Bulletin de la S. M. F.

LEBON

Sur l'arête de rebroussement d'une développable

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 27-30
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__27_1>

Sur l'arête de rebroussement d'une développable;
par M. Ernest Lebon.

(Séance du 21 novembre 1879.)

Nous nous proposons de trouver les équations de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à deux coniques à centre, ayant leurs plans parallèles, leurs axes parallèles et leurs centres situés sur une même perpendiculaire à leurs plans ([1]).

Soient O et O_1 les centres des coniques; prenons pour axe des x la droite OO_1, pour axes des y et des z les deux axes de la conique O. Les coordonnées d'un point étant α, β, γ pour la conique O et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pour la conique O_1, leurs axes étant respectivement b et c, b' et c', les équations des coniques directrices sont

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

$$\alpha_1 = a, \quad \frac{\beta_1^2}{b'^2} + \frac{\gamma_1^2}{c'^2} = 1. \tag{2}$$

Soit MM_1 une génératrice de la développable; ses équations sont

$$\frac{x}{a} = \frac{y - \beta}{\beta_1 - \beta} = \frac{z - \gamma}{\gamma_1 - \gamma}. \tag{3}$$

Les tangentes en M et en M_1 aux coniques étant parallèles, leurs coefficients angulaires sont égaux, et l'on a

$$\frac{c^2\beta}{b^2\gamma} = \frac{c'^2\beta_1}{b'^2\gamma_1}. \tag{4}$$

On sait que, si les équations ([2])

$$x = Az + P, \quad y = Bz + Q$$

sont celles d'une génératrice d'une développable, A, P, B, Q étant des fonctions d'une même variable, A' et P' les dérivées de A et P, la coordonnée z_0 d'un point x_0, y_0, z_0 de l'arête de rebroussement est donnée par la formule

$$z_0 = -\frac{P'}{A'}. \tag{5}$$

Or, des équations (3) on tire

$$x = \frac{a}{\gamma_1 - \gamma} z - \frac{a\gamma}{\gamma_1 - \gamma}. \tag{6}$$

([1]) Cette question est exposée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. J. de la Gournerie, par une marche différente de celle que nous indiquons.

([2]) *Voir* la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, n° 479.

On a

$$(7) \qquad A' = -\frac{a(\gamma'_1 - 1)}{(\gamma_1 - \gamma)^2}, \quad P' = -\frac{a(\gamma_1 - \gamma\gamma'_1)}{(\gamma_1 - \gamma)^2},$$

γ'_1 désignant la dérivée de γ_1 fonction de γ.

Si de (1) et (2) on tire β et β_1, et que l'on porte leurs valeurs dans (4), on trouve

$$\frac{\gamma_1^2}{c'^2} = \frac{\lambda \dfrac{\gamma^2}{c^2}}{\mu},$$

en posant

$$\mu = 1 + (\lambda - 1)\frac{\gamma^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{b^2 c'^2}{b'^2 c^2},$$

d'où

$$(8) \qquad \gamma'_1 = \frac{\lambda \dfrac{\gamma}{c^2}}{\mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Les valeurs (7) et (8), portées dans (5), donnent

$$z_0 = \frac{\lambda \dfrac{\gamma^2}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\gamma_1^2}{c'^2}}{\lambda \dfrac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}}$$

ou

$$(9) \qquad z_0 = -\frac{\lambda(\lambda - 1)\dfrac{\gamma^4}{c^4}}{\lambda \dfrac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Pour trouver x_0 et y_0, on porte la première valeur de z_0 dans l'équation (6) et dans une équation tirée de (3) donnant y en fonction de z. Les formules obtenues sont

$$(10) \qquad x_0 = -\frac{a\mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}}{\lambda \dfrac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}},$$

$$(11) \qquad y_0 = \frac{\lambda \dfrac{\beta\gamma}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\beta_1 \gamma_1}{c'^2}}{\lambda \dfrac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \dfrac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Appelons O un cône ayant son sommet en O et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O sont, d'après (9), (10) et (11),

$$\frac{-a\mu^2\dfrac{\gamma_1}{c'^2}}{x}=\frac{\lambda\dfrac{\beta\gamma}{c^2}-\mu^2\dfrac{\beta_1\gamma_1}{c'^2}}{y}=\frac{-\lambda(\lambda-1)\dfrac{\gamma^4}{c^4}}{z}.$$

Élevons au carré cette suite de rapports égaux; remplaçons-y β, β_1, γ_1 par leurs valeurs tirées de (1), (2), (4); et, posant

$$u=\frac{c^2}{\gamma^2}-1,$$

nous trouvons

$$\frac{a^2(u+\lambda)^3}{(\lambda-1)^2x^2}=\frac{b'^2u^3}{y^2}=\frac{\lambda c'^2}{z^2}.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduit à l'équation du cône O :

$$(12)\qquad \left[(\lambda-1)\frac{x}{a}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{z}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}=0.$$

Maintenant, appelons O_1 un cône ayant son sommet en O_1 et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O_1 sont

$$\frac{x-a}{x_0-a}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Opérant comme précédemment, posant

$$t=\frac{\gamma^2}{c^2}$$

et éliminant t, nous trouvons pour l'équation du cône O_1

$$(13)\qquad \left[(\lambda-1)\frac{x-a}{a}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=0.$$

Les équations (12) et (13) représentent l'arête de rebroussement. A l'aide de ces équations on trouve aisément les projections sur les plans coordonnés de l'arête de rebroussement.