BULLETIN DE LA S. M. F.

SERGE ALINHAC

Problèmes de Cauchy pour des opérateurs singuliers

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 289-315

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__289_0>

Bull. Soc math. France,
102, 1974, p. 289-315.

PROBLÈMES DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS SINGULIERS

PAR

Serge ALINHAC

RÉSUMÉ. — L'article étudie le problème de Cauchy unilatéral pour des opérateurs présentant une singularité sur la surface initiale. On indique des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution, le second membre de l'équation et la solution elle-même étant pris dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables « plates » sur la surface initiale.

La nécessité de caractéristiques réelles et d'une singularité de type « fuchsien » est établie, lorsqu'on suppose réalisée l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans un certain domaine. Les opérateurs « fuschiens » et les systèmes du 1er ordre singuliers qui leurs correspondent généralisent par leur forme les équations différentielles « du type de Fuchs »; ceux d'entre eux qui sont hyperboliques (en un sens convenable) fournissent les cas favorables pour le problème de Cauchy envisagé. Le modèle le plus simple en est l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux.

Introduction

Cet article étudie le problème de Cauchy unilatéral pour une surface initiale multiplement caractéristique.

La surface initiale ayant pour équation $t = 0$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$, les opérateurs étudiés sont de la forme

$$P \equiv t^k D_t^m + \sum_{l+|\beta| \leq m,\, l<m} a_{l,\beta}(x,t)\, t^{\nu_{l,\beta}} D_t^l D_x^\beta,$$

où les coefficients $a_{l,\beta}$ sont complexes et réguliers, tandis que $\nu_{l,\beta}$ et k sont des réels non négatifs. Dans cette situation, le problème de Cauchy sous sa forme habituelle, avec m données initiales, n'est pas, en général, bien posé, que les données soient C^∞ ou analytiques en x (*cf.* par exemple [1], [3]).

On considère ici, pour P, la propriété plus faible suivante :

(i) Il existe un voisinage D de l'origine dans le demi-espace supérieur $\overline{H}$ tel que, pour toute $f \in C^\infty(D)$, plate sur $t = 0$, il existe un unique $u \in C^\infty(D)$, plat sur $t = 0$, tel que $Pu = f$.

(ii) Pour tout voisinage V de l'origine dans $\overline{H}$, et toute $u \in C^\infty(V)$, plate sur $t = 0$, telle que $Pu = 0$, alors $u = 0$ dans V.

Si un opérateur P possède les propriétés (i) et (ii), on dit que le problème de Cauchy plat est bien posé.

L'étude distingue essentiellement deux cas :

1° Un cas dit « *fuchsien* » (selon la définition introduite par BAOUENDI et GOULAOUIC dans [3]), qui est celui où les poids $l-v_{l,\beta}$ des termes $t^{v_{l,\beta}} D_t^l D_x^\beta$ sont moindres que $m-k$.

2° Un cas dit « *sans propagation* », où P_m est non fuchsien et où les termes d'ordre $m-1$ sont de peu de poids. Cette distinction a un fondement géométrique qui apparaît bien à deux variables lorsque P est homogène et à caractéristiques réelles; le cas 1° est celui où toutes les branches de caractéristiques partent de la surface initiale vers le demi-plan $t > 0$; on conçoit qu'on ait alors « propagation » des données. Le cas 2° est celui où une caractéristique qui rencontre la surface initiale y est tout entière contenue, en sorte que les caractéristiques, disposées « parallèlement » à celle-ci, ne peuvent assurer aucune « propagation ».

Le premier cas est analogue au cas non caractéristique : pour que le problème de Cauchy plat soit bien posé, il est nécessaire que les caractéristiques de P soient réelles (au moins celles qui sont simples), et cela est suffisant si elles sont de plus assez régulières (par exemple, de multiplicité constante). Les énoncés précis correspondants font l'objet des théorèmes I.3 et I.4 (*c*).

Dans le second cas en revanche, peu importe que les caractéristiques soient réelles ou non : le problème de Cauchy plat est toujours mal posé.

Le rôle des termes d'ordre inférieur, lorsqu'il n'est pas négligeable, est esquissé à l'aide d'exemples. Néanmoins, les phénomènes observés sont instables, et aucun résultat d'ensemble n'est fourni.

I. Le problème de Cauchy plat et la nécessité des caractéristiques réelles

1. Définitions; Notations

(*a*) Soient H le demi-espace ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, défini par

$$H = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}, t > 0\},$$

et D un voisinage de l'origine dans $\overline{H}$.

On considère dans D un opérateur différentiel $P(x, t, \partial/\partial x, \partial/\partial t)$, d'ordre m, dont les coefficients sont $C^\infty(D \cap H)$, à valeurs complexes, et tel qu'en tout point $P_0 = (x_0, t_0)$ de $D \cap H$, la direction de l'axe des t est non caractéristique pour P. On note $C_p^\infty(D)$ l'espace des $f \in C^\infty(D)$ tels que f et toutes ses dérivées s'annulent sur $t = 0$ (f est dite « plate » sur $t = 0$).

(*b*) *Problème envisagé :*

DÉFINITION. — On dira que le problème de Cauchy plat est bien posé avec unicité pour P dans un domaine Ω, voisinage de O dans $\overline{H}$, si

(i) Pour tout $f \in C_p^\infty(\Omega)$, il existe un unique $u \in C_p^\infty(\Omega)$ tel que $Pu = f$.

(ii) Pour tout voisinage V de O dans $\overline{H}$, $V \subset \Omega$, et tout $u \in C_p^\infty(V)$, tel que $Pu = 0$, alors $u \equiv 0$ dans V.

On va étudier des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe $\Omega \subset D$ pour lequel (i) et (ii) ont lieu.

2. Une inégalité nécessaire

LEMME I.2. — *Supposons qu'il existe un compact K, voisinage de* 0 *dans $\overline{H}$, $K \subset D$ tel que le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé dans K pour P. Il existe alors un entier $k(K)$, et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $u \in C_p^\infty(K)$,*

$$\sup_K |u| \leqq C \sum_{|\alpha| \leqq k} \sup_K |D^\alpha P u| = C \| P u \|_{k,K}. \tag{1.2}$$

Preuve. — Elle est classique et s'appuie sur le fait que $C_p^\infty(K)$, muni des normes $\| \quad \|_{k,K}$, est un espace de Fréchet.

3. Nécessité des caractéristiques réelles

(*a*) THÉORÈME I.3. — *Soit P un opérateur différentiel avec les propriétés de* I.1 (*a*). *Supposons que le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé pour P dans un voisinage Ω de O dans $\overline{H}$, $\Omega \subset D$, au sens de la définition* I.1 (*b*).

Alors, dans $\Omega \cap H$, les caractéristiques simples de P sont réelles.

Preuve. — C'est une légère modification, pour le cas « plat », de la preuve de P. D. LAX [8].

Elle est développée aux paragraphes (*b*), (*c*) et (*d*).

(*b*) *Rappels sur les développements asymptotiques* (*cf.* [5]). — Soit $Q(x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m au voisinage Ω d'un point x_0 de $\mathbf{R}^n$. Pour toutes fonctions Φ, y, $\Phi \in C^\infty(\Omega)$, $y \in C^\infty(\Omega)$, on pose

$$\exp(-\tau\Phi)\, Q(y \exp \tau\Phi) = \sum_{k=0}^{m} q^k(\Phi)(y)\, \tau^{m-k},$$

définissant ainsi, dans Ω, des opérateurs différentiels $q^k(\Phi)$, d'ordre k, avec en particulier

$$q^0(\Phi) = Q_m(x, \operatorname{grad}\Phi),$$

$$q^1(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b,$$

où

$$a_i = \frac{\partial Q_m}{\partial \xi_i}(x, \operatorname{grad}\Phi),$$

et b est le coefficient de τ^{m-1} dans $\exp(-\tau\Phi)\, Q(\exp\tau\Phi)$;

$$\ldots$$

$$q^m(\Phi) = Q.$$

Une onde asymptotique nulle pour Q sera une expression formelle

$$u = \exp\tau\Phi(Y_0 + Y_1/\tau + \ldots + Y_N/\tau^N + \ldots)$$

pour laquelle les relations suivantes sont vérifiées :

$q^0(\Phi) \equiv 0$ (la « phase » Φ de l'onde est caractéristique pour Q).

$Y_0 \not\equiv 0$, et pour $j \geqq -m$:

$$\sum_{r=0}^{\inf(m, m+j)} q^r(\Phi)\, Y_{m+j-r} = 0.$$

Ces relations impliquent que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, en désignant par

$$u_N = \exp\tau\Phi\,(Y_0 + \ldots + Y_N/\tau^N)$$

le « tronquage » de u à l'ordre N, on a

$$\begin{aligned}\exp(-\tau\Phi)\,Q(u_N) = {} & q^0(\Phi)\,Y_0\tau^m + q^1(\Phi)\,Y_0\tau^{m-1} + \ldots + q^m(\Phi)\,Y_0 \\ & + q^0(\Phi)\,Y_1\tau^{m-1} + q^1(\Phi)\,Y_1\tau^{m-2} + \ldots + q^m(\Phi)\,Y_1/\tau \\ & + \ldots \\ & + q^0(\Phi)\,Y_N\tau^{m-N} + q^1(\Phi)\,Y_N\tau^{m-N-1} + \ldots + q^m(\Phi)\,Y_N/\tau^N,\end{aligned}$$

$$\exp(-\tau\,\Phi)\,Q(u_N) = \textstyle\sum_{N+1 \leqq j+k \leqq N+m,\, j>0} q^j(\Phi)\,Y_k\tau^{m-j-k},$$

ce qui explique que l'onde u est dite asymptotiquement nulle.

(c) *Réduction au cas non caractéristique.* – Soient $P_0 = (x_0, t_0)$ un point quelconque de $\Omega \cap H$, K un voisinage compact de P_0 dans $\overline{H}_{t_0} = \{(x, t), t \geqq t_0\}$, contenu dans Ω, et tel que $K = \overline{\mathring{K}}$.

On va montrer que l'hypothèse du théorème I.3 entraîne que le problème de Cauchy plat (sur $t = t_0$) est bien posé dans K pour P. Soit en effet $f \in C_p^\infty(K)$; on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$, nulle pour $t \leqq t_0$. Soit alors $\tilde{u} \in C_p^\infty(\Omega)$, telle que $P\tilde{u} = \tilde{f}$.

L'unicité implique que $\tilde{u} = 0$ pour $t \leqq t_0$ dans Ω. Donc

$$u = \tilde{u}_{|K} \in C_p^\infty(K),$$

et $Pu = f$ dans K. L'unicité dans $\mathring{K}$ est évidente, et implique l'unicité sur K.

(d) *Fin de la preuve.* – Soit $P_0 = (x_0, t_0)$ un point de $\Omega \cap H$ tel qu'il existe $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$, $\xi_0 \neq 0$, en sorte que $P_m(x_0, t_0, \xi_0, \tau)$ possède une racine simple non réelle τ_0, mettons $\operatorname{Im} \tau_0 > 0$. Il existe alors une fonction régulière $\tau(x, t, \xi)$, définie au voisinage de (x_0, t_0, ξ_0), non réelle, telle que

$$P(x, t, \xi, \tau(x, t, \xi)) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tau(P_0, \xi_0) = \tau_0.$$

On cherche une « fonction de phase » $l(x, t)$, solution du problème de Cauchy :

$$\Phi \begin{cases} l_t = \tau(x, t, l_x), \\ l_{|t=t_0} = \xi_0 . x. \end{cases}$$

Comme τ est complexe, on ne sait pas en général résoudre exactement Φ, c'est pourquoi on considère, pour tout $r \in \mathbf{N}$, la solution approchée l_r

de Φ, définie par

$$l_r(x, t) = \xi_0.x + (t-t_0)\tau(x, t_0, \xi_0) + \ldots,$$

où l_r est la somme des r premiers termes d'une série de Taylor par rapport à t dont les valeurs sur $t = t_0$ se déduisent de Φ. On note que toutes les fonctions l_r existent dans un même voisinage V de P_0, et que

$$(l_r)_t - \tau(x, t, (l_r)_x) = 0((t-t_0)^r) \qquad \text{dans} \quad V.$$

Choisissons alors K comme en (c), avec $K \subset V$. On va construire, à l'aide des tronquages u_N d'un développement asymptotique approché u de P, des fonctions mettant en défaut l'inégalité de type I.2 relative à K.

Prenons $r = m + k(K) + 1$. Les opérateurs $p^i(l_r)$ étant ainsi déterminés, remarquons que la direction de l'axe des t est non caractéristique pour $p^1(l_r)$ au point P_0; en effet, le coefficient de $\partial/\partial t$ est $\partial P_m/\partial\tau\,(P_0, \xi_0, \tau_0)$, qui est non nul, car τ_0 est racine simple.

Cela permet de résoudre les relations de I.3 (b) d'une façon approchée en t : on choisit Y_0 tel que

$$Y_0(P_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad p^1(l_r)\, Y_0 = O((t-t_0)^r),$$

puis Y_1 tel que

$$p^1(l_r)\, Y_1 + p^0(l_r)\, Y_0 = O((t-t_0)^r), \text{ etc.}$$

Considérons alors l'onde asymptotique

$$u = e^{-i\tau l_r}(Y_0 + Y_1/i\tau + \ldots + Y_N/(i\tau)^N + \ldots) \qquad \text{dans} \quad K.$$

Choisissons un réel positif α et un cylindre $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{C} = \{(x, t); |x-x_0| \leqq a,\ t_0 \leqq t \leqq t_0 + b\}, \qquad \mathscr{C} \subset K,$$

tel que $(\operatorname{Im} l_r)_t \geqq \alpha > 0$ dans $\mathscr{C}$, et considérons, pour $N \in \mathbf{N}$ et $\lambda > 0$ (qui restent à choisir), le tronquage u_N de u sur le cylindre $\mathscr{C}_{h(\tau)}$ qui a même base que $\mathscr{C}$ et pour hauteur

$$h(\tau) = \lambda \frac{\log \tau}{\tau}.$$

Enfin, χ étant une fonction $C^\infty(\mathbf{R})$, telle que

$$\chi(t) = 0 \quad \text{si } t \leqq 0, \qquad \chi(t) = 1 \quad \text{si } t \geqq 1/2,$$

on pose

$$v_N = \chi\left(\frac{t-t_0}{h(\tau)}\right)u_N.$$

Maintenant, prolongeons $P\,v_N$ à K en une fonction $\widetilde{P\,v_N}$ plate sur $t = t_0$, en sorte qu'il existe $C > 0$, indépendante de τ, avec

$$\|\widetilde{P\,v_N}\|_{k(K),\,K} \leqq C\,\|P v_N\|_{k,\,\mathscr{C}_{h(\tau)}}.$$

Soit $w_N \in C_p^\infty(K)$, $P\,w_N = \widetilde{P\,v_N}$. L'unicité prouve que w_N prolonge v_N. Évaluons la C_k-norme de $P\,v_N$ sur $\mathscr{C}_{h(\tau)}$:

$$P\,v_N = \chi\left(\frac{t-t_0}{h(\tau)}\right)Pu_N + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!}\,\frac{1}{h^j(\tau)}\chi^{(j)}\left(\frac{t-t_0}{h(\tau)}\right)\frac{\partial^j P}{\partial\tau^j}(u_N),$$

et

$$\exp i\,\tau\,l_r\,P\,u_N = \sum_{N+1 \leqq s+t \leqq N+m,\, s>0} p^s(l_r)\;Y_t(i\,\tau)^{m-s-t} + (i\,\tau)^m\,T,$$

où le terme T est, pour τ assez grand, une fonction régulière qui est $O\,((t-t_0)^r)$.

Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha', \alpha_{n+1})$, $|\alpha| \leqq k\,(K)$,

$$\begin{aligned} D^\alpha\,P\,v_N = {} & \sum_{0 \leqq \nu \leqq \alpha_{n+1}} C_{\alpha_{n+1}}^\nu \frac{1}{h^\nu(\tau)}\chi^{(\nu)}\left(\frac{t-t_0}{h(\tau)}\right)\frac{\partial^{\alpha_{n+1}-\nu}}{\partial t^{\alpha_{n+1}-\nu}}(D_x^{\alpha'}Pu_N) \\ & + \sum_{0 \leqq \mu \leqq \alpha_{n+1}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!}\,C_{\alpha_{n+1}}^\mu\,\frac{1}{h^{j+\mu}(\tau)} \\ & \times \chi^{(j+\mu)}\left(\frac{t-t_0}{h(\tau)}\right)\frac{\partial^{\alpha_{n+1}-\mu}}{\partial t^{\alpha_{n+1}-\mu}}\;D_x^{\alpha'}\frac{\partial^j P}{\partial\tau^j}\;u_N. \end{aligned}$$

Désignons alors par M_τ (resp. N_τ) le point de $\mathscr{C}_{h(\tau)}$ (resp. $\mathscr{C}_{h(\tau)/2}$), où $\operatorname{Im} l_r$ est maximal.

Dans $\mathscr{C}_{h(\tau)}$, le second groupe de termes dans l'expression de $D^\alpha\,P\,v_N$ est majoré par

$$C\left(\frac{\tau}{\log\tau}\right)^{m+k}\tau^{m+k-1}\exp\tau\,(\operatorname{Im} l_r)(N_\tau),$$

car toute dérivée de $\chi\,(t)$ est nulle pour $t \geqq 1/2$. L'ensemble des termes du premier groupe, où χ intervient par une de ses dérivées, est majoré par

$$C\exp\tau\,(\operatorname{Im} l_r)(N_\tau)\left(\frac{\tau}{\log\tau}\right)^k\tau^{m+k}\left(\frac{\log\tau}{\tau}\right)^r;$$

ceux où χ intervient sans dérivation sont majorés par

$$\exp \tau (\operatorname{Im} l_r)(M_\tau) \times \tau^{m+k} \left(\frac{\log \tau}{\tau}\right)^r$$

ou par

$$\exp \tau (\operatorname{Im} l_r)(M_\tau)\, \tau^{k+m-N-1}.$$

D'autre part

$$|w_N(M_\tau)| = |u_N(M_\tau)| \geqq \frac{1}{2} \exp \tau (\operatorname{Im} l_r)(M_\tau),$$

lorsque τ est assez grand.

Observons que M_τ et N_τ sont situés sur les faces supérieures respectives des cylindres $\mathscr{C}_{h(\tau)}$ et $\mathscr{C}_{h(\tau)/2}$, et que

$$(\operatorname{Im} l_r)(M_\tau) - (\operatorname{Im} l_r)(N_\tau) \geqq \alpha \frac{h(\tau)}{2},$$

en sorte que

$$\exp (\tau \operatorname{Im} l_r)(M_\tau) - \tau (\operatorname{Im} l_r)(N_\tau) \geqq \exp \tau \frac{\alpha}{2} \lambda \log \frac{\tau}{\tau} = \tau^{\lambda(\alpha/2)}.$$

Les choix

$$N = m + k(K) \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{4(m+k(K))}{\alpha}$$

assurent que, pour τ assez grand, l'inégalité I.2, relative à K et à $k(K)$, ne peut avoir lieu.

REMARQUE 1. — La preuve, modifiée de la façon habituelles, s'applique sans aucune difficulté au cas d'un système du premier ordre.

REMARQUE 2. — Il paraît vraisemblable que l'hypothèse de simplicité des caractéristiques retenue dans le théorème I.3 n'est pas nécessaire; un théorème plus général peut sans doute être obtenu en étendant la méthode des caractéristiques dans le sens de DE PARIS [5], ou en adaptant la preuve de MIZOHATA ([9], [10]) au cas « plat ».

II. — Le cas fuchsien

1. Définition et notations

On considère, dans un domaine D du demi-espace

$$H = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}, t > 0\},$$

un opérateur de la forme

$$(\star) \qquad P \equiv t^k D_t^m + \textstyle\sum_{l+|\beta|\leqq m,\, l<m} a_{l,\beta}(x,t)\, t^{v_{l,\beta}} D_t^l D_x^\beta,$$

où les fonctions $a_{l,\beta}$ sont bornées à valeurs complexes, et les nombres k et $v_{l,\beta}$ sont des réels non négatifs.

DÉFINITION. — P est dit « *de Fuchs* » (ou *fuchsien*) s'il existe une fonction $\eta(\beta)$, définie sur les multi-indices β, $|\beta| \leqq m$, telle que

$$|\beta| \neq 0 \;\Rightarrow\; \eta(\beta) > 0, \qquad \eta(\beta) \geqq 0,$$

et

$$\forall\, l, \beta, \quad l+|\beta| \leqq m, \quad l<m, \quad m-k = l - v_{l,\beta} + \eta(\beta).$$

On notera

$$\lambda(P) = \sup_{l+|\beta|=m,\, l<m} \frac{k-v_{l,\beta}}{m-l},$$

en remarquant que si P est fuchsien, $\lambda(P) < 1$.

2. Réduction de l'étude de P à celle d'un système singulier du premier ordre

Elle est résumée par la proposition suivante.

PROPOSITION II.2. — *Supposons P fuchsien. Alors il existe un changement de variables $(x, t) \mapsto (x, T)$ préservant H et la surface initiale, un système singulier du premier ordre de la forme*

$$L = \frac{\partial}{\partial T} + \textstyle\sum_{i=1}^n A_i(x, T) \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{B(x, T)}{T}$$

(*où les matrices $(p \times p)$ A_i et B sont complexes et bornées*) *et un choix de nouvelles fonctions $\mathcal{U}(u)$ et $g(f)$ (où $\mathcal{U}(u)$ est un p-vecteur) tels que si u vérifie $Pu = f$, $\mathcal{U}$ vérifie $L\mathcal{U} = (g, 0, \ldots, 0)$.*

Remarque. — Un exemple de passage de L à P est fourni dans la preuve du théorème II.4 (c).

Preuve de la proposition. — Elle s'effectue en deux étapes : on transforme d'abord P en un opérateur $\tilde{P}$ non caractéristique, mais à coefficients singuliers convenables, puis on réduit $\tilde{P}$ à L.

(*a*) *Le changement de variables* $\sim(\nu)$. — Il est de la forme

$$\sim(\nu)\begin{cases} X = x, \\ T = t^{1-\nu} \end{cases}$$

où le nombre ν, $0 \leqq \nu < 1$, reste à choisir en sorte que l'équation $P u = f$ soit équivalente à $\tilde{P}\,\tilde{u} = g(f) = t^{m\nu-k}\tilde{f}$, avec un $\tilde{P}$ de la forme

$$\tilde{P} \equiv D_T^m + \sum_{p+|\alpha| \leqq m,\, p<m} b_{p,\alpha}(x, T)\, T^{w_{p,\alpha}}\, D_T^p\, D_x^\alpha,$$

et en plus $b_{p,\alpha}$ bornés et $w_{p,\alpha} \geqq p+|\alpha|-m$ (les $w_{p,\alpha}$ peuvent être négatifs, bien entendu). Par le changement $\sim(\nu)$, un terme $t^{v_{l,\beta}}\, D_t^l\, D_x^\beta$ se transforme en

$$\sum_{r \leqq l} t^{v_{l,\beta}}\, D_T^r\, D_x^\beta \frac{a_r}{t^{r\nu+l-r}},$$

où les a_r sont des constantes dépendant de ν. Le terme de tête $t^k D_t^m$ devient $t^k/t^{m\nu} D_T^m + \ldots$ Après transformation de l'équation, et multiplication par $t^{m\nu-k}$, on obtient une équation de la forme indiquée pour $\tilde{P}$, avec

$$(1-\nu)\, w_{r,\alpha} = \inf_{l \geqq r}(v_{l,\alpha} - r\nu + r - l + m\nu - k).$$

Les coefficients des termes de la partie principale de $\tilde{P}$ seront non singuliers pourvu que

$$\left.\begin{array}{r} l+|\alpha| = m \\ l < m \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_{l,\alpha} - l\nu + l - l + m\nu - k \geqq 0,$$

soit $\nu\,(m-l) \geqq k - v_{l,\alpha}$, i. e. $\nu \geqq \lambda(P)$.

Pour les termes de degré inférieur, on aura

$$w_{r,\alpha} \geqq r + |\alpha| - m$$

si, et seulement si, pour $l \geqq r$,

$$v_{l,\alpha} - r\nu + r - l + m\nu - k \geqq (1-\nu)(r + |\alpha| - m).$$

Or, par hypothèse,

$$v_{l,\alpha} = l - m + k + \eta(\alpha),$$

il suffira donc d'avoir l'inégalité

$$\forall l, \quad \forall \alpha, \quad l-m+k+\eta(\alpha)-r\nu-l+r+m\nu-k \geqq (1-\nu)(r+|\alpha|-m),$$

soit

$$\eta(\alpha) \geqq |\alpha|(1-\nu).$$

En choisissant

$$\nu(P) = \sup\left(0, \lambda(P), 1-\inf_{|\alpha|\neq 0}\frac{\eta(\alpha)}{|\alpha|}\right),$$

on obtient la forme désirée pour $\tilde{P}$.

(*b*) *Réduction à un système singulier.* — On pose, pour k et α tels que $k+|\alpha| \leqq m-1$,

$$U_{k,\alpha} = \frac{1}{T^{m-k-|\alpha|-1}} D_T^k D_x^\alpha \tilde{u}.$$

On range les couples (k, α) dans un certain ordre, $(m-1, 0)$ en tête, et on note $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{k,\alpha})$ le vecteur des $\mathcal{U}_{k,\alpha}$.

On note, pour un multi-indice α, $d(\alpha)$ l'indice de la dernière variable présente dans α $(d(\alpha) = \sup_{\alpha_j\neq 0} j)$, et δ_d le multi-indice $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, avec 1 à la d-ième place.

On choisit d'écrire l'équation $\tilde{P}\tilde{u} = g$, sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial \mathcal{U}_{m-1,0}}{\partial T} + \sum\nolimits_{p+|\alpha|=m,\, p<m} b_{p,\alpha} T^{w_{p,\alpha}} (\mathcal{U}_{p,\alpha-\delta_{d(\alpha)}})_{x_{d(\alpha)}} + \sum\nolimits_{p+|\alpha|\leqq m-1} b_{p,\alpha} T^{w_{p,\alpha}+m-p-|\alpha|} U_{(p,\alpha)/T} = g.$$

A cette équation sont adjointes les équations reliant entre elles les $\mathcal{U}_{k,\alpha}$, soit

$$(2) \qquad k+|\alpha| \leqq m-2, \qquad \frac{\partial \mathcal{U}_{k,\alpha}}{\partial T} = \frac{1}{T}\mathcal{U}_{k+1,\alpha} - \frac{k+|\alpha|+1-m}{T}\mathcal{U}_{k,\alpha}$$

et

$$(3) \qquad k+|\alpha| = m-1, \qquad k \leqq m-2, \qquad \frac{\partial \mathcal{U}_{k,\alpha}}{\partial T} = (\mathcal{U}_{k+1,\alpha-\delta_{d(\alpha)}})_{x_{d(\alpha)}}.$$

On peut alors écrire le système des équations (1), (2) et (3) sous la forme

$$(4) \qquad L\mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} + \frac{B\mathcal{U}}{T} = (g, 0, \ldots, 0),$$

où les matrices A_i et B sont aisément déduites des équations (1), (2) et (3).

Vérifions enfin que les caractéristiques de la partie principale

$$L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

de L sont les mêmes que celles de $\tilde{P}_m$: soit en effet un vecteur $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_{k,\alpha})$ non nul tel que

$$\tau \mathcal{V} + (\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i) \mathcal{V} = 0.$$

Cela s'écrit, d'après (1), (2) et (3).

$$(3') \quad k + |\alpha| = m-1, \qquad k \leqq m-2, \qquad \tau \mathcal{V}_{k,\alpha} = \xi_{d(\alpha)} \mathcal{V}_{k+1,\alpha-\delta_{d(\alpha)}}$$

et

$$(1') \qquad \tau \mathcal{V}_{m-1,0} + \sum_{p+|\alpha|=m,\, p<m} b_{p,\alpha} T^{w_{p,\alpha}} \xi_{d(\alpha)} \mathcal{V}_{p,\alpha-\delta_{d(\alpha)}} = 0.$$

Supposons alors $\tau \neq 0$; les équations (3′) et (1′) permettent de calculer toutes les composantes du vecteur $\mathcal{V}$ en fonction de ξ, τ et $\mathcal{V}_{m-1,0}$. On obtient :

$$\mathcal{V}_{k,\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\tau^{|\alpha|}} \mathcal{V}_{m-1,0}.$$

Cela prouve que $\mathcal{V}_{m-1,0} \neq 0$, puis, en reportant dans (1′), que

$$\tau \mathcal{V}_{m-1,0} + \sum_{p+|\alpha|=m,\, p<m} b_{p,\alpha} T^{w_{p,\alpha}} \xi_{d(\alpha)} \frac{\xi^{\alpha-\delta_{d(\alpha)}}}{\tau^{|\alpha|-1}} \mathcal{V}_{m-1,0} = 0,$$

soit

$$\tau^m + \sum_{p+|\alpha|=m,\, p<m} b_{p,\alpha} T^{w_{p,\alpha}} \tau^p \xi^\alpha = 0.$$

Finalement,

$$\det(\tau + \textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i) = \tau^p \tilde{P}_m(\tau, \xi),$$

où $p \in \mathbf{N}$ est un nombre fixe qui dépend de la façon dont on a réduit l'équation $\tilde{P}\tilde{u} = g$ au système $L\mathcal{U} = \mathcal{F}$ (p est égal, en général, au nombre des équations adjointes de type (2)).

3. Une condition suffisante lorsque les caractéristiques sont réelles

(*a*) *Rappel* de quelques résultats sur les systèmes hyperboliques singuliers. On rappelle les notations utilisées dans l'étude de ces systèmes faite en [2]. On considère, dans un voisinage D de O dans $\overline{H}$, un système de la forme

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{B}{T}, \qquad \text{avec} \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

où les matrices $(p \times p)$ B, A_i et $\partial A_i / \partial X_j$ sont complexes et bornées dans D. Le domaine D peut être soit un borné, soit une bande $0 \leqq T < T_0$.

Pour $\mu \in \mathbf{R}$, on désigne par $\overline{D}_\mu$ le sous-espace de $L^2_{(\mu+1)/2}(D)$, défini par

$$\overline{D}_\mu = \{ \mathcal{U} \in L^2_{(\mu-1)/2}(D),\ L\mathcal{U} \in L^2_{(\mu+1)/2}(D) \},$$

et par $\overline{L}_\mu : \overline{D}_\mu \to L^2_{(\mu+1)/2}$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{U} \in \overline{D}_\mu, \qquad \overline{L}_\mu \mathcal{U} = L\mathcal{U}.$$

Le théorème principal de [2] est le suivant :

THÉORÈME II.3.*a* :

(i) *Cas d'une bande. — On suppose* L_1 *hyperbolique symétrisable dans la direction de l'axe des* T (*pour la définition, cf., par exemple*, FRIEDRICHS [7] *ou* [2]). *Alors il existe* $\mu_0 \in R$, *tel que, pour* $\mu < \mu_0$, $\overline{L}_\mu$ *est à indice.*

(ii) *Cas d'un domaine borné. — L'ouvert* D *sera défini par la donnée d'un ouvert borné régulier* Ω *de* $\mathbf{R}^n_X$ *contenant* 0, *d'une fonction* $\Phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $d\Phi \neq 0$, $\Phi > 0$ *dans* Ω, $\Phi = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *et des inégalités*

$$D = \{ (X,\ T) \in \mathbf{R}^{n+1}, X \in \Omega,\ 0 \leqq T < \Phi(X) \}.$$

On suppose que les directions de l'axe des T *et de toutes les normales au bord supérieur* S *de* D (*défini par*

$$S = \{ (X,\ T) \in \mathbf{R}^{n+1}, X \in \Omega,\ T = \Phi(X) \})$$

sont des directions d'hyperbolicité pour L_1 (*au sens de* (i)). *Alors il existe* $\mu_0 \in \mathbf{R}$ *tel que, pour* $\mu < \mu_0$, $\overline{L}_\mu$ *est à indice.*

(*b*) *Domaines d'hyperbolicité.* — Soient P un opérateur fuchsien dans un domaine D, voisinage de O dans $\overline{H}$, $\sim \nu(P)$ et L le changement de variables et le système singulier du premier ordre associés à P selon la proposition II.2.

DÉFINITION. — On dit que D est un *domaine d'hyperbolicité* de P si $\tilde{D}^{\nu(P)}$ et L_1 vérifient les hypothèses des points (i) ou (ii) du théorème II.3.*a*.

Remarquons que dans les cas numériques, $\nu(P)$ et L sont immédiatement calculables, et l'on peut donc préciser les domaines D d'hyperbolicité de P.

(*c*) *Condition suffisante :*

DÉFINITION ET THÉORÈME II.3.*c*. — Pour $p \in \mathbf{N}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $0 \leqq \eta < 1$, *on note*

$$W^p_{\sigma,\eta}(D) = \{ u \in L^2_\sigma(D);\ \forall\, l,\ \beta,\ l+|\beta| \leqq p,\ D^l_t D^\beta_x u \in L^2_{\sigma+l+(1-\eta)|\beta|} \}.$$

Soient alors P un opérateur fuchsien, et D un domaine d'hyperbolicité pour P (au sens de II.3.*b*). *Supposons, de plus, que les dérivées premières tangentielles des coefficients $a_{l,\beta}$, $l+|\beta| = m$, soient bornées dans D. Alors il existe $s_0 \in \mathbf{R}$ tel que, si $s < s_0$, l'opérateur*

$$P:\quad W^{m-1}_{s+k-m,\,\nu(P)}(D) \cap \{ u;\ Pu \in L^2_s(D) \} \to L^2_s(D)$$

est à indice.

Preuve. — Le théorème est une simple traduction du théorème II.3.*a*.

1° *Passage du système L à l'équation $\tilde{P}$.* — Soit $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{k,\alpha})$ une solution de $L\mathcal{U} = (g, 0, \ldots, 0)$, et supposons $\mathcal{U} \in L^2_\sigma(\tilde{D})$, pour σ assez grand négatif. On pose

$$\tilde{u} = T^{m-1}\,\mathcal{U}_{0,0}.$$

Des équations (2) il vient, pour $k \leqq m-2$,

$$D^k_T \tilde{u} = T^{m-k-1}\mathcal{U}_{k,0}.$$

Utilisons alors les équations (3) successivement pour les valeurs de α, $\alpha| = 1$, $|\alpha| = 2$, etc.

On obtient d'abord

$$k = m-2, \qquad \frac{\partial}{\partial T}\mathcal{U}_{k,\delta_i} = (\mathcal{U}_{k+1,0})_{X_i} = \frac{\partial}{\partial T}(D^k_T D_{X_i}\tilde{u}).$$

Considérons, dans un tube $\mathscr{T}$ de base ω et de hauteur h, contenu dans $\tilde{D}$, la distribution $v = \mathscr{U}_{k,\delta_i} - D_T^k D_{X_i} \tilde{u}$. On peut prolonger v hors de $\mathscr{T}$ dans la bande $]0, h] \times \mathbf{R}_X^n$ en une distribution $\tilde{v} \in L^2_{\sigma'}(]0, h], H^{-1}(\mathbf{R}_X^n))$ pour un certain σ' grand négatif. En régularisant v horizontalement, on trouve une distribution $\tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v} \star \Phi_\varepsilon$ telle que $\tilde{v}_\varepsilon \in L^2_{\sigma'}(]0, h] \times \mathbf{R}_X^n)$ et $\partial \tilde{v}_\varepsilon / \partial T = 0$. Alors, pour presque tout $X \in \mathbf{R}_X^n$, $\tilde{v}_\varepsilon(X, .)$ appartient à $L^2_{\sigma'}(]0, h])$ et $\partial \tilde{v}_\varepsilon (X, .)/\partial T = 0$, ce qui implique $\tilde{v}_\varepsilon (X, T) \equiv 0$. Comme $\tilde{v}_\varepsilon \to \tilde{v}$ dans $\mathscr{D}'$, $v \equiv 0$ dans $\mathscr{T}$. Vu la forme de $\tilde{D}$, on peut faire le raisonnement précédent au voisinage de tout point de $\tilde{D}$, ce qui prouve que $v \equiv 0$ dans $\tilde{D}$. En procédant alors de proche en proche, on obtient

$$\mathscr{U}_{k,\alpha} = \frac{1}{T^{m-k-|\alpha|-1}} D_T^k D_X^\alpha \tilde{u} \qquad \text{et} \qquad \tilde{P} \tilde{u} = g.$$

2° *Traduction du théorème* II.3.*a*. — On remarque d'abord que, si $f(x, t) \in L^2_s(D)$, sa transformée $\tilde{f}$ par le changement $\sim$ (ν) est dans $L^2_\sigma(\tilde{D})$, avec $2\sigma(1-\nu) = 2s + \nu$. En effet, σ est choisi en sorte que

$$\int_{\tilde{D}} T^{2\sigma} |\tilde{f}(X, T)|^2 \, dX \, dT = \int_D t^{2\sigma(1-\nu)} |f(x, t)|^2 \, dx \frac{(1-\nu)}{t^\nu} dt.$$

Soit une norme équivalente à $\int_D t^{2s} |f(x, t)|^2 \, dx \, dt$.

Soit alors $f \in L^2_s(D)$. Résoudre $P u = f$ dans D revient à résoudre $\tilde{P} \tilde{u} = g = T^{(m\nu-k)/(1-\nu)} \tilde{f}$ dans $\tilde{D}$. Donc $g \in L^2_{(2s+\nu+2k-2m\nu)/2(1-\nu)}(\tilde{D})$.

La solution $\mathscr{U}$ de $L \mathscr{U} = \mathscr{F} = (g, 0, \ldots, 0)$, si elle existe, est dans $L^2_{((2s+\nu+2k-2m\nu)/2(1-\nu))-1}(\tilde{D})$; la solution $\tilde{u}$ de $\tilde{P} \tilde{u} = g$ qui lui correspond d'après le point précédent est dans $L^2_{((2s+\nu+2k-2m\nu)/2(1-\nu))-1-(m-1)}(\tilde{D})$, c'est-à-dire que la solution u de $P u = f$ dans D appartient à $L^2_{s'}(D)$, avec

$$2s' = -\nu + 2s + \nu + 2k - 2m\nu - 2m(t-\nu),$$

soit

$$s' = s + k - m.$$

De plus, pour $l + |\alpha| \leqq m-1$, $D_t^l D_x^\alpha u$ se transforme en

$$\textstyle\sum_{r \leq l} D_T^r D_X^\alpha \tilde{u} \dfrac{a_r}{T[(r\nu + l - r)/(1-\nu)]},$$

et le terme $D_T^r D_X^\alpha \tilde{u}$ appartient à $L^2_{((2s+\nu+2k-2m\nu)/2(1-\nu))-1-(m-r-|\alpha|-1)}$; donc le terme relatif à r dans la somme est dans $L^2_\tau(\tilde{D})$, avec

$$\tau = \frac{2s+\nu+2k-2m+2|\alpha|(1-\nu)+2l}{2(1-\nu)},$$

et le terme $D_t^l D_x^\alpha u$ appartient à $L^2_{\tau'}(D)$, avec

$$\tau' = (s+k-m)+(l+|\alpha|(1-\nu)).$$

REMARQUE 1. — Dans le théorème II.3.c, on a pris $\nu = \nu(P)$ le plus petit possible, de façon à obtenir un domaine D d'existence et d'unicité le plus grand possible. Cependant, la régularité des fonctions de l'espace $W^{m-1}_{s+k-m,\nu}$ augmente avec ν : cela signifie que la solution obtenue dans D est d'autant plus régulière qu'on s'éloigne des caractéristiques « limites » qui bordent D.

REMARQUE 2. — Dans les cas où les résultats de régularité, établis en [2], peuvent s'appliquer à P, le théorème II.3.c s'étend, et fournit une « vraie » condition suffisante pour que le problème de Cauchy dans les fonctions C^∞ plates soit bien posé.

4. Le rôle des termes d'ordre inférieur

On a vu au paragraphe 3 qu'un opérateur homogène fuchsien « hyperbolique » (au sens de II.3.b), perturbé par des termes d'ordre inférieur tels que, dans l'opérateur résultant, le plus grand poids soit celui de $t^k D_t^m$, avait, eu égard au problème de Cauchy plat, un bon comportement.

C'est qu'alors une condition sur la « structure » des poids assure automatiquement la dominance de la partie P_m de P, partie sur laquelle on fait des hypothèses de signes convenables (hyperbolicité).

Mais un très bon comportement de P peut être observé sans que les termes d'ordre inférieur aient des poids moindres, pourvu toutefois qu'ils aient à leur tour des signes convenables. On doit alors plutôt considérer ces termes comme formant la « partie principale », et regarder P_m comme une perturbation. Il va sans dire que ce phénomène est instable. Voyons un exemple :

Soit l'opérateur

$$L_\varepsilon = t^{k+1}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^k\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \text{où} \quad k>1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Il est facile de prouver, pour L_1, des résultats analogues au théorème II.3.*c*. Pour L_{-1} par contre, on remarque que la fonction

$$y(t)=\int_0^t \exp(1/k\,s^k)\,ds,$$

qui est plate sur $t=0$, appartient au noyau de L_{-1}.

III. — Cas « sans propagation »

1. Définition

On considère, dans un voisinage D de O dans $\overline{H}$, un opérateur de la forme

$$P\equiv t^k D_t^m+\sum\nolimits_{l+|\beta|\leqq m,\, l<m} a_{l,\beta}(x,t)\, t^{v_{l,\beta}} D_t^l D_x^\beta,$$

où $a_{l,\beta}\in C^\infty(\overline{D})$, et k et $v_{l,\beta}$ sont réels non négatifs.

P est dit « *sans propagation* » si

(i) $\lambda(P)\geqq 1$, et il existe un couple (l_0,β_0), $l_0+|\beta_0|=m$, $l_0<m$, pour lequel

$$\lambda(P)=\frac{k-v_{l_0,\beta_0}}{m-l},$$

tel que $a_{l_0,\beta_0}(0,0)\neq 0$.

(ii) Pour tous l, β, $l+|\beta|\geqq m-1$, $l<m$,

$$\frac{k-v_{l,\beta}}{m-l}\leqq\lambda(P).$$

2. Théorème principal

THÉORÈME III.2. — *Soit P un opérateur de la forme* III.1 *dans un voisinage D de O dans $\overline{H}$.*

Supposons que le problème de Cauchy plat avec unicité soit bien posé dans un voisinage Ω de O dans $\overline{H}$, $\Omega\subset D$. Alors P ne peut être « sans propagation ».

Preuve du théorème. — Compte tenu du théorème I.3, on peut supposer que les caractéristiques simples de P dans $\Omega\cap H$ sont réelles. La preuve est analogue dans son principe à celle du théorème I.3, et utilise une inégalité et un développement asymptotique. Elle occupe les points *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

(*b*) *Choix d'une fonction de phase approchée* Φ_r $(r \in \mathbf{N})$:

LEMME III.2.*b*. — *Soit* P *un opérateur « sans propagation ». Alors il existe un changement de variables linéaire*

$$(x, t) \mapsto (X, t) \qquad (\textit{à coefficients constants})$$

et un voisinage V *de* O *dans* $\overline{H}$ *tels que, pour tout* $r \in \mathbf{N}$, *il existe dans* V *une fonction* $\Phi_r(X, t)$ *avec*

$$\left\{\begin{array}{l} P_m\left(X, t, \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial X}, \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right) = O(|X_1|^r) \qquad \textit{dans} \quad V, \\ \Phi_r(X, O) = 0, \\ \Phi_{r|X_1=0} = t. \end{array}\right.$$

Preuve du lemme. — Soit I l'ensemble des couples (l, β), $l+|\beta| = m$, $l < m$, pour lesquels

$$a_{l,\beta} \not\equiv 0 \quad \text{dans} \quad D,$$
$$v_{l,\beta} + \lambda(m-l) = k.$$

Soit alors $\pi(\tau, \eta)$ le polynôme

$$\pi(\tau, \eta) = \tau^m + \textstyle\sum_{(l,\beta) \in I} a_{l,\beta}(0, 0)\, \tau^l \eta^\beta.$$

Il existe dans I au moins le couple (l_0, β_0) pour lequel $a_{l_0,\beta_0}(0, 0) \neq 0$, par hypothèse. Choisissons alors $\eta_0 \in \mathbf{R}^n$, $\eta_0 \neq 0$, tel que

(i) $\pi(\tau, \eta_0)$ n'a que des racines simples (comme polynôme en τ).

(ii) Les polynômes en τ, $\sum_{i=1}^n (\eta_0)_i (\partial\pi/\partial\eta_i)(\tau, \eta_0)$ et $\pi(\tau, \eta_0)$ n'ont pas de racine commune.

Ces conditions remplies, soit τ_0 une racine non nulle de $\pi(\tau, \eta_0)$. Si l'on désigne par

$$\tilde{P}_m(x, t, \tau, \eta) = \tau^m + \textstyle\sum_{l+|\beta|=m,\, l<m} a_{l,\beta}(x, t)\, t^{v_{l,\beta}+\lambda|\beta|-k}\, \tau^l \eta^\beta,$$

le polynôme obtenu de P_m en posant

$$\xi = t^\lambda \eta,$$

puis en divisant le résultat par t^k, on remarque que $\pi(\tau, \eta) = \tilde{P}_m(0, 0, \tau, \eta)$. Il existe donc, au voisinage de $(0, 0, \eta_0)$ une fonction $\tau(x, t, \eta)$, C^∞ en x et en certaines puissances réelles de t, analytiques en η, telle que

$$\tilde{P}_m(x, t, \tau(x, t, \eta), \eta) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tau(0, 0, \eta_0) = \tau_0.$$

Si τ_0 n'était pas réel, il existerait ainsi dans un voisinage de l'origine une caractéristique simple non réelle de P_m, ce qui contredit l'hypothèse.

Dorénavant, nous supposerons effectué un changement de variables linéaire à coefficients constants $(x, t) \to (X, t)$ tel que $(\tau_0, \eta_0) = (1, e_1)$ (où e_1 est le premier vecteur de la nouvelle base); nous garderons du reste a notation (x, t) pour les nouvelles coordonnées. Le polynôme π a la forme

$$\pi(\tau, \eta) = \tau^m + \textstyle\sum_{l+p=m,\, l<m} b_{l,p}\, \tau^l \eta_1^p + (\text{termes où } \eta' \text{ intervient}),$$

et

$$\frac{\partial \pi}{\partial \eta_1}(\tau_0, \eta_0) = \textstyle\sum_{l+p=m,\, l<m} p\, b_{l,p} = A_1 \neq 0 \quad \text{à cause de (ii).}$$

Mais cela signifie que 1 est racine simple de $\tilde{P}_m(0, 0, 1, 0, \eta_1)$ (on sépare désormais $\eta = (\eta', \eta_1)$), donc qu'il existe une fonction $r(x, t, \tau, \eta')$, C^∞ en x et en certaines puissances réelles de t, analytique en τ et η', définie au voisinage de $(0, 0, 1, 0)$ telle que

$$\tilde{P}_m(x, t, \tau, \eta', r(x, t, \tau, \eta')) = 0, \qquad r(0, 0, 1, 0) = 1.$$

Autrement dit, P_m contient un facteur simple $\xi_1 - t^\lambda\, r(x, t, \tau, \xi'/t^\lambda)$.

Nous allons construire, pour $r \in \mathbf{N}$ donné, une solution approchée Φ_r du problème de Cauchy :

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x_1} = t^\lambda\, r\left(x, t, \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial t}, t^{-\lambda} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial x'}\right), \\ \Phi_r|_{x_1=0} = t. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de prendre les r premiers termes de la série de Taylor en x_1 dont les données initiales sont fournies par (S).

Il vient

$$\Phi_r|_{x_1=0} = t, \qquad \left.\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = t^\lambda\, r(0, x', t, 1, 0),$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0} = t^\lambda \left[\frac{\partial r}{\partial x_1}(0, x', 1, 0) + \frac{\partial r}{\partial \tau}(x', t, 1, 0) \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial r}{\partial \xi'}(x', t, 1, 0) \frac{\partial r}{\partial x'}(x', t, 1, 0) \right], \text{ etc.}$$

on observe que $\lambda \geqq 1$ assure que tous les termes du développement (sauf le premier éventuellement, qui s'annule comme t) s'annulent comme t^{λ}, et qu'au voisinage de l'origine, $\partial\Phi_r/\partial t$ et $t^{-\lambda}(\partial\Phi_r/\partial x')$, sont effectivement voisins de 1 et 0 respectivement.

Donc

$$E = \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_1} - t^{\lambda} r\left(x, t, \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}, t^{-\lambda}\frac{\partial\Phi_r}{\partial x'}\right) = O(|x_1|^r),$$

et

$$P_m\left(x, t, \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}, \frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right) = t^{k-\lambda} E\, Q_{m-1}\left(x, t, \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}, t^{-\lambda}\frac{\partial\Phi_r}{\partial x'}\right)$$

est aussi $O(|x_1|^r)$, car $\lambda \leqq k$.

(*c*) *Calcul de* $p^1(\Phi_r)$.

LEMME III.2.*c*. — *On a*

$$p^1(\Phi_r) = t^{k-\lambda} q,$$

où q *est de la forme*

$$q\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a\, t^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t} + b,$$

les coefficients a_i, a *et* b *étant bornés près de* O, *et* $a_1(0, 0) = A_1 \neq 0$.

Preuve. — Par construction de Φ_r, on voit qu'au voisinage de O, $\partial\Phi_r/\partial t$ et $\partial\Phi_r/\partial x_1$ sont respectivement équivalents à 1 et t^{λ}, tandis que $\partial\Phi_r/\partial x_i$ $(i \neq 1)$ s'annule au moins comme $t^{\lambda} x_1$.

Il est nécessaire de s'assurer que les dérivées partielles secondes de Φ_r s'annulent suffisamment en O; on vérifie facilement que les fonctions

$$\left(\frac{x_i}{t}\right)^{-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad t^{1-\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial t}, \quad x_1^{-1}t^{1-\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial t} \qquad (i \neq 1),$$

$$t^{-\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}, \quad t^{-\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_i}, \quad x_1^{-1}t^{-\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad (i, j \neq 1)$$

sont bornées près de O.

Cela étant, posons

$$p^1(\Phi_r) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta.$$

On a

$$\alpha_i = \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}(\operatorname{grad} \Phi_r), \qquad \alpha = \frac{\partial P_m}{\partial \tau}(\operatorname{grad} \Phi_r),$$

et β est le coefficient de τ^{m-1} dans $\exp \tau\, \Phi_r\, p\, (\exp(+\tau\, \Phi_r))$.

Il vient

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial P_m}{\partial \tau}(\operatorname{grad} \Phi_r)\\ &= m\, t^k \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{m-1} + \textstyle\sum_{l+|\beta|=m,\ 1 \leqq l < m} a_{l,\beta}\, t^{\nu_{l,\beta}}\, l \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{l-1} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta}.\end{aligned}$$

Chaque terme

$$a_{l,\beta}\, t^{\nu_{l,\beta}}\, l \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{l-1} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta}$$

s'annule au moins comme $t^{\nu_{l,\beta}+\lambda|\beta|}$ près de 0; or, par définition de λ, $\nu_{l,\beta}+\lambda\,|\,\beta\,| \geqq k$, donc α s'annule comme t^k.

On a

$$\alpha_1 = \textstyle\sum_{l+|\beta|=m,\ l<m,\ \beta_1>0} a_{l,\beta}\, t^{\nu_{l,\beta}} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{l} \beta_1 \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x'}\right)^{\beta'}.$$

Si $|\,\beta'\,| = 0$, le terme

$$t^{\nu_{l,\beta}} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{l} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1}\right)^{\beta_1-1} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x'}\right)^{\beta'}$$

s'annule exactement comme $t^{\nu_{l,\beta}+\lambda(m-l-1)}$; sinon, il s'annule au moins comme $t^{\nu_{l,\beta}+\lambda(m-l-1)}\, x_1\, |\,\beta'\,|$. Or, il est des termes avec $|\,\beta'\,| = 0$ et $\nu_{l,\beta}+\lambda\,(m-l) = k$ dans α_1; divisons donc α_1 par $t^{k-\lambda}$; la valeur du quotient à l'origine n'est autre que A_1, nombre introduit dans la preuve du lemme III.2.*b*, et qui, par construction, est non nul.

On a de même

$$a_i = \textstyle\sum_{l+|\beta|=m,\ l<m,\ \beta_i>0} a_{l,\beta}\, t^{\nu_{l,\beta}} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right)^{l} \beta_i \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}\right)^{\beta_i-1} \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x'_i}\right)^{\beta'_i}$$

(x'_i et β'_i sont relatifs aux variables autres que x_i).

Tous les termes s'annulent au moins comme $t^{\nu_{l,\beta}+\lambda(|\beta|-1)}$, soit au moins comme $t^{k-\lambda}$.

Enfin, calculons β : un terme $D_t^l D_x^\beta$ de P, d'ordre m, fournit un terme en τ^{m-1} dans l'expression $\exp(-\tau\,\Phi_r)\,P(\exp\tau\,\Phi_r)$ dans les conditions suivantes : $m-1$ dérivations parmi les m s'appliquent à l'exponentielle $\exp\tau\,\Phi_r$, tandis que celle qui reste porte sur le coefficient de $\exp\tau\,\Phi_r$ obtenu à l'issue de la première opération. Par commodité, nous séparerons les trois cas suivants :

(α) C'est une dérivation en t qui porte sur le coefficient de l'exponentielle; ce coefficient est $(\partial\Phi_r/\partial t)^{l-1}(\partial\Phi_r/\partial x)^\beta$; sa dérivée par rapport à t est une somme de termes de type

$$\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^{l-2}\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^{l-1}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta_i'}\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial x_i\,\partial t}.$$

Compte tenu du facteur $t^{v_{l,\beta}}$ qui les accompagne, ces termes s'annulent au moins comme

$$t^{\lambda|\beta|-1+v_{l,\beta}} \quad \text{ou} \quad t^{\lambda(|\beta|-1)+\lambda-1+v_{l,\beta}} \quad \text{soit} \quad t^{k-1}.$$

(β) C'est une dérivation en x qui porte sur le coefficient, qui est alors $(\partial\Phi_r/\partial t)^l(\partial\Phi_r/\partial x)^{\beta_i'}$; la dérivée par rapport à x_i est une somme de termes du type

$$\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^{l-1}\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial x_i\,\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta_i'} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^{l}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{(\beta_i)_j'}\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

qui s'annulent (compte tenu de $t^{v_{l,\beta}}$) au moins comme t^{k-1} ou $t^{k-\lambda}$ respectivement.

(γ) Les termes d'ordre $m-1$ de P, s'ils existent, fournissent dans b des termes en $t^{v_{l,\beta}}(\partial\Phi_r/\partial t)^l(\partial\Phi_r/\partial x)^\beta$, qui s'annulent au moins comme $t^{v_{l,\beta}+\lambda|\beta|}$, soit $t^{k-\lambda}$ par hypothèse.

Le fait que $\lambda \geqq 1$ permet de conclure des évaluations faites au lemme III.2.*c*.

(*d*) *Forme du développement asymptotique.* — On va construire dans V (*cf.* lemme III.2.*b*) une onde asymptotique nulle pour P de la forme

$$u = \exp(-\tau\,\psi)(Y_0 + Y_1/\tau + \ldots + Y_N/\tau^N + \ldots).$$

On prendra $\psi = 1/\Phi_r^{\nu-1}$, où $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geqq 2$ est à choisir comme on va l'expliquer.

LEMME III.2.*d.* — *On peut choisir* $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geqq 2$ *tel que les opérateurs* $q^j = t^{\lambda-k}\Phi_r^{\nu(m-1)} p^j(\psi)$ *ne contiennent que des termes de la forme* $C_{l,\beta} D_t^l D_x^\beta$, *où* $C_{l,\beta}$ *s'annule au moins comme* t^l.

Preuve. — On a

$$\operatorname{grad}\psi = -\frac{\nu-1}{\Phi_r^\nu}\operatorname{grad}\Phi_r.$$

Observons, pour j donné, $j > 1$, quelles sont les singularités sur $t = 0$ qui peuvent s'introduire dans $p^j(\psi)$ du fait du choix singulier de ψ. Un terme $D_t^l D_x^\beta$ ($p = l + |\beta| \leqq m$) de P, appliqué à $y \exp \tau\psi$, fournit dans $p^j(\psi)$ des dérivations d'ordre maximal $p-(m-j)$ (aucune si $p < m-j$), accompagnées d'un coefficient de la forme $(\operatorname{grad}\psi)^\alpha$, où α est un multi-indice de module $m-j$, et éventuellement d'autres dérivations, d'ordre s mettons, accompagnées d'un coefficient obtenu en faisant porter $m-j$ dérivations parmi les $p-s$ appliquées à $\exp\tau\psi$ directement sur $\exp\tau\psi$, puis en faisant porter les $p-s-(m-j)$ dérivations restantes sur le coefficient de $\exp\tau\psi$ obtenu à l'issue de la première opération. Le coefficient d'une telle dérivation d'ordre s est donc de la forme $D_{x,t}^{p-s-(m-j)}(\operatorname{grad}\psi)^\alpha$, où $|\alpha| = m-j$.

Vu le choix de ψ, $(\operatorname{grad}\psi)^\alpha$ est singulier au plus en $1/\Phi_r^{\nu|\alpha|}$, et une dérivée d'ordre μ de $(\operatorname{grad}\psi)^\alpha$ ne saurait être plus singulière que $1/\Phi_r^{\nu|\alpha|+\mu}$.

On remarque enfin que

$$\nu(m-1)-\nu(m-j)-p+s+(m-j) \geqq \nu - m,$$

ce qui prouve le lemme lorsque $j > 1$.

Examinons le cas du coefficient β dans $p^1(\psi)$ (notations du lemme III.2.*c*) : les termes qui proviennent de dérivations d'ordre $m-1$ de P sont, au coefficient $1/\Phi_r^{\nu(m-1)}$ près, les mêmes que ceux du cas (γ) du Lemme III.2.*c*; ceux qui proviennent de dérivations d'ordre m dans P se calculent par la même méthode qu'au lemme III.2.*c*, et l'on est amené à distinguer ici aussi deux cas :

(α) Une dérivation en t *porte sur le coefficient*

$$\frac{1}{\Phi_r^{\nu(m-1)}}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^{l-1}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta};$$

on obtient une somme de termes pareils à ceux obtenus au cas (α) du lemme III.2.*c*, au coefficient $1/\Phi_r^{\nu(m-1)}$ près, plus le terme

$$\frac{1}{\Phi_r^{\nu(m-1)+1}}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^l\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^\beta.$$

(β) Une dérivation en x porte sur le coefficient

$$\frac{1}{\Phi_r^{\nu(m-1)}}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^l\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^{\beta_i};$$

le seul terme de type nouveau (par rapport à ceux du lemme 2.*c*, cas (β)) est

$$\frac{1}{\Phi_r^{\nu(m-1)+1}}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right)^l\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x}\right)^\beta.$$

Ces évaluations montrent que $q^1(\psi)$ a exactement la même forme que l'opérateur q décrit au lemme III.2.*c*, lequel satisfait en particulier à la conclusion du lemme III.2.*d*.

(*e*) *Forme du développement asymptotique* (suite). – On suppose désormais ν choisi comme l'indique le lemme III.2.*d*. On va calculer les termes successifs Y_0, Y_1, etc. de u de façon que les relations du paragraphe I.3.*b* soient vérifiées à l'ordre r sur $x_1 = 0$. Ces relations, rappelons-le, ont la forme suivante :

$$j \geqq -m,\ \sum_{p=0}^{\inf(m,\, m+j)} p^p(\psi)\, Y_{m+j-p} = 0.$$

Pour notre propos, et vu les lemmes III.2.*b*, *c* et *d* il, suffit en fait de résoudre de façon approchée les équations

$$\begin{cases} q^1\, Y_0 = 0, \\ q^1\, Y_1 + q^2\, Y_0 = 0, \\ q^1\, Y_2 + q^2\, Y_1 + q^3\, Y_0 = 0, \text{ etc.,} \end{cases}$$

et cela est possible car q^1 a la structure précisée pour q au lemme III.2.*c*. On opère comme suit :

(α) On choisit $Y_0\,|_{x_1=0} = 1$, les autres données initiales sur $x_1 = 0$ se déduisant de l'équation $q^1\, Y_0 = 0$. La fonction

$$Y_0 = Y_0\Big|_{x_1=0} + x_1\frac{\partial Y_0}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} + \ldots + \frac{x_1^r}{r!}\,\frac{\partial^r Y_0}{\partial x_1^r}\Big|_{x_1=0}$$

est telle que $q^1 Y_0 = O(|x_1|^r)$, et notons que, bien que l'opérateur q^1 ait des coefficients qui contiennent certaines puissances réelles non négatives de t, Y_0 n'est pas singulière sur $t = 0$, car le terme $\partial/\partial t$ de q^1 est accompagné d'un coefficient t^λ, $\lambda \geqq 1$.

(β) On prend, pour $i > 0$, $Y_i|_{x_1 = 0} = 0$, et la même remarque qu'en (α) fondée sur la structure des opérateurs q^j décrite au lemme III.2.*d*, montre qu'il existe une solution approchée Y_i, non singulière sur $t = 0$, à la relation

$$q^1 Y_i + q^2 Y_{i-1} + \ldots = 0,$$

soit

$$q^1 Y_i + q^2 Y_{i-1} + \ldots = O(|x_1|^r).$$

(*f*) *Impossibilité d'une inégalité de type* I.2. — L'hypothèse du théorème III.2 implique, selon le lemme I.2, l'existence d'une inégalité *a priori*. Choisissons ε assez petit pour que le compact K_ε (= trace sur $\overline{H}$ de la boule fermée de centre O et de rayon ε) soit contenu dans V (*cf.* lemme III.2.*b*) et que $\Phi_r \geqq t/2$ dans K_ε. Cela assure que toutes les constructions faites aux paragraphes (*b*, (*c*), (*d*), (*e*) sont possibles au voisinage de K_ε, et que $\exp(-\tau\psi)$ est dans l'espace $C_p^\infty(K_\varepsilon)$. On note simplement $K = K_\varepsilon$ et $k_0 = k(K)$, et l'inégalité suivante a lieu :

$$\text{(In)} \qquad \forall u \in C_p^\infty(K), \quad \sup_K |u| \leqq C \sum_{|\alpha| \leqq k_0} \sup_K |D^\alpha u|.$$

En supposant P « sans propagation », nous allons la mettre en défaut.

Considérons $u_N = \exp(-\tau\psi)(Y_0 + Y_1/\tau + \ldots + Y_N/\tau^N)$, tronquage à l'ordre N de l'onde construite en (*b*), (*c*), (*d*), (*e*). Les calculs, voisins de ceux effectués dans la preuve du théorème I.3, montrent que $P u_N$ est de la forme

$$1/t^q \exp(-\tau\psi)(A+B), \qquad \text{où} \quad A = O(\tau^{m-N-1}), \quad B = O(\tau^m |x_1|^r),$$

et q est un certain réel positif qui dépend de ν. Considérons les cylindres

$$\mathscr{C}\tau = \{(x, t),\ 0 \leqq t \leqq \varepsilon/2,\ |x'| \leqq \varepsilon/2,\ |x_1| \leqq \alpha(\tau)\},$$

où

$$\alpha(\tau) = \lambda \frac{\log \tau}{\tau},$$

λ étant un réel positif qui reste à choisir. La fonction $P\,u_{N\,|\,\mathscr{C}_\tau}$, qui appartient à $C_p^\infty(\mathscr{C}_\tau)$, peut être prolongée à K en une fonction $\widetilde{P\,u_N} \in C_p^\infty(K)$, dont la C^{k_0}-norme n'excède pas Cte $\|P\,u_N\|_{k_0,\mathscr{C}_\tau}$, la constante ne dépendant pas de τ. Soit alors $v_N \in C_p^\infty(K)$, $P\,v_N = \widetilde{P\,u_N}$; la fonction v_N prolonge u_N.

Notons M le point $(0, 0, \varepsilon/2)$. Nous allons montrer que lorsque $\tau \to +\infty$, le comportement de $v_N(M)$, comparé à celui de $\|P\,v_N\|_{k_0,K}$, empêche (In). Remarquons d'abord que

$$\Phi_r(x, t) = t(1+O\,|\,x_1\,|),$$

donc que

$$\psi(x, t) = \frac{1}{t^{\nu-1}}(1+\theta),$$

la fonction θ vérifiant $|\,\theta\,| \leqq C'\,|\,x_1\,|$.

Évaluons alors $\|P\,u_N\|_{k_0,\mathscr{C}_\tau}$; pour un multi-indice α, $|\,\alpha\,| \leqq k_0$, $D^\alpha P\,u_N$ est de la forme

$$\exp(-\tau\,\psi)/t^{q'}(A+B), \qquad \text{où} \quad A = O(\tau^{m-N-1+k}), \quad B = O(\tau^{m+k}\,|\,x_1\,|^{r-k}),$$

et q' est un certain réel positif.

Cherchons le maximum de la fonction $\Phi = 1/t^{q'}\exp(-\tau\psi)$ sur $\mathscr{C}_\tau$: on a $\Phi \geqq 0$ et $\Phi = 0$ sur $t = 0$; d'autre part,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\exp(-\tau\,\psi)}{t^{q'+1}}\left(\frac{t}{\Phi_r^\nu}\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\tau(\nu-1)-q'\right),$$

ce qui assure, dans K, $\partial\Phi/\partial t > 0$ dès que τ est assez grand. Un point où Φ atteint son maximum est donc nécessairement situé sur le bord supérieur de $\mathscr{C}_\tau$, et Φ y vaut au plus

$$\Phi_m = \frac{1}{(\varepsilon/2)^{q'}}\exp(-\tau)\frac{1}{(\varepsilon/2)^{\nu-1}}(1-C'\,\alpha(\tau)).$$

Le rapport de la valeur maximale de Φ sur $\mathscr{C}_\tau$ à $v_n(M)$ est donc au plus

$$\frac{1}{(\varepsilon/2)^{q'}}(\exp(-(\tau/(\varepsilon/2)^{\nu-1}))\,C'\alpha(\tau) = \frac{1}{(\varepsilon/2)^{q'}}\,\tau^{-\lambda C'/(\varepsilon/2)^{\nu-1}}.$$

Il suffit de choisir $r = m+2k_0+1$, $N = m+k$, puis $\lambda > 0$ assez petit pour affirmer que les v_N ne peuvent satisfaire à (In) lorsque τ est assez grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALINHAC (S.). — *L'opérateur* $y(\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial x^2) + \lambda(\partial/\partial y)$ *dans le demi-plan* $y \leqq 0$, Orsay, 1973 (multigr.).

[2] ALINHAC (S.). — *Systèmes hyperboliques singuliers* (à paraître).

[3] BAOUENDI (M. S.) and GOULAOUIC (C.). — Cauchy problems with caracteristic initial hypersurface, *Comm. on pure and app. Math.* (à paraître).

[4] BENACHOUR (S.). — *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Thèse 3e cycle, Math., Nice, 1972.

[5] DE PARIS (J.-C.). — Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 51, 1972, p. 231-256.

[6] FLASCHKA (H.) and STRANG (G.). — The correctness of the Cauchy problem, *Advances in Math.*, t. 6, 1971, p. 347-379.

[7] FRIEDRICHS (K. O.). — *Pseudo differential operators.* — New York, Courant Institute of mathematical Sciences. 1970 (New York University, Courant Institut).

[8] LAX (P. D.). — *Asymptotic solutions et oscillatory initial value problems, Duke math. J.* t. 24, 1957, p, 627-646.

[9] MIZOHATA (S.). — *Lectures on the Cauchy Problem.* — Bombay, Tata Institute. 1965 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 35),,

[10] MIZOHATA (S.). — *Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ.* t. 1, 1961, p. 109-127.

(Texte reçu le 24 janvier 1974.)

Serge ALINHAC,
40, rue Clément-Perrot,
94400 Vitry-sur-Seine.