

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DIGNE

Sections des fibrés vectoriels sur une courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 151-159

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__151_0

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SECTIONS DES FIBRÉS VECTORIELS
SUR UNE COURBE**

PAR

FRANÇOIS DIGNE

RÉSUMÉ. — Étant donnée une courbe algébrique lisse X de genre $g \geq 2$, il existe, pour tout couple (r, d) , une famille de classes de fibrés vectoriels sur X de rang r et de degré d , comprenant les classes de fibrés indécomposables, et paramétrée par une variété irréductible. Si $d \leq r(g-1)$, un ouvert dense de cette variété correspond à des fibrés simples n'ayant pas de sections globales.

1. Introduction

Si on considère une courbe lisse et projective X sur un corps k algébriquement clos, les faisceaux inversibles de degré d sur X sont « paramétrés » par le schéma de Picard \mathbf{P}_d de X . Si $d \leq g-1$ (où g désigne le genre de X), il existe un ouvert (dense) de \mathbf{P}_d tel que les faisceaux inversibles correspondants n'aient pas de sections globales non nulles. L'objet de cette étude est de généraliser ce résultat à des fibrés vectoriels de rang quelconque (fini) sur X .

2. Fibrés de rang 1

Soient X la courbe, et g son genre. Si E est un fibré vectoriel sur X , nous noterons

$$h^0(E) = \dim H^0(X, E) \quad \text{et} \quad h^1(E) = \dim H^1(X, E),$$

où E désigne le faisceau localement libre associé à E .

Si E est de rang 1, il lui est canoniquement associé une classe de diviseurs sur X dont le degré noté $d = dg E$ sera aussi appelé degré de E . $h^0(E)$ sera aussi noté $h^0(D)$, où D est un diviseur associé à E .

(iii) si $g \leq d \leq 2g-2$, $h^0(E) = d+1-g$, $h^1(E) = 0$
 « en général »;

(iv) si $d \geq 2g-1$, $h^0(E) = d+1-g$, $h^1(E) = 0$,

où le terme « en général » signifie sur un ouvert dense de \mathbf{P}_d .

3. Fibrés vectoriels de rang quelconque : propriétés générales

Degré d'un fibré vectoriel. — Pour tout fibré E de rang r (noté $\text{rg } E$), on appellera degré de E ($\text{dg } E$) le degré de la puissance extérieure r -ième de E (notée $\det E$).

Pour toute suite exacte $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$, on a

$$\det E \simeq \det E' \otimes \det E'',$$

donc $\text{dg } E = \text{dg } E' + \text{dg } E''$. De même, la formule

$$\det(E \otimes E') = (\det E)^{\otimes r'} \otimes (\det E')^{\otimes r}$$

montre que

$$\text{dg } E \otimes E' = r' \text{ dg } E + r \text{ dg } E'$$

(où $r = \text{rg } E$ et $r' = \text{rg } E'$).

Clivages. — Soit E un fibré de rang r . Toute section méromorphe engendre un sous-fibré de rang 1. Donc on peut toujours définir un clivage

$$E_0 = (0) \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E,$$

où $\text{rg } E_i = i$.

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH. — Si E est de rang r et de degré d , en appliquant le théorème de Riemann-Roch aux quotients successifs d'un clivage, on obtient :

$$h^0(E) - h^1(E) = d + r(1 - g).$$

COROLLAIRE :

$$\text{Si } d < r(g-1), \quad h^1(E) \neq 0.$$

$$\text{Si } d > r(g-1), \quad h^0(E) \neq 0.$$

Dualité de Serre. — On a une dualité entre $H^0(X, E)$ et $H^1(X, E^* \otimes \mathbf{K})$ (Grothendieck [3]).

DÉFINITION. — Un fibré E sur X sera dit *indécomposable* s'il n'est pas somme directe de deux sous-fibrés propres.

Nous n'étudierons ici que des fibrés indécomposables. $\mathcal{E}(r, d)$ désignera l'ensemble des classes de fibrés indécomposables de rang r et de degré d .

Courbes de genre 0. — Un théorème de Grothendieck [2] permet d'affirmer que les seuls fibrés indécomposables sont les fibrés de rang 1, lesquels ont été étudiés au paragraphe 2.

Courbes de genre $g \geq 1$ (L'étude qui suit est due à ATIYAH [1] et à KOSZUL [4]). — Si (E_i) désigne un clivage d'un fibré E de rang r et de degré d , le degré des sous-fibrés de rang 1 de E est borné par sup ($\text{dg } E_i/E_{i-1}$), car si $L \subset E$ est un tel sous-fibré, il existe un morphisme non nul de L dans E_i/E_{i-1} pour un certain i .

DÉFINITION. — On appelle *clivage maximal* de E un clivage tel que, pour tout i , E_i/E_{i-1} soit un sous-fibré de degré maximum dans E/E_{i-1} . Tout fibré admet un clivage maximal.

LEMME. — Si E est indécomposable et si (E_i) , $i = 0, 1, \dots, r$, est un clivage maximal de E , alors, pour tout $i > 0$,

$$\text{dg}(E_i/E_{i-1}) \geq \text{dg } E_1 + 2(1-g)(i-1).$$

Montrons-le par récurrence sur i .

Considérons la suite exacte $0 \rightarrow E_i \rightarrow E \rightarrow E/E_i \rightarrow 0$. Cette extension est non triviale, donc $H^1(X, \mathbf{Hom}(E/E_i, E_i)) \neq 0$. [car les classes d'extensions sont en bijection avec $H^1(X, \mathbf{Hom}(E/E_i, E_i))$].

Donc $H^0(X, \mathbf{Hom}(E_i \otimes K^*, E/E_i)) \neq 0$, où K est le fibré canonique sur X . Soit f un homomorphisme non nul de $E_i \otimes K^*$ dans E/E_i , comme f est non nul, il existe $j \leq i$ tel que f induit un homomorphisme non nul de $E_j/E_{j-1} \otimes K^*$ dans E/E_i ; donc il existe un sous-fibré L' de rang 1 de E/E_i tel que

$$\begin{aligned} \text{dg } L' &\geq \text{dg}(E_j/E_{j-1} \otimes K^*) = \text{dg } E_j/E_{j-1} - 2j(g-1) \\ &\geq \text{dg } E_1 + 2(1-g)(j-1) + 2j(1-g) \end{aligned}$$

(par hypothèse de récurrence). Donc

$$\text{dg } L' \geq \text{dg } E_1 + 2j(1-g) \geq \text{dg } E_1 + 2i(1-g).$$

Le clivage étant maximal,

$$\text{dg } E_{i+1}/E_i \geq \text{dg } L' \geq \text{dg } E_1 + 2i(1-g).$$

PROPOSITION 2. — Soit E un fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré d , et soit L un sous-fibré de rang 1 de E , alors

$$dg L \leq d/r + (r-1)(g-1).$$

Cette proposition résulte du lemme précédent en ajoutant les inégalités obtenues pour $i = 1, 2, \dots, r$.

COROLLAIRE. — Si X est une courbe de genre g et E un fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré d sur X :

(i) si $d < r(1-r)(g-1)$, $h^0(E) = 0$;

(ii) Si $d > r(1+r)(g-1)$, $h^1(E) = 0$.

En effet, si $d < r(1-r)(g-1)$, tout sous-fibré de rang 1 de E est de degré strictement négatif d'après la proposition. Le deuxième résultat se déduit du premier par dualité de Serre.

PROPOSITION 3. — Si $E \xrightarrow{f} F$ est un morphisme non nul de fibrés vectoriels sur X , on a la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & E_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longleftarrow & F_2 & \longleftarrow & F & \longleftarrow & F_1 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

où $f = i \circ \varphi \circ p$, $\text{rg } E_2 = \text{rg } F_1$, et φ est de rang maximum (c'est-à-dire $\det \varphi \neq 0$).

Cela résulte des propriétés des modules projectifs sur les anneaux de Dedekind.

Fibrés simples. — On dit qu'un fibré vectoriel E est simple si $\dim H^0(X, \text{End } E) = 1$.

Un fibré simple est évidemment indécomposable.

Existence d'une valeur « générale » de $h^0(E)$ et $h^1(E)$.

PROPOSITION 4. — Pour tout couple d'entiers (r, d) (avec $r > 0$), il existe une famille $\mathcal{A}(r, d)$ de classes de fibrés vectoriels, comprenant $\mathcal{E}(r, d)$, qui est paramétrée par une variété algébrique $S_{r,d}$ irréductible et lisse.

La démonstration de cette proposition figure dans [6], § 3, et utilise un théorème d'Atiyah ([1], th. 3).

Le théorème de semi-continuité de Grauert nous permet alors d'affirmer que $h^0(E)$ [resp. $h^1(E)$] est constant sur un ouvert (dense) de $S_{r,d}$, et que la « valeur générale » ainsi définie est égale à la plus petite valeur possible pour $h^0(E)$ [resp. $h^1(E)$] quand E est un fibré de $\mathcal{A}(r, d)$.

De plus, les fibrés simples, étant définis par $h^0(E^* \otimes E) = 1$, correspondent à un ouvert de $S_{r,d}$. Nous montrerons que cet ouvert est non vide. La valeur générale de $h^0(E)$ pour E dans $\mathcal{A}(r, d)$ sera donc aussi la plus petite valeur de $h^0(E)$ pour E simple de rang r et de degré d .

Remarque 1. — Tout fibré simple étant indécomposable, la valeur générale trouvée pourra être considérée comme valeur générale de $h^0(E)$ pour E dans $\mathcal{E}(r, d)$.

Remarque 2. — Dans le cas $g = 1$, une étude détaillée faite par ATIYAH [1] et KOSZUL [4] montre que, pour tout fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré 0, il existe un unique sous-fibré de rang d et de degré 0, et qu'on définit ainsi une bijection des classes de fibrés indécomposables de rang r et de degré 0 sur les classes de fibrés de rang 1 et de degré 0. De plus, si L est le fibré de rang 1 associé à E , E possède un clivage dont tous les quotients sont isomorphes à L (en particulier E n'est pas simple) : Donc, on peut énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 5. — *Si $g = 1$,*

(i) *Il existe une bijection entre les points de la jacobienne de X et les classes de fibrés indécomposables de rang r et de degré 0.*

(ii) *Pour toute classe de fibrés E de rang r et de degré 0, sauf une (celle correspondant à l'élément neutre de la jacobienne), on a $h^0(E) = h^1(E) = 0$.*

D'autre part, le corollaire à la proposition 2 nous montre que si $g = 1$ le seul cas à étudier est $d = 0$. Dans la suite, nous pourrions donc supposer $g \geq 2$. Nous allons, pour tout rang r et tout degré d , construire un fibré vectoriel simple E de rang r et de degré d et, dans le cas où $d \leq r(g-1)$, nous montrerons qu'on peut construire E de manière qu'il n'ait pas sections globales.

4. Construction de fibrés simples sans sections globales

Plaçons-nous sur une courbe X de genre $g \geq 2$, et posons $d = kr + \rho$ avec $0 \leq \rho < r$. Soit L un fibré vectoriel sur X de rang 1 et de degré $k+1$. Soient L_1 et L_2 deux fibrés de rang 1 et de degré k non isomorphes.

Si $\rho > 0$, nous supposons, de plus, que

$$h^0(L_1^* \otimes L) = h^0(L_2^* \otimes L) = 0.$$

Il est possible de trouver de tels fibrés car $dg(L_i^* \otimes L) = 1$, et d'après le théorème 1, la valeur générale de $h^0(E)$ est 0 si $d = r = 1$.

Considérons la suite d'extensions non triviales ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} & & E_1 = L_1, & & & & \\ 0 \rightarrow & E_1 & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & L_2 \rightarrow & 0, \\ & \dots & & \dots & & & \\ 0 \rightarrow & E_{r-\rho-1} & \rightarrow & E_{r-\rho} & \rightarrow & L_2 \rightarrow & 0, \\ 0 \rightarrow & E_{r-\rho} & \rightarrow & E_{r-\rho+1} & \rightarrow & L \rightarrow & 0, \\ & \dots & & \dots & & & \\ 0 \rightarrow & E_{r-1} & \rightarrow & E_r & \rightarrow & L \rightarrow & 0, \end{array}$$

(On n'utilise le fibré L que si $\rho \neq 0$.)

Les extensions de L_2 par E_i ($i < r - \rho$) sont classées par $H^1(X, L_2^* \otimes E_i)$, or $dg(L_2^* \otimes E_i) = 0$ et $rg(L_2^* \otimes E_i) = i$, donc $h^1(L_2^* \otimes E_i) \neq 0$ d'après Riemann-Roch. Il existe donc une extension non triviale de L_2 par E_i . De même,

$$dg(L^* \otimes E_j) = \rho - r \quad \text{et} \quad rg(L^* \otimes E_j) = j \quad (j \geq r - \rho),$$

donc $h^1(L^* \otimes E_j) \neq 0$. Soit $E = E_r$, on a

$$rg E = r \quad \text{et} \quad dg E = d = kr + \rho.$$

Si $d \leq r(g-1)$, alors $k \leq g-1$, donc on peut prendre

$$h^0(L_1) = h^0(L_2) = 0;$$

de plus, si $\rho \neq 0$, $k < g-1$, donc on peut prendre $h^0(L) = 0$ (d'après le théorème 1). Dans ce cas, on obtient $h^0(E) = 0$.

LEMME :

- (i) *Tout sous-fibré de rang 1 de E est de degré au plus k .*
- (ii) *Tout sous-fibré de rang 1 de $E_{r-\rho}$ différent de E_1 est de degré au plus $k-1$.*
- (iii) *Le seul sous-fibré de rang 1 de E , isomorphe à L_1 , est E_1 .*
- (iv) *Il n'y a pas de sous-fibré de rang 1 de E isomorphe à L_2 .*

En effet, si L' est un sous-fibré de rang 1 de E et si i est le plus petit indice tel que $L' \subset E_i$, le morphisme composé $L' \rightarrow E_i \rightarrow E_i/E_{i-1}$ est non nul (si $i \geq 2$). Donc

$$\text{dg } L' \leq \text{dg } E_i/E_{i-1} \leq k+1.$$

Si $\text{dg } L' = k+1$, $L' \simeq E_i/E_{i-1}$, et l'extension de E_i/E_{i-1} par E_{i-1} serait scindée. Donc $\text{dg } L' \leq k$. Pour la même raison, si $i \leq r-\rho$, $\text{dg } E_i/E_{i-1} = k$, donc $\text{dg } L' \leq k-1$ si $L' \neq E_1$. D'où les deux premiers énoncés.

Supposons que L' soit isomorphe à L_1 , et soit i comme ci-dessus, tel que $L' \subset E_i$ et $L' \not\subset E_{i-1}$. Comme $h^0(L_1^* \otimes L) = 0$ et $h^0(L_1^* \otimes L_2) = 0$, il n'existe pas de morphisme non nul de L' dans E_i/E_{i-1} , si $i \geq 2$, donc $i = 1$, et $L' = E_1$. Un raisonnement identique démontre (iv).

PROPOSITION 6. — E est simple.

Soit $\varphi : E \rightarrow E$. La restriction de φ à E_1 , si elle n'est pas nulle se factorise (proposition 3) par un sous-fibré de rang 1, L' , de E avec $\text{dg } L' \geq \text{dg } E_1 = k$. D'après le lemme, $\text{dg } L' = k$, et on en déduit que $L' \simeq E_1$, donc $L' = E_1$. E_1 étant simple, tout endomorphisme de E_1 est une homothétie. Donc $\varphi - \lambda I$ est nul sur E_1 . On est ramené à φ nul sur E_1 , c'est-à-dire à $\bar{\varphi}_1 : E/E_1 \rightarrow E$. La restriction de $\bar{\varphi}_1$ à E_2/E_1 , si elle est non nulle, se factorise par un sous-fibré L'' de E de rang 1 et $\text{dg } L'' \geq \text{dg } E_2/E_1 = k$, donc $\text{dg } L'' = k$ et $L'' \simeq L_2$, ce qui est impossible d'après le lemme. Donc $\bar{\varphi}_1$ est nulle sur E_2/E_1 : φ se factorise par $\bar{\varphi}_2 : E/E_2 \rightarrow E$. Par récurrence on montre que φ se factorise par $\bar{\varphi}_{r-\rho} : E/E_{r-\rho} \rightarrow E$. La restriction de $\bar{\varphi}_{r-\rho}$ à $E_{r-\rho+1}/E_{r-\rho}$, si elle est non nulle, se factorise par un sous-fibré de E de rang 1 et degré $k+1$, ce qui est impossible. En continuant ainsi, on voit que φ est nul. D'où le résultat.

Les propositions 5 et 6 nous permettent alors d'énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. — Si $g \geq 2$, pour tout rang et tout degré, il existe un fibré vectoriel simple.

THÉORÈME 3. — Si X est une courbe projective lisse de genre g sur un corps algébriquement clos, la valeur générale de $h^0(E)$, pour un fibré vectoriel indécomposable E sur X de rang r et de degré $d \leq r(g-1)$, est $h^0(E) = 0$.

COROLLAIRE. — La valeur générale de $h^0(E)$ pour un fibré vectoriel sur X indécomposable, de rang r et de degré $d \geq r(g-1)$, est $h^0(E) = d+r(1-g)$.

Ces résultats peuvent se résumer dans le tableau suivant si $g \geq 1$:

(i) $d < r(1-r)(g-1)$:

$$h^0(E) = 0,$$

$$h^1(E) = -d + r(g-1);$$

(ii) $r(1-r)(g-1) \leq d < r(g-1)$:

$$h^0(E) = 0 \quad \text{en général,}$$

$$h^1(E) = -d + r(g-1) \text{ en général,}$$

$$h^1(E) \neq 0;$$

(iii) $d = r(g-1)$:

$$h^0(E) = 0 \quad \text{en général,}$$

$$h^1(E) = 0 \quad \text{en général;}$$

(iv) $r(g-1) < d \leq r(r+1)(g-1)$:

$$h^0(E) = d + r(1-g) \text{ en général,}$$

$$h^1(E) = 0 \quad \text{en général,}$$

$$h^0(E) \neq 0;$$

(v) $r(r+1)(g-1) < d$:

$$h^0(E) = d + r(1-g),$$

$$h^1(E) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M. F.). — Vector bundles over on elliptic curve, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 7, 1957, p. 414-452.
- [2] GROTHENDIECK (A.). — Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *Amer. J. of Math.*, t. 79, 1957, p. 121-138.
- [3] GROTHENDIECK (A.). — Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, *Séminaire Bourbaki*, 9^e année, 1956-1957, n° 149, 25 p.
- [4] KOSZUL (J.-L.). — Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques, *Séminaire Bourbaki*, 10^e année, 1957-1958, n° 154, 10 p.
- [5] MUMFORD (D.). — *Abelian varieties*. — Bombay, Tata Institute, 1970 (*Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics*, 5).
- [6] NARASIMHAN (M. S.) et SESHADRI (C. S.). — Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Annals of Math.*, Series 2, t. 82, 1965, p. 540-567.
- [7] SERRE (J.-P.). — *Groupes algébriques et corps de classes*. — Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 1264; *Publ. Inst. math. Univ. Nancago*, 7).

(Texte reçu le 10 novembre 1973.)

François DIGNE,
104, boulevard Arago,
75014 Paris.