BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN LICHNEWSKY

Principe du maximum local et solutions généralisées de problèmes du type hypersurfaces minimales

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 417-433
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__417_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 417-434.

PRINCIPE DU MAXIMUM LOCAL ET SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES DE PROBLÈMES DU TYPE HYPERSURFACES MINIMALES

PAR

ALAIN LICHNEWSKY

RÉSUMÉ. — Nous étudions des problèmes de calcul des variations du type du problème des surfaces minimales non paramétriques : (P_Φ). Trouver u réalisant l'infimum du problème $\inf_{u=\Phi \text{ sur } \partial\Omega} \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx$ dans un ouvert Ω de R^n régulier, mais sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse géométrique telle que « la courbure moyenne du bord $\partial\Omega$ est positive ». Il existe alors des données régulières pour lesquelles ce problème n'admet ni solution classique ni solution faible dans l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ satisfaisant la condition aux limites. Plusieurs méthodes permettent de définir des solutions généralisées; celle que nous développons ici repose essentiellement sur des méthodes d'analyse convexe dont la dualité au sens de FENCHEL et ROCKAFELLAR.

Dans une première partie, nous démontrons une majoration dans $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ pour les solutions faibles dans $W^{1,1}(\Omega)$ d'équations quasilinéaires du type « surfaces minimales ». Ce résultat nous permet ensuite de prouver l'existence de solutions généralisées du problème (P_Φ) pour des données au bord non bornées.

Introduction

L'objet de ce travail est de prouver l'existence de solutions généralisées pour des problèmes du calcul des variations du type hypersurfaces minimales

$$(P_\Phi) : \quad \inf_{u=\Phi \text{ sur } \partial\Omega} \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx$$

dans un ouvert Ω *non nécessairement « convexe »*, et d'obtenir une majoration $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ pour les solutions faibles dans $L^1(\Omega)$ de l'équation d'Euler associée :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u/\partial x_i}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Plus précisément, nous étendons ici les résultats de R. TEMAM [21], qui obtient l'existence de solutions généralisées lorsque la donnée au bord est trace d'une fonction Φ dans $W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, au cas d'une donnée au bord quelconque dans $L^1(\partial\Omega)$: trace d'un élément de $W^{1,1}(\Omega)$. Pour ce faire, nous prouvons, outre la majoration *a priori* mentionnée ci-dessus, un résultat de « stabilité » pour les solutions généralisées de P_Φ.

Dans la première partie, nous démontrons un principe du maximum local pour les solutions faibles de l'équation quasilinéaire

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div} \mathscr{A}(x, u, \nabla u) = \mathscr{B}(x, u, \nabla u),$$

où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des fonctions de $\Omega \times R \times R^n$ dans R^n et R, respectivement, vérifiant les seules majorations : $\forall (x, u, p) \in \Omega \times R^{n+1}$:

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{array}{l} p.\mathscr{A}(x, u, p) \geqq |p| - c|u| - g, \\ |\mathscr{A}(x, u, p)| \leqq a(x); \qquad |\mathscr{B}(x, u, p)| \leqq b(x), \\ a(x) \in L^\infty(\Omega); \qquad b, c, g \in L^{n/(1-\varepsilon)}(\Omega) \quad \text{où } \varepsilon \in]0, 1[. \end{array}\right.$$

Notre résultat est le suivant :

Si u est une solution faible de l'équation (2) *appartenant à* $L^1(\Omega)$, *pour tout ouvert* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *il existe une constante, qui ne dépend que de* Ω, Ω', *a, c, b, g et de la norme* $\|u\|_{L^1(\Omega)}$, *majorant u presque partout dans* Ω.

La méthode est due à SERRIN [17], qui obtient un résultat analogue pour les solutions faibles d'équations quasilinéaires (2) vérifiant, au lieu de (3) :

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall (x, u, p) \in \Omega \times R \times R^n : \quad p.\mathscr{A}(x, u, p) \geqq |p|^\alpha - c|u|^\alpha - g \\ \text{avec} \\ \qquad\qquad \alpha > 1. \end{array}\right.$$

Par la suite, cette estimation nous permet de majorer localement le gradient de solutions, non bornées *a priori*, de l'équation des surfaces minimales, à l'aide des résultats de DE GIORGI [1] et de LADYŽENSKAJA-URAL'CEVA [7]. Ce résultat est présenté dans un cadre plus général que celui qui est nécessaire par la suite en raison de son intérêt intrinsèque (*cf.* TRUDINGER [22]).

La deuxième partie est l'étude des solutions généralisées du problème des hypersurfaces minimales que nous définissons comme R. TEMAM [21] : le problème dual de P_Φ (1) (au sens de ROCKAFELLAR [14]) : P_Φ^* admet

(1) Les résultats et les notations que nous empruntons à l'analyse convexe sont résumés au début du paragraphe 2. Une étude détaillée est faite dans [14] et [3]; les motivations « physiques » de ces méthodes sont précisées en [12].

une solution unique p^*; les solutions généralisées sont les éléments de $W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant la relation d'extrémalité

$$\nabla u = \frac{-p^*}{\sqrt{1-|p^*|^2}} \quad \text{presque partout dans } \Omega. \tag{5}$$

Pour prouver l'existence de solutions généralisées lorsque $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$, nous complétons les techniques d'analyse convexe et le théorème de perturbation singulière de R. TEMAM [21] par la majoration décrite ci-dessus et par un résultat de stabilité pour les solutions généralisées de P_Φ. Notre démarche est la suivante : nous considérons une suite $(\Phi_i)_{i \in N}$ d'éléments de $C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,1}(\Omega)$ qui tend vers Φ dans $W^{1,1}(\Omega)$, et nous montrons que la suite des solutions généralisées correspondantes converge, en un sens faible, vers une solution généralisée de P_Φ. Outre l'existence d'une solution généralisée, nous obtenons ainsi un résultat de régularité sur p^*, solution du problème dual P^*, qui permet de montrer (*cf.* [21]) que toute suite minimisante de P_Φ tend vers une solution généralisée.

Nous décrivons, dans la troisième partie, une classe de problèmes du calcul des variations, voisine de celle envisagée par R. TEMAM en [21], à laquelle on peut étendre les résultats des deux premières parties. Les démonstrations des résultats que nous présentons sont développées en [8].

L'auteur remercie R. TEMAM, dont le cours de calcul des variations [20] est à l'origine de ce travail, pour les nombreuses discussions intéressantes durant l'élaboration de cet article, ainsi que pour les conseils et pour les encouragements qu'il lui a prodigués.

Cadre et notations

1° Ω est un ouvert régulier de R^n, dont le bord $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une application lipschitzienne de R^{n-1} dans R; Ω est localement situé d'un même côté de $\partial\Omega$. Nous supposons de plus Ω borné.

dx, désigne la mesure de Lebesgue;

p. p. Ω signifie : presque partout dans Ω pour la mesure dx.

2° $B(x, R)$, $x \in R^n$, $R > 0$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon R, pour la norme euclidienne.

3° *Espaces fonctionnels* (*cf.* [9], [15]) :

$\mathscr{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω;
$\mathscr{D}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions dans Ω;

$W^{1,1}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions dans Ω qui sont, ainsi que leurs dérivées premières, des fonctions intégrables dans Ω;

$W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions dans Ω dont le produit, par tout élément de $\mathscr{D}(\Omega)$, est dans $W^{1,1}(\Omega)$;

$\mathrm{H}^1(\Omega)$ [resp. $\mathrm{H}^2(\Omega)$], désigne l'espace des distributions dans Φ qui sont, ainsi que leurs dérivées premières (resp. d'ordre $\leqq 2$), des fonctions de carré intégrable sur Ω;

$\|\,.\,\|_{\alpha, K}$ (resp. $\|\;\|_\alpha$), $1 \leqq \alpha \leqq +\infty$, désigne la norme de l'espace $L^\alpha(K)$, où $K \subset \Omega$ [resp. $L^\alpha(\Omega)$].

4° *Dualité en analyse convexe* (*cf.* [20], [14], [3]). — Si G est une fonction convexe d'un espace de Banach V dans $]-\infty, +\infty]$, nous notons :

V^*, le dual de V;

G^*, la conjuguée de G, $G^* : V^* \to\,]-\infty, +\infty]$, définie par

$$G^*(p^*) = \sup_{p \in V}\{\langle p^*, p\rangle - G(p)\}.$$

Soit p un point de V, $p^* \in V^*$ est un *sous-gradient* de G en p si la fonction

$$q \in V \to \langle p^*, q-p\rangle + G(p)$$

est une minorante affine de G, exacte en p. L'ensemble de ces directions p^* est

$\partial G(p)$, le sous-différentiel de G au point p :

$$\partial G(p) = \{p^*;\ p^* \in V^*,\ 0 = G(p) + G^*(p^*) - \langle p^*, p\rangle\};$$

$\partial_\varepsilon G(p)$ $(\varepsilon > 0)$, le sous-différentiel à ε près de G au point p :

$$\partial_\varepsilon G(p) = \{p^* \in V^*;\ 0 \leqq G(p) + G^*(p^*) - \langle p^*, p\rangle \leqq \varepsilon\}.$$

5° Dans les majorations qui apparaîtront ultérieurement, le symbole $C(a, b, \ldots)$ désigne une constante qui dépend de $a, b, \ldots$, *et est fonction croissante de ces quantités.*

1. Une majoration dans L^∞_{loc}

Voici nos hypothèses pour ce paragraphe : $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ désignent respectivement des applications de $\Omega \times R^{n+1}$ dans R^n et R qui vérifient les conditions de CARATHÉODORY (*cf.* KRASNOLSELSK'IJ [5]), et en outre. les majorations (1.1) ci-après :

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } (u,\ p) \text{ dans } R\times R^n \text{ et pour presque tout } x \text{ dans } \Omega, \\ |\mathscr{A}(x,\ u,\ p)| \leqq a(x); \quad |\mathscr{B}(x,\ u,\ p)| \leqq b(x); \quad a \geqq 0, \quad b \geqq \\ \qquad p.\mathscr{A}(x,\ u,\ p) \geqq |p| - c|u| - g; \quad c,\ g \geqq 0, \\ a \in L^{\infty}(\Omega); \quad b,\ c,\ g \in L^{n/(1-\varepsilon)}(\Omega) \quad \text{où } \varepsilon \text{ est fixé dans }]0,\ 1[. \end{cases}$$

Une solution faible de l'équation (1.2) :

$$(1.2)\qquad \operatorname{div}\mathscr{A}(x,\ u,\ \nabla u) = \mathscr{B}(x,\ u,\ \nabla u) \quad \text{dans } \Omega$$

est une fonction $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que, pour toute fonction test φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, on ait

$$(1.3)\qquad 0 = \int_{\Omega} [\nabla\varphi.\mathscr{A}(x,\ u,\ \nabla u) + \varphi\mathscr{B}(x,\ u,\ u)]\,dx.$$

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* $u \in L^1(\Omega)$ *une solution faible de* (1.2) *dans* Ω, *et* $B(x,\ R') \subset \Omega$ *une boule fixée. Sous les hypothèses* (1.1), *pour tout* R, $0 < R < R'$:

$$\|u\|_{\infty,\,B(x,\,R)} \leqq K(\varepsilon,\ n,\ \|b\|_{n/(1-\varepsilon)},\ \|c\|_{n/(1-\varepsilon)},\ \|a\|_{\infty}) \times \max(1,\ (R'-R)^{-1}).\{\|u\|_{1,\,B(x,\,R')} + \|g\|_{n/(1-\varepsilon)}(R')^n\}.$$

Remarque. — Soit $\mathscr{C}$ une application de $\Omega\times R$ dans R vérifiant les conditions de CARATHÉODORY et, en outre, pour tout u dans R et pour presque tout x dans Ω :

$$u\mathscr{C}(x,\ u) \geqq 0.$$

Les conclusions du théorème 1 sont encore vraies si on suppose u, solution faible de l'équation

$$(1.4)\qquad \operatorname{div}\mathscr{A}(x,\ u,\ \nabla u) = \mathscr{B}(x,\ u,\ \nabla u) + \mathscr{C}(x,\ u).$$

Voici les principales étapes de la démonstration de ce théorème. La méthode employée est semblable à celle de SERRIN [17] (à qui nous empruntons également le lemme 1.1).

LEMME 1.1. — *Soient* a_i, β_i $(i = 1,\ \ldots,\ N)$ *des réels positifs* $0 < a_i < +\infty$ $0 \leqq \beta_i < \alpha$, $\alpha > 0$ *étant fixé, et posons* $\gamma_i = (\alpha-\beta_i)^{-1}$. *Il existe une* *constante C ne dépendant que de N, α, β_i telle que*

$$0 \leqq Z^{\alpha} \leqq \sum_{i=1}^{N} a_i Z^{\beta_i}$$

entraîne

$$Z \leqq C \sum_{i=1}^{N} (a_i)^{\gamma_i}$$

Le résultat suivant, sur la différentiation de fonctions composées, est démontré dans STAMPACCHIA [18] :

LEMME 1.2. — *Soit G une fonction de R dans R, lipschitzienne, continûment dérivable par morceaux, dont la dérivée n'admet qu'un nombre fini de discontinuités. Alors, si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $G \circ u \in W^{1,1}$ et, presque partout dans Ω :*

$$\frac{\partial}{\partial x}(G \circ u) = G'(u) . \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Démonstration du théorème 1. — Notons $B(\rho)$ la boule $B(x, \rho)$ $(0 < \rho \leqq R')$ concentrique à $B(x, R')$, contenue dans Ω. Les majorations (1.1) et l'injection

$$W^{1,1}(\Omega) \subsetneq L^{n/(n-1)}(\Omega) \quad (cf. \text{ LIONS } [9])$$

font que l'égalité (1.3) est vraie pour tout $\Phi \in W_0^{1,1}(\Omega)$. A partir de la solution faible u de (1.2), nous construisons une famille à trois paramètres de fonctions test Φ que l'on porte dans (1.3).

1° Posons

$$\bar{u} = |u| + k, \qquad k = \| g \|_{n/(1-\varepsilon)}, \qquad \bar{c} = c + \frac{g}{k}.$$

On a alors, d'après (1.1) :

$$(1.5) \quad p . \mathscr{A}(x, u, p) \geqq |p| - \bar{c} |\bar{u}|; \qquad \| \bar{c} \|_{n/(1-\varepsilon)} \leqq \| c \|_{n/(1-\varepsilon)} + 1 < +\infty.$$

Soient $q \geqq 1$ et $l > k$ deux paramètres, F et G les deux fonctions continûment différentiables et lipschitziennes de $]k, +\infty[$ dans R et de R dans R, respectivement, définies par

$$(1.6) \qquad F(t) = \begin{cases} t^q & \text{si } k \leqq t \leqq l, \\ q l^{q-1} - (q-1) l^q & \text{si } l \leqq t. \end{cases}$$

$$G(t) = \text{signe}(t) . [F(|t| + k) - k^q].$$

En appliquant le lemme 1.2, on obtient les relations valables presque partout dans Ω :

$$(1.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} G(u) = F'(\bar{u}).\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}; & \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial |u|}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right|, \\ G(u) \leqq F(\bar{u}); & \bar{u} F'(\bar{u}) \leqq q F(\bar{u}). \end{cases}$$

Soit maintenant η une fonction de $\mathscr{D}(B(R'))$, $\eta \geqq 0$; $\Phi(x) = \eta(x).G(u(x))$ est dans $W_0^{1,1}(B(R'))$ d'après le lemme 1.2, et on peut porter Φ dans (1.3).

2° *Majorations préliminaires.* — Le lemme 1.2 permet de travailler « ponctuellement »; les inégalités suivantes sont valables presque partout dans Ω.

$$\nabla\Phi.\mathscr{A}(x, u, \nabla u) + \Phi\mathscr{B}(x, u, \nabla u) = (\eta G')\nabla u.\mathscr{A} + G\nabla\eta.\mathscr{A} + \eta G\mathscr{B}.$$

(1.1) et (1.5) entraînent

$$\nabla\Phi.\mathscr{A} + \Phi\mathscr{B} \geqq \eta G'|\nabla u| - \bar{c}\eta G'(\bar{u}) - b\eta|G| - |\nabla\eta G|a.$$

Comme $G'(u) = F'(\bar{u}) > 0$, en posant $v = F(\bar{u}(x))$, il vient, avec (1.7) :

$$\nabla\Phi.\mathscr{A} + \Phi\mathscr{B} \geqq |\eta\nabla v| - (q\bar{c} + b)\eta v - a|\nabla\eta v|.$$

En intégrant terme à terme dans Ω, (1.3) montre que

$$\int_{B(R')} |\eta\nabla v|\,dx \leqq \int_{B(R')} (q\bar{c} + b)\eta v\,dx + \int_{B(R')} a|\nabla\eta v|\,dx.$$

L'inégalité de Hölder et le théorème de Sobolev permettent d'écrire les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{B(R')} \bar{c}\eta v\,dx &= \int_{B(R')} \bar{c}(\eta v)^{\varepsilon}(\eta v)^{1-\varepsilon}\,dx \\ &\leqq \|\bar{c}\|_{n/(1-\varepsilon), R'} \|\eta v\|_{1, R'}^{\varepsilon} \|\eta v\|_{n/(n-1), R'}^{1-\varepsilon} \\ &\leqq K(n)\|\bar{c}\|_{n/(1-\varepsilon)} \|\eta v\|_{1, R'}^{\varepsilon} \|\nabla(\eta v)\|_{1, R'}^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Les autres termes se majorent aisément, et finalement,

$$\begin{aligned} \|\eta\nabla v\|_{1, R'} &\leqq K(\varepsilon, n, \|b\|, \|\bar{c}\|)q \\ &\quad \times \|\eta v\|_1^{\varepsilon}(\|(\nabla\eta)v\|_1^{1-\varepsilon} + \|\eta\nabla v\|_1^{1-\varepsilon}) + \|a\|_{\infty}\|(\nabla\eta)v\|_1. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant le lemme 1.1 qui donne

$$\|\eta\nabla v\|_{1, R'} \leqq K q^{1/\varepsilon}\{\|(\nabla\eta)v\|_1 + \|\eta v\|_1\},$$

comme $q \geqq 1$,

(1.8) $\quad \| \eta v \|_{n/(n-1), R'} \leqq C \| \nabla (\eta v) \|_1 \leqq K' q^{1/\varepsilon} [\| (\nabla \eta) v \|_1 + \| \eta v \|_1]$.

3° Nous achevons à présent la démonstration du théorème en faisant varier convenablement les paramètres, et en utilisant la technique des boules emboîtées pour nous ramener à la seule hypothèse : $u \in L^1(\Omega)$. Notons B_h ($1 \leqq h \leqq 2$) la boule de centre x et de rayon $R' + (h-2)(R'-R)$; $R_1 = \min(1, R'-R)$.

Si $1 \leqq h' < h \leqq 2$, on peut trouver $\eta \in \mathcal{D}(B(R'))$ tel que

$$\begin{cases} \eta = 1 & \text{pour } x \in B_{h'} \\ \eta = 0 & \text{pour } x \notin B_h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leqq \eta \leqq 1, \\ \max |\nabla \eta| \leqq 2(R'-R)^{-1}(h-h')^{-1}. \end{cases}$$

(1.8) entraîne alors :

$$\| v \|_{n/(n-1), B_{h'}} \leqq K q^{1/\varepsilon} R_1^{-1} (h-h')^{-1} \| v \|_{1, B_h}.$$

Lorsque $l \to +\infty$, v converge en croissant vers $\bar{u}^q$, et le théorème de convergence monotone montre que

(1.9) $$\| \bar{u} \|_{qn/(n-1), B_{h'}} \leqq [K R_1^{-1}]^{1/q} [h-h']^{-1/q} q^{1/\varepsilon q} \| u \|_{q, B_h},$$

que les quantités ci-dessus soient finies ou non. Nous construisons maintenant une suite de boules emboîtées comprises entre $B(R)$ et $B(R')$:

Pour tout entier ν, on pose

$$q_\nu = \left[\frac{n}{n-1} \right]^\nu = \beta^\nu \qquad \text{et} \qquad h_\nu = 1 + 2^{-\nu};$$

on fait, dans (1.9), $h = h_\nu$, $h' = h_{\nu+1}$, ce qui donne

$$\| \bar{u} \|_{q_{\nu+1}, B_{h_{\nu+1}}} \leqq [K R_1^{-1}]^{1/\beta^\nu} (2 B^{1/\varepsilon})^{\nu/\beta^\nu} \| \bar{u} \|_{q_\nu, B_{h_\nu}}.$$

Les séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1/\beta^\nu)$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu/\beta^\nu)$ convergent, car $\beta > 1$, et on obtient en multipliant terme à terme ces inégalités :

$$\forall \nu \in N, \qquad \| \bar{u} \|_{q_\nu, B(R)} \leqq \| \bar{u} \|_{q_\nu, B_{h_\nu}} \leqq K R_1^{-n} \| \bar{u} \|_{1, B(R')} < +\infty.$$

Ensuite, on fait tendre ν vers l'infini, q_ν tend vers l'infini, et

$$\| \bar{u} \|_{\infty, B(R)} = \lim_{\nu \to \infty} \| \bar{u} \|_{q_\nu, B(R)} \leqq K R_1^{-n} (\| u \|_{1, B(R')} + k(R')^n).$$

Le théorème est donc démontré.

2. Solutions généralisées du problème des surfaces minimales

Comme il a été dit dans l'introduction, nous nous proposons d'appliquer ici les résultats du paragraphe 1 à l'étude des solutions généralisées du problème des surfaces minimales, lorsque la donnée frontière est la trace d'une fonction $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$ (alors que, dans [21], R. Temam considère le même problème avec $\Phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$). Le début du paragraphe est consacré à des rappels d'analyse convexe, que nous présentons dans un cadre emprunté à R. Temam [20]. Nous rappelons ensuite la définition des solutions généralisées du problème des hypersurfaces minimales et leurs premières propriétés. Nous étudions enfin l'existence d'une solution généralisée du problème des surfaces minimales pour des données frontière non bornées : $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$.

Par des méthodes totalement différentes, de Giorgi obtient des solutions généralisées pour le problème des surfaces minimales, et démontre des résultats analogues aux nôtres (*cf.* de Giorgi [1], M. Miranda [10]).

Dualité en analyse convexe. — Soient V et Y deux espaces de Banach réels, V^* et Y^* leurs duaux topologiques munis des topologies faibles $\sigma(V^*, V)$ et $\sigma(Y^*, Y)$ respectivement. Si F et G sont deux fonctionnelles convexes, semi-continues inférieurement et propres de V dans $]-\infty, +\infty]$ et de Y dans $]-\infty, +\infty]$, on rappelle que les fonctions conjuguées F^* et G^* sont aussi convexes, semi-continues inférieurement et propres. Soit enfin un opérateur linéaire continu L de V dans Y d'adjoint L^*. Nous nous intéressons au problème de minimisation sur V :

$$(\mathrm{P}) \qquad \inf_{u \in V} \{ F(u) + G(Lu) \} \quad (^2).$$

A ce problème « primal » correspond le problème « dual » :

$$(\mathrm{P}^*) \qquad \sup_{p^* \in Y^*} \{ -F^*(L^* p^*) - G^*(-p^*) \} \quad (^2).$$

Dans toute la suite, nous supposons $\inf \mathrm{P} > -\infty$, on a alors le résultat suivant (*cf.* R. T. Rockafellar [14], R. Temam [20]) :

Lemme 2.1. — *On suppose qu'il existe u_0 dans V tel que $F(u_0) < +\infty$ et que G soit finie et continue en $L u_0$ (hypothèse de qualification). Alors*

$$\inf \mathrm{P} = \max \mathrm{P}^*,$$

(2) Nous noterons inf P (resp. sup P*) ces extremums.

et les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\bar{u}$ (resp. $\bar{p}^*$) *est solution du problème* P (resp. P*);

(ii) $\bar{u} \in \partial F^* (L^* \bar{p}^*)$ *et* $L\bar{u} \in \partial G^* (-\bar{p}^*)$.

Pour cette raison, les relations (ii) sont dites « *Relations d'extrémalité* ».

Solutions généralisées du problème des surfaces minimales. — Pour appliquer ces résultats au problème des surfaces minimales, nous choisissons [Φ est un élément fixé de $W^{1,1}(\Omega)$] :

$$V = W^{1,1}(\Omega); \qquad Y = (L^1(\Omega))^n; \qquad L = \nabla : \text{gradient}$$

$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u|_{\partial\Omega} = \Phi|_{\partial\Omega}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \qquad G(p) = \int_\Omega \sqrt{1+|p|^2}\, dx.$$

Notre problème « primal » P est alors :

$$(\mathrm{P}_\Phi) : \quad \inf_{u \in W^{1,1}(\Omega);\, u|_{\partial\Omega} = \Phi|_{\partial\Omega}} \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx;$$

il lui correspond le problème « dual » :

$$(\mathrm{P}^*_\Phi) : \quad \sup_{p^* \in Y^*;\, \operatorname{div} p^* = 0;\, |p^*| \leq 1 \text{ p.p.}} \left\{ -\int_\Omega p^* . \nabla \Phi\, dx + \int_\Omega \sqrt{1-|p^*|^2}\, dx \right\}.$$

D'après le lemme 2.1 et la stricte concavité de la fonctionnelle maximisée en P^*_Φ, *le problème dual admet une solution unique* $\tilde{p}^*_\Phi$. Si $\tilde{u}$ est solution de P_Φ, on a les relations d'extrémalité

$$(2.1) \qquad |\tilde{p}^*_\Phi| < 1 \quad \text{p.p. } \Omega, \qquad \nabla \tilde{u} = \frac{-\,p^*_\Phi}{\sqrt{1-|\tilde{p}^*|^2}} \quad \text{p.p. } \Omega,$$

$$(2.2) \qquad u|_{\partial\Omega} = \Phi|_{\partial\Omega}.$$

En [21], R. TEMAM montre que, si $\Phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, la solution $\tilde{p}^*_\Phi$ de P^*_Φ vérifie la condition de régularité suivante :

(2.3) *Pour tout ouvert K, relativement compact dans* Ω, *on peut trouver un réel* $\eta(K) > 0$ *tel que :*

$$|\tilde{p}^*_\Phi| < 1 - \eta(K) \quad \textit{presque partout dans } K,$$

et on déduit que les suites minimisantes de P_Φ convergent, en un sens faible, vers une fonction $\bar{u}$ de $W^{1,1}(\Omega)$ qui vérifie l'équation (1) dans Ω ainsi que la relation d'extrémalité (2.1).

L'unicité de $\tilde{p}_\Phi^*$ nous permet de définir les solutions généralisées de P_Φ de la manière suivante :

DÉFINITION. — *$\tilde{u}$ est solution généralisée du problème* P_Φ *si* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *et vérifie la relation d'extrémalité* (2.1).

Remarque. — Les solutions généralisées de P_Φ sont ainsi définies à une constante additive près, et vérifient l'équation d'Euler des surfaces minimales (1), comme le montrent (2.1) et la relation $\operatorname{div} \tilde{p}_\Phi^* = 0$.

Le lemme 2.1 assure, de plus, que lorsque le problème P_Φ admet une solution, celle-ci coïncide avec une solution généralisée.

Le lemme suivant (*cf.* [21], [8]) précise le comportement des suites minimisantes, et lie la question de l'existence de solutions généralisées à la « régularité » de la solution $\tilde{p}_\Phi^*$ du problème dual.

LEMME 2.2. — *Supposons que, pour un* Φ *donné,* $\tilde{p}_\Phi^*$ *vérifie* (2.3), *alors :*

(i) P_Φ *admet une solution généralisée, unique à une constante additive près, dont un représentant au moins vérifie*

$$\| \tilde{u}_\Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqq C(\| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}).$$

(ii) *Pour toute suite minimisante* $(v_m)_{m \in N}$ *de* P_Φ, v_m *tend vers* $\tilde{u}_\Phi$ *dans* $L^1(\Omega)/R$; ∇v_m *tend vers* $\nabla \tilde{u}_\Phi$ *dans* $(L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^n$.

Remarque. — Réciproquement, l'existence d'une solution généralisée dans $W^{1,1}(\Omega)$ entraîne que $\tilde{p}_\Phi^*$ vérifie la condition de régularité (2.3). Ceci est conséquence du théorème 1 et d'une majoration du gradient des solutions bornées de l'équation des surfaces minimales (1) (*cf.* DE GIORGI, LADYŽENSKAJA-URAL'CEVA [7]).

Existence de solutions généralisées. — Nous allons montrer l'existence d'une solution généralisée dans le cas où Φ est seulement dans $W^{1,1}(\Omega)$. Nous utiliserons le résultat analogue établi, dans le cas $\Phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, par R. TEMAM [21], qui permet, en particulier, d'appliquer le lemme 2.2. Nous approchons Φ par une suite $(\Phi_n)_{n \in N}$ de fonctions de $W^{1,1}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$: les problèmes P_{Φ_n} correspondants admettent des solutions généralisées : $\tilde{u}_n$ (*cf.* [21] et [8]). Un résultat de « stabilité » pour ces solutions généralisées nous permet enfin d'obtenir une solution généralisée de P_Φ : $\tilde{u}_\Phi$ comme limite, en un sens faible, des $\tilde{u}_n$.

Dans ce paragraphe, les résultats d'existence et d'estimation *a priori* pour les surfaces minimales dans des ouverts réguliers et convexes jouent un rôle essentiel (*cf.* DE GIORGI, M. MIRANDA [11]; SERRIN [16] et TRUDINGER [22]). Ils nous permettent d'obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Si* $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$, *le problème* P_Φ *admet une solution généralisée* $\tilde{u}_\Phi$, *unique, à une constante additive près, telle que*

(i) *pour un au moins de ses représentants* $\tilde{u}_\Phi$ *;*

$$\| \tilde{u}_\Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqq C(\| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)});$$

(ii) $\tilde{u}_\Phi$ *est solution de l'équation d'Euler des surfaces minimales* (1) *;*

(iii) *Pour toute suite minimisante* $(v_m)_{m \in N}$ *de* P_Φ, v_m *tend vers* $\tilde{u}_\Phi$ *dans* $L^1(\Omega)/R$, ∇v_m *tend vers* $\nabla \tilde{u}_\Phi$ *dans* $(L^1_{\text{loc}}(\Omega))^n$.

Remarques. — 1° Une démonstration analogue à celle du théorème 2 fournit le résultat de « stabilité » suivant :

Soit $(\Phi_i)_{i \in N}$ *une suite de fonctions de* $W^{1,1}(\Omega)$ *tendant vers* Φ *dans* $W^{1,1}(\Omega)$, *la suite* $(\tilde{u}_{\Phi_i})_{i \in N}$ *des solutions généralisées des problèmes* P_{Φ_i} *tend vers* $\tilde{u}_\Phi$ *et, plus précisément,*

$$\tilde{u}_{\Phi_i} \text{ tend vers } \tilde{u}_\Omega \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)/R;$$
$$\nabla \tilde{u}_{\Phi_i} \text{ tend vers } \nabla \tilde{u}_\Phi \quad \text{dans} \quad (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^n.$$

2° Lorsque Ω est assez régulier, on peut définir un opérateur de trace $\gamma_0 : W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$, qui est surjectif d'après E. GAGLIARDO [4]. La donnée de Φ dans $W^{1,1}(\Omega)$ équivaut alors à la donnée de $\gamma_0 \Phi = \Phi \in L^1(\partial\Omega)$, car il est aisé de voir sur la formulation de P_Φ que seule la valeur au bord φ de Φ intervient effectivement. *Ainsi le théorème* 2 *établit l'existence d'une solution généralisée dans* $W^{1,1}(\Omega)$, *pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation des surfaces minimales, pour toute donnée au bord dans* $L^1(\partial\Omega)$; cadre qui paraît assez naturel.

3° Dans le cas d'un ouvert non régulier, nos méthodes permettent d'établir l'existence d'une solution généralisée pour le problème P_Φ, où Φ est donnée dans $\mathscr{W}^{1,1}(\Omega)$, adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,1}(\Omega)$.

Démonstration du théorème 2. — On peut trouver une suite $(\Phi_i)_{i \in N}$ d'éléments de $C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,1}(\Omega)$ qui tend vers Φ dans $W^{1,1}(\Omega)$ et telle que pour tout i dans N :

$$\| \Phi_i \|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqq 1 + \| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Notons P_{Φ_i} : P_i et $\tilde{p}_i^*$ la solution de P_i^*. Les problèmes P_i admettent des solutions généralisées $\tilde{u}_i$ (*cf.* [21], [8] et lemme 2.2) vérifiant la majoration

$$\| \tilde{u}_i \|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqq C(\| \Phi_i \|_{W^{1,1}(\Omega)}) \leqq C'(\| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}).$$

(α) *Majorations* a priori. — Les $\tilde{u}_i$ étant solution de l'équation d'Euler des surfaces minimales (1) [qui vérifie les hypothèses (1.1)], le théorème 1 montre que, dans tout ouvert K relativement compact dans Ω,

$$\| \tilde{u}_i \|_{\infty, K} \leqq C(K, \| \tilde{u}_i \|_{1, \Omega}) \leqq C'(K, \| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}).$$

Les estimations *a priori* du gradient de solutions bornées de l'équation (1) entraînent (*cf.* DE GIORGI ; LADYŽENSKAJA et URAL'CEVA [7], TRUDINGER [22]) :

Pour tout ouvert $K' \subset\subset K \subset\subset \Omega$ et tout i dans N,

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \| \nabla \tilde{u}_i \|_{\infty, K'} \leqq C(K, K', \| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}), \\ \| \tilde{u}_i \|_{H^2(K')} \leqq C_1(K, K', \| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)}). \end{cases}$$

D'après la formulation du problème dual, on a la majoration

$$(2.5) \qquad | \tilde{p}_i | \leqq 1 \quad \text{p.p. } \Omega.$$

(β) *Passage à la limite dans le problème dual.* — L'estimation (2.5) montre, qu'en extrayant au besoin une sous-suite, on peut supposer $\tilde{p}_i^* \to \Pi \in (L^\infty(\Omega))^n$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$; si bien que $\tilde{p}_i^* \to \Pi$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, et que div $\Pi = 0$.

D'après sa définition, la fonctionnelle G^* :

$$\begin{cases} G^*(p^*) = -\int_\Omega \sqrt{1 - |p^*|^2}\, dx & \text{si } |p^*| \leqq 1 \text{ p.p. } \Omega \\ \qquad = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est semi-continue inférieurement pour la topologie $\sigma((L^\infty(\Omega))^n, (L^1(\Omega))^n)$. En notant $\tilde{p}_\Phi^*$ la solution de P_Φ^*, il vient, les $\tilde{p}_i^*$ étant solution de P_i^*,

$$-\int_\Omega \sqrt{1 - |\tilde{p}_i^*|^2}\, dx + \int_\Omega p_i . \nabla \Phi_i \, dx \leqq -\int_\Omega \sqrt{1 - |\tilde{p}_\Phi^*|^2}\, dx + \int_\Omega \tilde{p}_\Phi^* . \nabla \Phi_i \, dx.$$

Comme $|\tilde{p}_i^*| \leqq 1$ presque partout dans Ω, $G^*(p_i^*) < +\infty$, et

$$\begin{aligned} G^*(\Pi) &\leqq \liminf_{i \to \infty} \{ G^*(\tilde{p}_i^*) \} \\ &\leqq -\int_\Omega \sqrt{1 - |\tilde{p}_\Phi^*|^2}\, dx + \lim_{i \to \infty} \int_\Omega (\tilde{p}_\Phi^* - \tilde{p}_i^*) . \nabla \Phi_i \, dx \\ G^*(\Pi) &\leqq -\int_\Omega \sqrt{1 - |\tilde{p}_\Phi^*|^2}\, dx + \int_\Omega (\tilde{p}_\Phi^* - \Pi) . \nabla \Phi \, dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que $|\Pi| \leqq 1$ p. p. Ω, car $G^*(\Pi) < +\infty$, et que $\Pi = p^*_\Phi$, d'après l'unicité de la solution de P^*_Φ.

Cette propriété d'unicité entraîne que c'est la suite (p^*_i) tout entière qui converge faiblement vers p^*_Φ.

(γ) *Convergence des solutions généralisées.* — On peut trouver une suite de boules $(B_i)_{i\in N}$ telles que, pour tout i, $B_i \subset\subset \Omega$, et que $\bigcup_{i\in N} B_i = \Omega$, si bien qu'en utilisant les majorations (2.4), il est possible d'extraire (par le procédé de la diagonale), une sous-suite [toujours notée $(\tilde{u}_i)$], telle que $\tilde{u}_i \to \tilde{u}_\Phi$ dans $L^1(\Omega)$, $\nabla \tilde{u}_i \to \nabla u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, et presque partout dans Ω.

La relation d'extrémalité (2.1) s'écrit :

$$\tilde{p}^*_i = -\frac{\nabla \tilde{u}_i}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{u}_i|^2}} \quad \text{p.p. } \Omega.$$

Le théorème de convergence dominée entraîne que, dans $\mathscr{D}'(\Omega)$:

$$\tilde{p}^*_i \to -\frac{\nabla \tilde{u}_\Phi}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}};$$

$\mathscr{D}'(\Omega)$ étant séparé :

$$\tilde{p}^*_\Phi = \frac{-\nabla \tilde{u}_\Phi}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{u}_\Phi|^2}}. \tag{2.6}$$

Finalement, la majoration (2.3) provient de l'estimation (2.4) sur $\nabla \tilde{u}_i$. On achève la démonstration en utilisant le lemme 2.2.

Remarques. — 1° L'égalité (2.6) montre que u est une solution généralisée. L'unicité à une constante près de $\tilde{u}_\Phi$ entraîne que c'est la suite $(u_i)_{i\in N}$ tout entière qui converge :

$$\tilde{u}_i \to \tilde{u}_\Phi \quad \text{dans } L^1(\Omega)/R; \qquad \nabla \tilde{u}_i \to \nabla \tilde{u}_\Phi \quad \text{dans } (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^n.$$

2° En appliquant successivement le théorème 1 et les majorations de LADYŽENSKAJA-URAL'CEVA [7], on obtient les estimations : pour tout ouvert K relativement compact dans Ω :

$$\|\tilde{u}_\Phi\|_{\infty, K} + \|\nabla \tilde{u}_\Phi\|_{\infty, K} \leqq C(K, \|\Phi\|_{W^{1,1}(\Omega)}).$$

3° L'unicité et le comportement à la frontière des solutions généralisées qui semblent être liés seront repris dans un travail ultérieur. Précisons toutefois, à ce sujet, les points suivants :

(i) Vérifier que $\tilde{u}_\Phi = \Phi$ sur toute la frontière $\partial\Omega$ revient à montrer l'existence de solutions pour le problème P_Φ. A moins de faire des hypothèses

« géométriques » sur l'ouvert Ω : convexité, courbure moyenne du bord positive, on peut montrer que le problème P_Φ, n'admet pas nécessairement de solution même pour des données au bord très régulières (*cf.* J. SERRIN [16]). On trouvera de nombreuses conditions suffisantes pour l'existence de solutions dans G. STAMPACCHIA [19], M. MIRANDA [10] et [11] ainsi que dans J. SERRIN [16].

(ii) En [21], R. TEMAM donne une condition *a posteriori* sur $\tilde{u}_\Phi$ pour que $\tilde{u}_\Phi = \Phi$ sur une partie Γ de la frontière $\partial\Omega$ d'un ouvert Ω *non nécessairement « convexe »*. Ceci entraîne l'unicité de la solution généralisée dans ce cas.

3. **Une généralisation**

Les résultats que voici étendent ceux de R. TEMAM [21] en cas Φ quelconque dans $W^{1,1}(\Omega)$, et concernent une classe de problèmes de calcul des variations de la forme

$$(\mathscr{P}_\Phi) : \quad \inf_{u=\Phi \,\text{sur}\, \partial\Omega} \int_\Omega g(x, u, \nabla u)\, dx.$$

Nous faisons sur g les hypothèses de [21] (*cf.* aussi [7]), si bien que le problème $\mathscr{P}_\Phi$ est du « type hypersurfaces minimales ». La démonstration du théorème suivant, développée dans [8] est semblable à celle du paragraphe 2. Deux hypothèses nous sont nécessaires, en plus de celles de [21] : l'une permet d'obtenir une majoration semblable à la majoration (2.5), l'autre permet d'appliquer le théorème 1.

HYPOTHÈSES. — En plus des hypothèses (4.1 à 4.11, 4.12 à 4.14, 4.21 à 4.23) de [21], nous supposons

(H 1) *Pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes positives $(\mu_i)_{i=1,5}$ telles que, pour tout (x, u, ξ) dans $\Omega \times R \times R^n$:*

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, u, \xi)\right| \leqq \mu_1; \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial u}(x, u, \xi)\right| \leqq \mu_2,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, u, \xi)\xi_i \geqq \mu_2|\xi| - \mu_3|u| - \mu_4; \qquad \mu_3 > 0.$$

et

(H 2) *Il existe des constantes positives $(C_i)_{i=1,4}$ telles que, pour tout (x, u, ξ) dans $\Omega \times R \times R^n$, on ait*

$$C_1 > 0, \qquad C_1|\xi| - C_2 \leqq g(x, u, \xi) \leqq C_3(|\xi| + |u|) + C_4.$$

Sous ces hypothèses, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Si* $\Phi \in W^{1,1}(\Omega)$, *le problème* P_Φ *admet une solution généralisée* $\tilde{u}_\Phi$ *unique à une constante additive près, telle que :*

(i) *pour un représentant au moins* $\| \tilde{u}_\Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqq C(\| \Phi \|_{W^{1,1}(\Omega)})$;

(ii) $\tilde{u}_\Phi$ *est solution de l'équation d'Euler associée au problème* P_Φ *dans* Ω;

(iii) *pour toute suite minimisante* $(v_m)_{m \in N}$ *de* P_φ, *on a*

$$v_m \text{ tend vers } \tilde{u}_\Phi \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)/R;$$
$$\nabla v_m \text{ tend vers } \nabla \tilde{u}_\Phi \quad \text{dans} \quad (L^1_{\text{loc}}(\Omega)^n).$$

Remarque. — Si on considère une suite (Φ_i) tendant vers Φ dans $W^{1,1}(\Omega)$, la suite des solutions généralisées correspondantes converge vers une solution généralisée de $(\mathscr{P}_\Phi)$ (*cf.* [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOMBIERI (E.), DE GIORGI (E.) et MIRANDA (M.). — Una maggiorazione *a priori* relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, *Arch. rat. Mech. and Anal.*, t. 32, 1969, p. 255-267.

[2] BRONSTED (A.) et ROCKAFELLAR (R. T.). — On the subdifferentiability of convex functions, *Proc. Amer. Math. Sc.*, t. 16, 1965, p. 605-611.

[3] EKELAND (I.) et TEMAM (R.). — *Analyse convexe et problèmes variationnels.* — Paris, Dunod-Bordas, 1974.

[4] GAGLIARDO (E.). — Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in *n*-variabili, *Rend. Sem. Mat. Padova*, t. 27, 1957, p. 284-305.

[5] KRASNOLSELSK'IJ (M. A.). — *Topological methods in the theory of non-linear integral equations.* — Oxford, Pergamon Press, 1964 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 45).

[6] LADYŽENSKAJA (O. A.) et URAL'CEVA (N. N.). — *Linear and quasilinear elliptic equations.* — New York, Academic Press, 1968 (*Mathematics in Science and Engineering*, 46).

[7] LADYŽENSKAJA (O. A) et URAL'CEVA (N. N.). — Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 23, 1970, p. 677-703.

[8] LICHNEWSKY (A.). — Principe du maximum local et solutions généralisées de problèmes du type hypersurface minima, Thèse 3e cycle, Univ. Paris-Sud Orsay, 1973.

[9] LIONS (J. L.). — *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.* — Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1962 (*Séminaire de Mathématiques supérieures.* Été 1962, 1).

[10] MIRANDA (M.). — Existence and regularity of hypersurfaces of R^n with prescribed mean curvature, « *Partial differential equations. Proceedings of the symposium held at Berkeley*, 1971 », p. 1-9. — Providence, American mathematical Society, 1973 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 23).
[11] MIRANDA (M.). — Un teorema di esistenza e unicita per il problema dell'area minima in n variabili, *Ann. Scuola. norm. sup.* Pisa, t. 19, 1965, p. 233-249.
[12] MOREAU (J. J.). — Weak and strong solutions of dual problems, « *Contributions to non-linear functional analysis*. Proceedings of a symposium, held at Madison, 1971 ». — New-York, Academic Press, 1971.
[13] ROCKAFELLAR (R. T.). — Integrals which are convex functionnals, *Pacific J. of Math.*, t. 24, 1968, p. 525-529; et t. 39 p. 439-469, 1971.
[14] ROCKAFELLAR (R. T.). — *Convex analysis*. — Princeton, Princeton University Press, 1970 (*Princeton mathematical Series*, 28).
[15] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*. Nouvelle édition. — Paris, Hermann, 1966 (*Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 9-10).
[16] SERRIN (J.). — The Problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.*, t. A. 264, 1969, p. 413-496.
[17] SERRIN (J.). — Local behaviour of quasilinear equations, *Acta Math.*, Uppsala, t. 111, 1964, p. 247-302.
[18] STAMPACCHIA (G.). — *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. — Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1966, *Séminaire de mathématiques supérieures*. Été 1965, 16).
[19] STAMPACCHIA (G.). — On some regular multiple integral problems in the calculus of variations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 16, 1963, p. 383-421.
[20] TEMAM (R.). — *Calcul des variations*, Cours de 3e cycle, Université d'Orsay, 1970/71 (*Publications mathématiques d'Orsay*).
[21] TEMAM (R.). — Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurfaces minimales, *Arch. rat. Mech. and Anal.*, t. 44, 1971, p. 121-156.
[22] TRUDINGER (N. S.). — On the analicity of generalized minimal surfaces, *Bull. Austral. math. Soc.*, t. 5, 1971, p. 315-320.

(Texte reçu le 18 mars 1974.)

Alain LICHNEWSKY,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques, Bât. 425,
Campus universitaire,
91405 Orsay.