. Après un développement limité en $y = -1$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(V_n) z^{n+1} = \frac{d.z}{(1-z)^2(1+(d-1)z)}.$$

On en déduit $\chi(V_n)$ en fonction de n et d, et en appliquant ceci à $X_{\bar{\eta}_1}$, $X \cap H$ et $X \cap \Delta$, on en déduit (4.2.1).

5. Autre démonstration pour une courbe plane

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit X une courbe plane réduite de degré d (i. e. une hypersurface réduite $X \subsetneq \mathbf{P}_k^2$ de degré d). Soit $(H_t)_{t \in D}$ un pinceau de Lefschetz pour X, son axe Δ est réduit à un point encore notée Δ, n'appartenant pas à X, et les hyperplans du pinceau sont juste les droites de $\mathbf{P}_k^2$ passant par ce point. La projection donnée par le pinceau fournit donc un revêtement de degré d, $\pi : X \rightarrow D$. Soit $q : \tilde{X} \rightarrow X$ la normalisation de X, et $\tilde{\pi} = \pi \circ q : \tilde{X} \rightarrow D$ le revêtement composé; il est de degré d, et son ensemble de points de ramification dans D est contenu dans l'ensemble exceptionnel S du pinceau. Pour tout $s \in S$, soit v_s la valuation en s du discriminant de l'extension $k(\tilde{X})/k(D)$. D'après [7], si pour $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $e_{\tilde{x}}$ est l'indice de ramification du revêtement $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow D$ en $\tilde{x}$, on a, pour $s \in S$,

$$v_s = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\pi}^{-1}(s)} (e_{\tilde{x}} - 1);$$

or dans $\pi^{-1}(s) \subset X$, seul x_s est un point de ramification de $\pi : X \rightarrow D$, par suite,

$$v_s = \sum_{\tilde{x} \in q^{-1}(x_s)} (e_{\tilde{x}} - 1).$$

Il est clair alors que

$$\textstyle\sum_{\tilde{x} \in q^{-1}(x_s)} e_{\tilde{x}} = (X \,.\, H_s)_{x_s},$$

où $(X.H_s)_{x_s}$ est la multiplicité d'intersection de X et H_s en x_s. Par suite, vue les hypothèses faites sur le pinceau, on a, avec les notations de la définition 1.2.1,

$$\begin{cases} v_s = 1 & \text{si} \quad s \in S_1, \\ v_s = m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X) & \text{si} \quad s \in S_2, \end{cases}$$

où $m_{x_s}(X)$ est la multiplicité de X en x_s et où $r_{x_s}(X)$ est le cardinal de $q^{-1}(x_s)$.

Appliquons alors la formule d'Hurwitz pour les revêtements à $\tilde{\pi}$, on obtient

$$\chi(\tilde{X}) = \deg(\tilde{\pi}) \,.\, \chi(D) - \textstyle\sum_{s \in S} v_s.$$

Or $\deg(\tilde{\pi}) = d, \chi(D) = 2$ et, si g est le genre de X, on a

$$\chi(\tilde{X}) = 2 - 2g \qquad \text{et} \qquad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \textstyle\sum_{x \in X} \delta_x(X),$$

où $\delta_x(X) = \dim_k((q_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}/\mathcal{O}_X)_x)$ (*cf.* [8]). Comme $\delta_x(X) = 0$, sauf si x est une singularité de X, la formule d'Hurwitz se récrit

$$\operatorname{card}(S_1) = d(d-1) - \textstyle\sum_{s \in S_2} (2\,\delta_{x_s}(X) + m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X)).$$

Or on sait [6] que, pour tout $s \in S_2$, $2\,\delta_{x_s}(X) = \mu_{x_s}^{(2)}(X) + r_{x_s}(X) - 1$, donc comme $\mu_{x_s}^{(1)}(X) = m_{x_s}(X) - 1$, on en déduit

$$2\,\delta_{x_s}(X) + m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X) = \varepsilon_x(X)$$

et donc, tenant compte du corollaire 1.2.10, on en déduit

$$d(X^{\perp}) = d(d-1) - \textstyle\sum_{x \in X} \varepsilon_x(X),$$

ce qui n'est autre que (4.2.1) dans le cas particulier envisagé.

Si x est un point nodal ordinaire (resp. un point cuspidal ordinaire), alors $\varepsilon_x(X) = 2$ (resp. $\varepsilon_x(X) = 3$), et l'on retrouve la classique formule de Plücker citée dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAMM (H. A.) et LÊ DŨNG TRÁNG. — Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 6, 1973, p. 317-355.

[2] HIRZEBRUCH (F.). — *Topological methods in algebraic geometry*. 3rd ed. — Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 131).

[3] Lê Dũng Tráng. — *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe.* — Paris, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973.

[4] Milnor (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces.* — Princeton, Princeton University Press, 1968 (*Annals of Mathematics Studies*, 61).

[5] Raynaud (M.). — Caractéristiques d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, *Séminaire Bourbaki*, 17e année, 1964/1965, n° 286, 19 p.

[6] Risler (J.-J.). — Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 305-311.

[7] Serre (J.-P.). — *Corps locaux.* — Paris, Hermann, 1962 (*Act. scient. et ind.*,, 1296; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 8).

[8] Serre (J.-P.). — *Groupes algébriques et corps de classes.* — Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 1264; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 7).

[9] Serre (J.-P.). — *Représentations linéqires des groupes finis.* — Paris, Hermann 1967 (*Collection Méthodes*).

[10] Teissier (B.). — Cycles évanescents, sections planes,... « *Singularités à Cargèse* », Astérisque, 7-8, 1973, p. 285 à 362.

[SGA 4] Séminaire de géométrie algébrique, 1963/1964 : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, tome 3. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 305).

[SGA 5] Séminaire de géométrie algébrique (à paraître).

[SGA 7] Séminaire de géométrie algébrique, 1967-1969 : *Groupes de monodromie en géométrie algébrique.* — Berlin, Spinger-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 340).

(Texte reçu le 5 mars 1975.)

Gérard Laumon,
Mathématiques,
École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05.