BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDENOUR REZZOUK

Quelques propriétés du noyau d'un opérateur différentiel linéaire non hypoelliptique, à coefficients constants

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 435-447

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__435_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 435-447.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU NOYAU D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE NON HYPOELLIPTIQUE, À COEFFICIENTS CONSTANTS

PAR

ABDENOUR REZZOUK

RÉSUMÉ. — En utilisant un raffinement de la caractérisation géométrique des polynômes hypoelliptiques de L. HÖRMANDER, nous démontrons ici que l'espace $\mathscr{E}_p(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, annulées par un opérateur différentiel linéaire non hypoelliptique à coefficients constants, contient un sous-espace isomorphe à l'espace s des suites à décroissance rapide.

Introduction

L. HÖRMANDER prouve, dans [1] (chap. IV), que l'espace vectoriel des fonctions annulées par un opérateur différentiel linéaire, à coefficients constants $P(D)$ sur $\mathbf{R}^n$, est contenu dans une *classe de Gevrey* si $P(D)$ est *hypoelliptique*, sa *dimension fonctionnelle* au sens de Komura [2] est donc finie.

Nous montrons ici qu'au contraire la dimension fonctionnelle de l'espace $\mathscr{E}_p$ des fonctions C^∞, annulées par P, est infinie si P n'est pas hypoelliptique. Plus précisément, si P n'est pas hypoelliptique, $\mathscr{E}_p$ contient un sous-espace fermé (facteur direct dans $\mathscr{E}_p$) isomorphe à l'espace s des suites à décroissance rapide (th. 2).

Pour prouver ce résultat, nous démontrons un raffinement de la caractérisation géométrique des polynômes hypoelliptiques de L. HÖRMANDER ([1], chap. IV) : Si $P(D)$ n'est pas hypoelliptique, il existe une suite ζ_k de vecteurs de $\mathbf{C}^n$ telle que $P(\zeta_k) = 0$; $\| \zeta_k \| = 0(\zeta_k^N)$ pour N assez grand (autrement dit, ζ_k est à croissance lente); la partie imaginaire de ζ_k reste bornée; et la partie réelle de la première composante de ζ_k est égale à k (th. 1).

Rappel des définitions

(a) La *classe de Gevrey* $g^s(\mathbf{R}^n)$ est l'espace vectoriel des fonctions f indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}^n$, telles que, pour tout compact K, il existe deux constantes positives C et L telles qu'on ait

$$\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right| \leqq C\, L^{|\alpha|}(\alpha!)^s,$$

pour tout multi-indice de dérivation $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

[On a posé comme d'habitude

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \qquad \text{et} \qquad \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!.]$$

(b) On dit qu'un opérateur différentiel, à coefficients constants $P(D)$, est *hypoelliptique* si, pour toute distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, ($P(D)\, u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) implique ($u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$). Dans [1], HÖRMANDER prouve que P est hypoelliptique si, et seulement si, $\operatorname{Im}\zeta$ tend vers l'infini quand ζ tend vers l'infini dans la variété algébrique $P(\zeta) = 0$ de $\mathbf{C}^n$.

(c) Soient E un espace localement convexe, p une semi-norme continue sur E, et B une partie bornée de E. On pose

$$d_n(B, p) = \inf_{E_n\in G_n(E)} \sup_{y\in B} d_p(y, E_n),$$

où $G_n(E)$ désigne l'ensemble des sous-espaces de dimension n de E, et $d_p(y, E_n) = \inf p(y-z)$ est la distance de y à E_n (pour la distance définie par p).

La *dimension fonctionnelle* de E est la borne inférieure de l'ensemble des nombres d tels que, pour toute partie bornée B de E, pour toute semi-norme continue p sur E, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que

$$d_n(B, p) \leqq C\exp(-n^{1/(d+\varepsilon)}).$$

C'est un invariant topologique : $df\,E = df\,F$ si E et F sont isomorphes.

La dimension fonctionnelle de $\mathscr{G}^s(\mathbf{R}^n)$ est finie, égale à sn; en particulier, la dimension fonctionnelle de l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbf{R}^n$ est n. Au contraire, la dimension fonctionnelle de s est infinie, ainsi que celle de tout espace localement convexe qui contient un sous-espace fermé isomorphe à s.

Y. KOMURA donne une autre définition de la dimension fonctionnelle, utilisant l'ε-entropie (*cf.* [2]), elle est égale à celle donnée ici $+1$.

Cet article correspond à une partie de la thèse de 3e cycle de l'auteur, soutenue en 1972, à l'Université de Paris-VII.

Notations

On utilisera les notations habituelles des équations aux dérivées partielles.

Ω désignera un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$), $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ sera la variable dans Ω.

P, étant un polynôme à coefficients complexes, s'écrira :

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \zeta^\alpha, \qquad \text{où} \quad \zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n) \in \mathbf{C}^n, \qquad a_\alpha \in C,$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

On écrira aussi :

$$\zeta = (\mu^1, \mu', \nu),$$

où

μ^1 est la partie réelle de la première composante de ζ dans $\mathbf{C}^n$ ($\operatorname{Re} \zeta^1$),

$\mu' = (\operatorname{Re} \zeta^2, \operatorname{Re} \zeta^3, \ldots, \operatorname{Re} \zeta^n)$,

$\nu = \operatorname{Im} \zeta = (\operatorname{Im} \zeta^1, \operatorname{Im} \zeta^2, \ldots, \operatorname{Im} \zeta^n)$.

On désignera par S l'ensemble des zéros du polynôme P dans $\mathbf{C}^n$. Au polynôme P, on associera l'opérateur $P(D)$:

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

où

$D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$,

$D_j = (1/i)(\partial/\partial x_j)$,

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ \ldots \circ D_n^{\alpha_n}$.

On désignera par :

$\mathscr{E}$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables;

$\mathscr{D}$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact;

$\mathscr{D}'$, les séries d'espaces de distributions;

$\mathscr{E}_P$, l'espace des fonctions de $\mathscr{E}$ annulées par P;

s, l'espace des suites à décroissance rapide;

$\mathscr{E}'$, l'espace des distributions à support compact.

THÉORÈME 1. — *Soit P un polynôme non hypoelliptique, alors il existe une suite $(\zeta_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $\zeta_k \in S$, qui vérifie les trois conditions suivantes :*

(i) *il existe $c_0 > 0$ tel que $|\operatorname{Im} \zeta_k| < c_0$ pour tout k, et ζ_k tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini;*

(ii) $\operatorname{Re} \zeta_k^1 = k$ *pour tout k entier supérieur à* 1;

(iii) *il existe $s \geqq 1$ et $C_1 > 0$ tels que $|\zeta_k| \leqq C_1 . k^s$ pour tout k entier.*

Pour l'hypoellipticité d'un opérateur P, on prendra la définition algébrique de HÖRMANDER [1], c'est-à-dire P est hypoelliptique si, et seulement si, $|\operatorname{Im} \zeta|$ tend vers l'infini lorsque ζ tend vers l'infini en restant dans S. Donc, si P n'est pas hypoelliptique, il existe une suite $(\zeta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ avec $\zeta_k \in S$ et $C_0 > 0$ telle que ζ_k tend vers l'infini avec k et $|\operatorname{Im} \zeta_k| < C_0$. On supposera, sans restreindre la généralité, que c'est la première composante de ζ_k qui tend ves l'infini. Posons

$$M = \{(t, \mu', \nu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^n;\ P((t, \mu') + i\nu) = 0,\ |\nu| \leqq C_0\},$$
$$N_t = \{(\mu', \nu) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^n;\ (t, \mu', \nu) \in M\},$$
$$J_{(\mu', \nu)} = \{t \in \mathbf{R};\ (t, \mu', \nu) \in M\},$$
$$\delta(t) = \inf\{|(t, \mu') + i\nu|;\ (\mu', \nu) \in N_t\},$$
$$F = \{(t, \delta);\ P((t, \mu') + i\nu) = 0,\ |\nu| \leqq C_0,\ |(t, \mu) + i\nu| = \delta\}.$$

LEMME 1. — *Soit P un polynôme non hypoelliptique, avec les notations ci-dessus, il existe $a > 0$ tel que l'intervalle $[a, +\infty[$ soit contenu dans $J_{(\mu', \nu)}$.*

Preuve du lemme 1. — Un ensemble *semi-algébrique* de $\mathbf{R}^n$ est une réunion finie d'ensembles A de $\mathbf{R}^n$, défini par un nombre fini d'équations et d'inéquations algébriques,

$$A = \{x;\ x \in \mathbf{R}^n;\ P_1(x) = 0, \ldots, P_q(x) = 0;\ Q_1(x) < 0, \ldots, Q_m(x) < 0\}.$$

$J_{(\mu', \nu)}$, étant la projection sur $\mathbf{R}$ d'un ensemble semi-algébrique M, est un ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}$ (théorème de SEIDENBERG-TARSKI [6]). C'est donc, soit un ensemble fini, ce qui est exclu car $\operatorname{Re} \delta_k^1 \in J_{(\mu', \nu)}$ et $\operatorname{Re} \zeta_k^1$ tend vers l'infini, soit une réunion finie d'intervalles non vides de $\mathbf{R}$, auquel cas l'un des intervalles est de la forme $[a, +\infty[$.

LEMME 2. — *Soit P un polynôme non hypoelliptique, avec les notations ci-dessus, il existe $C > 0$ et $s \geqq 1$ tels que, pour tout t dans l'intervalle $[a, +\infty[$, alors $\delta(t) \leqq C . t^s$.*

Preuve du lemme 2. — F est un ensemble semi-algébrique. F n'est pas vide, car $(t, \delta(t)') \in F$, pour tout $t \in [a, +\infty[$ et, d'après la définition de la borne inférieure, $(t, \delta(t)) \in \partial F$ (bord de F), donc F n'est pas ouvert, et il existe un polynôme Q, non identiquement nul, tel que

$$((t, \delta) \in \partial F) \Rightarrow (Q(t, \delta) = 0),$$

d'où $Q(t, \delta(t)) = 0$ et, par le théorème de Puiseux, on a

$$\delta(t) \leqq C.t^s.$$

On en déduit qu'on a $s \geqq 1$, puisque $\delta(t) = |(t, \mu') + i\nu| \geqq t$.

Preuve du théorème 1. — Il suffit de poser $t = k$, on a alors

$$\zeta_k = (k, \mu'_k) + i\nu_k \qquad \text{avec} \quad |\nu_k| < C_0.$$

Considérons maintenant l'application A_p qui, à la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$, associe la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \exp(ix.\zeta_k)$, où ζ_k est la suite définie plus haut, et $x.\zeta_k = x^1 \zeta_k^1 + \ldots + x^n \zeta_k^n$.

1° A_p est linéaire continue de s dans $\mathscr{E}_p(\mathbf{R}^n)$; en effet K étant un compact de $\mathbf{R}^n$,

$$\sup\{|D^\alpha A_p((\lambda_k)_k)(x)|; x \in K\} \leqq C_K \sup_k |\lambda_k| k^{s.|\alpha|+s'}.$$

2° La proposition suivante montre dans quelle condition suffisante A_p est un isomorphisme de s sur $A_p(s)$.

PROPOSITION 1. — *Supposons qu'il existe une suite $(T_k) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ de distributions à support compact d'une variable vérifiant :*

(i) $T_m(\exp ix^1 \zeta_k^1) = \delta_m^k$, *où δ_m^k est le symbole de Kronecker, et ζ_k^1 est la première composante de ζ_k du théorème* 1 *;*

(ii) *Il existe un compact K tel que les distributions T_m sont toutes à support dans K;*

(iii) *Pour tout $s \geqq 0$, il existe $C_s > 0$, $m_s \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\sup_k |\langle T_k, f \rangle k^s| \leqq C_s \sup\{|D^n f(x)|; x \in K, n \leqq m_s\},$$

pour tout

$$f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}),$$

alors l'application A_p est un isomorphisme de s sur $A_p(s) \subset \mathscr{E}_p(\mathbf{R}^n)$.

Preuve. — L'injectivité est immédiate :

$$(A_p((\lambda_k)_k)(x) = 0)$$

implique

$$(A_p((\lambda_k)_k)(x^1, 0, \ldots, 0) = 0 \text{ pour tout } x^1 \in \mathbf{R}),$$

donc, pour tout m,

$$\langle T_m, \textstyle\sum_k \lambda_k \exp ix^1 . \zeta_k^1 \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire } \lambda_m = 0,$$

et évidemment $P(D)(\sum_k \lambda_k \exp ix\, \zeta_k) = 0$.

Pour montrer que A_p est un isomorphisme de s dans $\operatorname{Im} A_p$, il suffit, par le théorème du graphe fermé, de montrer que $\operatorname{Im} A_p$ est fermé dans $\mathscr{E}_p$. En fait, les conditions (i), (ii) et (iii) entraînent que $\operatorname{Im} A_p$ est un facteur direct dans $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}_p$.

En effet, si $B : f \to (\langle T_m, f \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$, alors (ii) et (iii) entraînent que $\operatorname{Im} B$ est contenu dans s, et que B est continu de $\mathscr{E}$ dans s. La condition (i) entraîne $B . A_p = \mathrm{id}_s$, et donc $A_p B A_p = A_p$ et $(A_p B)^2 = A_p B$, c'est-à-dire que $A_p B$ est un projecteur et que $\operatorname{Im} A_p = \operatorname{Im}(A_p B)$ est un facteur direct dans $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}_p$.

PROPOSITION 2. — *Supposons qu'il existe une suite $(F_m)_m$ de fonctions entières de type exponentiel vérifiant :*

(*a*) *Il existe $C > 0$ et $a > 0$ tels que*

$$|F_m(z)| \leqq C \exp a |\operatorname{Im} z| \quad \textit{pour tout } m \in \mathbf{N} \textit{ et } z \in \mathbf{C};$$

(*b*) $F_m(\zeta_k^1) = \delta_m^k$,

alors il existe une suite de distributions T_m à support compact vérifiant les hypothèses (i), (ii) *et* (iii) *de la proposition* 1.

Preuve. — Notons

$$\hat{\psi}(y) = \int \exp(-ixy)\, \psi(x)\, dx,$$

où ψ est une fonction à décroissance rapide ($\psi \in \zeta(\mathbf{R})$) :

$$(\overline{\mathscr{F}}\psi)(x) = (2\pi)^{-1} \int \exp ixy\, \psi(y)\, dy,$$

$$\psi(x) = (\overline{\mathscr{F}}(\hat{\psi}(y)))(x).$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi \subset (-a, +a)$ et

$$\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\, dx = 1.$$

D'après le théorème de Paley-Wiener, $\hat{\varphi}$ est entière, de type exponentiel, et vérifie : Pour tout N, il existe C_N tel que

$$|\hat{\varphi}(z)| \leqq C_N(1+|z|)^{-N}\exp(a\,|\operatorname{Im} z|).$$

Considérons la suite H_m suivante :

$$H_m(z) = F_m(\zeta_m^1 - z)\,\hat{\varphi}(z),$$

alors

$$|H_m(z)| \leqq C'_N(1+z)^{-N}\exp(2\,a\,|\operatorname{Im} z|) \qquad (\text{car } \operatorname{Im}\zeta_m^1 \text{ est bornée}).$$

Il existe donc $S_m \in \mathscr{E}'(\mathbf{R})$, telle que $\operatorname{Supp} S_m \subset [-2\,a, +2\,a]$ et $\hat{S}_m(z) = H_m(z)$. Il suffit de prendre la suite

$$T_m = \exp(-ix\,\zeta_m^1).S_m(x)$$

pour avoir les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 1 :

$$\text{(i)}\ \langle T_m, \exp ix\,\zeta_k^1\rangle = \hat{S}_m(\zeta_m^1 - \zeta_k^1) = H_m(\zeta_m^1 - \zeta_k^1)$$
$$= F_m(\zeta_k^1)\,\varphi(\zeta_m^1 - \zeta_k^1) = \delta_m^k;$$

$$\text{(ii)}\ \operatorname{Supp} T_m \subset [-2\,a, +2\,a];$$

$$\text{(iii)}\ \langle T_m, f\rangle = (i\,\zeta_m^1)^{-s}\sum\nolimits_{p\leqq s}\binom{s}{p}\int \exp(-ix\,\zeta_m^1)\,S^{(s-p)}(x)\,f^{(p)}(x)\,dx$$
$$\leqq C\,m^{-s}\Big(\sum\nolimits_{p\leqq s}\binom{s}{p}\Big)|\operatorname{Im}\zeta_m^1|^{s-p}\,|S(i\operatorname{Im}\zeta_m^1)|$$
$$\times \sup\nolimits_{x\in[-2\,a,\,+2\,a],\,p\leqq s}|f^{(p)}(x)|$$
$$\leqq C_s\,m^{-s}\sup\nolimits_{x\in[-2\,a,\,2\,a],\,p\leqq s}|f^{(p)}(x)|.$$

RECHERCHE DE LA SUITE $(F_m(z))$. — *Exemple* : $\zeta_k^1 = k$, alors

$$F_m(z) = \frac{\sin\pi(z-m)}{\pi(z-m)}.$$

Remarquons que

$$F_m(z) = \prod\nolimits_{k\geqq 1}\left(1 - \frac{(z-m)}{k}\right)\left(1 - \frac{(z-m)}{-k}\right).$$

Dans le cas général, on procède de façon analogue.

PROPOSITION 3. — *Soit F_m la suite de fonctions suivante :*

$$F_m(z) = U_m(z)\,V_m(z),$$

avec

$$U_m(z) = \prod_{k \geqq 1}\left(1 - \frac{(z-\zeta_m^1)}{\alpha_k}\right)\left(1 - \frac{z-\zeta_m^1}{\alpha_{-k}}\right),$$

$$V_m(z) = \prod_{k \geqq 1}\left(1 - \frac{(z-\zeta_m^1)}{\beta_k}\right)\left(1 - \frac{z-\zeta_m}{\beta_{-k}}\right),$$

où les suites α_k *et* β_k *vérifient :*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_k \;= \zeta'_{k+m} - \zeta'_m = k + i(b_{k+m} - b_m) \\ \alpha_{-k} = (-k) + i(b_{k+m} - b_m) \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad k > 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_k \;= \;\; k + i(b_{m-k} - b_m) \\ \beta_{-k} = -k + i(b_{m+k} - b_m) \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad 1 \leqq k \leqq m,$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_k \;= \;\; k + i(b_{m+k} - b_m) \\ \beta_{-k} = -k + i(b_{m+k} - b_m) \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad k > m\,.$$

Alors (F_m) *vérifie les conditions* (*a*) *et* (*b*) *de la proposition* 2.

Considérons :

$\mathscr{A}_C$ l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ avec $u_k = k + i\, d_k$ et $|d_k| < C$;

$\mathscr{A}_C^0$ l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de $\mathscr{A}_C$ avec $d_k = d_{-k}$;

$\mathscr{P}_C = \{f\,;\, f(z) = (z-u_0)\prod_{k \geqq 1}(1-(z/u_k))\,(1-(z/u_{-k}))$ avec $u_k \in \mathscr{A}_C\}$;

$\mathscr{P}_C^0 = \{f\,;\, f(z) = (z-u_0)\prod(1-(z/u_k))\,(1-(z/u_{-k}))$ avec $u_k \in \mathscr{A}_C^0\}$.

LEMME 3.1. — *Il existe une constante* $\delta_C > 0$ *telle que, pour tout* $f \in \mathscr{P}_C$, *f est une fonction entière de type exponentiel vérifiant :*

$$|f(z)| \leqq |z - a_0| \exp \delta_C |z|.$$

Preuve du lemme 3.1. — Posons

$$h(z) = \frac{f(z)}{z - a_0},$$

$$\log|h(z)| = \textstyle\sum_1^\infty \log(|1 - z a_k^{-1}|\,|1 - z a_{-k}^{-1}|) \times \sum_1^\infty \log(1 + (|z|^2 + 2C|z|)\,k^{-2}).$$

Or on peut majorer le second membre de l'inégalité par

$$\int_1^\infty 2(2C|z| + |z|^2)[(1 + (2C|z| + |z|^2)\,t^{-2})\,t^3]^{-1}\, m(t)\, dt$$

$$= 2\sqrt{2C|z| + |z|^2}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}(2C|z| + |z|^2)^{-1/2}\right],$$

où $m(t)$ est le nombre d'entiers inférieur ou égal à t (pour un calcul analogue, *voir* [4]).

L'intégrale peut être majorée par $\delta_C |z|$, d'où

$$|f(z)| \leqq |z-a_0| \exp \delta_C |z|.$$

LEMME 3.2. — *Si f est dans $\mathscr{P}_C^0$, alors la fonction $z \mapsto f(z+p)$ peut s'écrire :*

$$f(z+p) = g(z)\pi_p \quad \textit{pour tout } p \in \mathbf{Z},$$

où $g(z)$ appartient à $\mathscr{P}_c$, et π_p est borné par rapport à p.

Preuve :

$$f(z+p) = (z+p-u_0)\prod\left(1-\frac{z+p}{u_k}\right)\left(1-\frac{z+p}{u_{-k}}\right)$$

avec

$$u_k = k + i\, d_k \in \mathscr{A}_c^0,$$

le produit étant absolument convergeant, en changeant d'indice, on obtient :

$$f(z+p) = \frac{-p+i\,d_0}{p+i\,d_p}\prod\nolimits_{k\neq 0,\, k\neq p}\left[\left(1-\frac{p}{u_k}\right)\left(1-\frac{p}{u_{-k}}\right)\right]$$
$$\times\left[(z-u'_0)\prod\nolimits_{k>0}\left(1-\frac{z}{u'_k}\right)\left(1-\frac{z}{u'_k}\right)\right],$$

avec

$$u'_k = k + i\, d_{k+p} \qquad \text{et} \qquad u'_{-k} = -k + i\, d_{-k+p},$$

donc

$$f(z+p) = \pi_p\, g(z),$$

où

$$g(z) = (z-u'_0)\prod\nolimits_{k>0}\left[\left(1-\frac{z}{u'_k}\right)\left(1-\frac{z}{u'_{-k}}\right)\right]$$

et

$$\pi_p = \frac{(-p+i\,d_0)}{(p+i\,d_p)}\prod\nolimits_{k\neq 0,\, k\neq p}\left[\left(1-\frac{p}{u_k}\right)\left(1-\frac{p}{u_{-k}}\right)\right].$$

1° $g(z)$ est évidemment dans $\mathscr{P}_c$;

2° Montrons que π_p est borné par rapport à p.

Posons

$$\alpha(p) = \prod\nolimits_{k>0,\, k\neq p}\left[\left(1-\frac{p}{u_k}\right)\left(1-\frac{p}{u_{-k}}\right)\right];$$

$$\beta(p) = \prod\nolimits_{1<k \leqq m_p,\, k \neq p} \left[\left(1-\frac{p}{u_k}\right)\left(1-\frac{p}{u_{-k}}\right)\right] \qquad \text{pour} \quad m \in \mathbf{N},$$

$$\gamma(p) = \prod\nolimits_{k>m_p} \left[\left(1-\frac{p}{u_k}\right)\left(1-\frac{p}{u_{-k}}\right)\right],$$

$$\alpha(p) = \beta(p)\gamma(p),$$

en remarquant que

$$\left|1-\frac{p}{u_k}\right| = \left|\frac{k-p-i\,d_k}{k+i\,d_k}\right| \leqq \left|\frac{k-p+ic}{k}\right|,$$

$$|\beta(p)| \leqq \prod\nolimits_{k=1}^{p-1} \frac{|k-p-ic|}{k} \prod\nolimits_{k=p+1}^{mp} \frac{|k-p-ic|}{k}$$

$$\times \prod\nolimits_{k=1}^{p-1} \frac{|k+p-ic|}{k} \prod\nolimits_{k=p+1}^{mp} \frac{|k+p-ic|}{k}.$$

Si Γ est la fonction habituelle, définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

et

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)z} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z+n > 0,$$

on a alors :

$$\beta(p) \leqq \frac{|\Gamma(-ic+p-1)|}{c\,|\Gamma(-ic)|} \; \frac{|\Gamma(-ic+(n-1)p)|}{c\,|\Gamma(-ic)|} \; \frac{p}{m\,p!}$$

$$\times \frac{\Gamma(ic+(m+1)p)}{c\,|\Gamma(-ic)|\,.\,|(2p-ic)|} \; \frac{c\,|p(-c)|}{\Gamma(p-ic)} \; \frac{p}{m\,p!},$$

mais sachant que $|\Gamma(z+n)| \sim n!$ quand n tend vers l'infini, p étant fixé, on choisit m assez grand. On a alors :

$$|\beta(p)| \leqq K \frac{(m-1)\,p!\,(m+1)\,p!}{m\,p!\,m\,p!},$$

la quantité $[(m-1)\,p!\,(m+1)\,p!]/(mp!\; mp!)$ est majorée par une constante indépendante de p. Pour majorer $\gamma(p)$, le produit étant convergeant, si m est choisi suffisamment grand :

$$|\gamma(p)| < 1+\varepsilon,$$

d'où

$$|\alpha(p)| = |\beta(p)\gamma(p)|$$

est borné.

LEMME 3.3. — *Si f appartient à $\mathscr{P}_c^0$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$|f(z)| \leqq K_c \exp \delta_c |\operatorname{Im} z|.$$

C'est une application du théorème de Phragmén-Lindelöf [3].

D'après le lemme 3.1, $|f(z)| \leqq \gamma_c \exp \delta_c |z|$. Donc :

— si z est sur l'axe imaginaire, $z = \operatorname{Im} z$,

$$|f(z)| \leqq \gamma_c \exp |\operatorname{Im} z|;$$

— si z est sur l'axe réel, $z = \operatorname{Re} z = x$,

$$f(z) = f(x) = f(x - Ex + Ex),$$

où $Ex = p$ est la partie entière de x,

$$f(x) = f((x-p)+p) = g(x-p)\pi_p,$$

or $0 \leqq x-p < 1$, $|g(x-p)| \leqq \gamma_c \exp \delta_c$, et, d'après le lemme 3.2, π_p est borné;

— donc f est bornée sur l'axe réel, et d'après le théorème de Phragmén-Lindelöf ([3], p. 47) :

$$|f(z)| \leqq K_c \exp a(\operatorname{Im} z).$$

Preuve de la proposition 3.

$$F_m(z+\zeta_m^1) = U_m(z+\zeta_m^1)\, V_m(z+\zeta_m^1),$$
$$z\, U_m(z+\zeta_m^1) \in \mathscr{P}_{2c}^0 \qquad \text{et} \qquad z\, V_m(z+\zeta_m^1) \in \mathscr{P}_{2c}^0,$$

donc

$$|U_m(z+\zeta_m^1)| \leqq K \exp \delta_{2c} |\operatorname{Im}(z)| \qquad \text{et} \qquad |V_m(z+\zeta_m^1)| K \exp \delta_{2c} |\operatorname{Im} z|,$$

d'où

(*a*) $\qquad |F_m(z)| = |U_m(z)\, V_m(z)| \leqq K^2 \exp 2\delta_{2c} |\operatorname{Im} z|;$

(*b*) $\qquad U_m(\zeta_k^1) = 0 \;$ si $1 \leqq k < m, \qquad V_m(\zeta_k^1) = 0 \;$ si $k > m$,

et

$$U_m(\zeta_m^1) = V_m(\zeta_m^1) = 1,$$

c'est-à-dire $F_m(\zeta_1^k) = \delta_k^m$.

THÉORÈME 2. — *Soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants non hypoelliptique sur* $\mathbf{R}^n$, *alors* $\mathscr{E}_p(\mathbf{R}^n)$ *contient un sous-espace isomorphe à l'espace s des suites à décroissance rapide.*

La preuve est maintenant immédiate puisque l'existence de la suite (F_m) implique celle de (T_m) et, par la proposition 1, l'application A_p est un isomorphisme.

GÉNÉRALISATION À UN OUVERT Ω. — Il existe $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et $r \in N—\{0\}$ tels que

$$0 \in x_0 + \Omega \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} T_m \subset K \subset r(X_0^1 + pr_1 \Omega).$$

PROPOSITION 4. — *Il existe une suite de distribution* $S_m \in \mathscr{E}'(\mathbf{R})$ *et un compact* $K \subset \mathbf{R}$:

1° $\operatorname{Supp} S_m = \operatorname{Supp} T_m \subset K$;

2° $\langle S_m, \exp(iy\zeta_{kr}^1 . r^{-1}) \rangle = \delta_m^k$;

3° *Pour tout* $s \geqq 0$, *il existe* $c_s > 0$ *et* $m_s \in \mathbf{N}$ *tels que*

$$\sup_k |\langle S_k, f \rangle k^s| \leqq C_s \sup_{x \in K, n \leqq m_s} |D^n f(x)| \ \textit{pour tout}\ f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}).$$

Preuve de la proposition 4. — Il suffit de reprendre la construction des T_m en remplaçant ζ_k par $\alpha_k = \zeta_{kr} r^{-1}$ qui vérifie aussi les conditions exigées pour la construction

(i) $$\operatorname{Re} \alpha_k^1 = k;$$

(ii) $$|\operatorname{Im} \alpha_k| \leqq c;$$

(iii) $$|\alpha_k| \leqq ck^s.$$

THÉORÈME 2 *bis*. — *Soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants non hypoelliptique sur* Ω, *alors* $\mathscr{E}_p(\Omega)$ *contient un sous-espace isomorphe à l'espace s des suites à décroissance rapide.*

Preuve du théorème 2 *bis*. — Il suffit de remplacer A_p par B_p :

$$B_p : \ (\lambda_k) k \mapsto B_p((\lambda_k)_k)(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp i(x + x_0) \zeta_{kr}.$$

B_p est évidemment linéaire continue de s dans $\mathscr{E}_p(\Omega)$, la difficulté réside en l'injectivité.

Si $B_p((\lambda_k)_k) = 0$, alors :

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \exp i(x^1 + x_0^1) \zeta_{kr}^1 = 0,$$

pour tout x^1 appartenant à la première projection de Ω, cela implique

$$\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp iy\alpha_k = 0 \quad \text{pour tout } y \in K,$$

et donc

$$\lambda_m = \langle S_m, \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \exp i y \alpha_k \rangle = 0 \quad \text{pour tout } m.$$

Pour démontrer que B_p est un isomorphisme de s sur $B_p(s)$, il suffit de reprendre la démonstration faite pour A_p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). — *Linear partial differential operator*. — Berlin, Springer-Verlag, 1964 (*Grundlehren der mathematischen Gesellschaft*, 116).

[2] KOMURA (Y.). — Die Nukleartät der Lösungsräume der hypoelliptischen Gleichungen, *Funkcial. Ekvac.*, Tokyo, t. 9, 1966, p. 313-324.

[3] LEVIN (B. JA.). — *Distribution of zeros of entire functions*. — Providence, American mathematical Society, 1964)(*Translations of mathematical Monographs*, 5).

[4] MITJAGIN (B. S.). — Dimension approchée et bases dans les espaces nucléaires [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk.*, t. 16, 1961, n° 4, p. 63-132; [en anglais] *Russian math. Surveys*, t. 16, 1961, n° 4, p. 59-127.

[5] SEIDENBERG (A. A.). — A new decision method for elementary algebra, *Annals of Math.*, Series 2, t. 60, 1954, p. 365-374.

[6] TARSKI (A.). — *A decision method for elementary algebra and geometry*. 2nd edition. — Berkeley, University of California Press, 1951.

(Texte définitf reçu le 7 juin 1974.)

Abdenour REZZOUK
Université de Paris-7,
U. E. R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
Tour 55,
75221 Paris-Cedex 05.