

BULLETIN DE LA S. M. F.

ROBERT CAUTY

Rétractions dans les espaces stratifiables

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 129-149

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__129_0

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉTRACTIONS DANS LES ESPACES STRATIFIABLES

PAR

ROBERT CAUTY

RÉSUMÉ. — Ce texte est consacré à l'étude des rétractes absolus de voisinage dans la catégorie des espaces stratifiables [R. A. V. (stratifiable)]. On associe à tout espace stratifiable X un espace stratifiable $Z(X)$, contenant X comme fermé, tel que X soit un R. A. V. (stratifiable) si, et seulement si, c'est un rétracte de voisinage de $Z(X)$; à l'aide de cette construction, on étend aux espaces stratifiables plusieurs résultats qui avaient été démontrés pour les espaces métrisables en utilisant le théorème de plongement d'Eilenberg-Wojdyslawski. On développe une méthode permettant de ramener l'étude du type d'homotopie d'un quotient X/A , où A est un compact d'un R. A. V. (stratifiable) X , au cas où X est un espace métrique complet.

1. Introduction

La théorie des rétractes n'a atteint un développement satisfaisant que pour les espaces métrisables; nombre de résultats, parmi les plus importants, ne sont connus que pour ces espaces (*voir* [11]). Cependant, pour les besoins de la topologie algébrique, il serait utile de pouvoir étendre ces résultats à une classe plus vaste contenant également les CW-complexes, et stables par les constructions usuelles de la topologie algébrique. A cette fin, la classe des espaces stratifiables (*voir* ci-dessous la définition) semble présenter quelques avantages. En effet, d'une part les résultats de [1] montrent qu'elle est stable par de nombreuses constructions de la topologie algébrique (celles qui n'utilisent pas les espaces de chemins), d'autre part certains théorèmes importants de la théorie des rétractes lui ont déjà été étendus : le théorème de Dugundji ([1], th. 4.3) et le théorème de Borsuk-Whitehead-Hanner sur l'adjonction des rétractes absolus de voisinage (R. A. V.) [6]. (Dans ce dernier cas, la situation est même meilleure que pour les espaces métrisables puisque la classe des espaces stratifiables, contrairement à celle des espaces métrisables, est stable par adjonction.) En outre, on sait que tout CW-complexe est un R. A. V. (stratifiable) [5]. Nous nous proposons ici d'étendre aux espaces stratifiables d'autres résultats de la théorie des rétractes. Au paragraphe 2, nous introduisons une construction qui est un substitut du théorème de

plongement d'Eilenberg-Wojdyslawski, et nous en donnons quelques applications. Au paragraphe 3, nous montrons que, si X est un R. A. V. (stratifiable), il y a une distance continue d sur X telle que l'espace topologique associé X_d soit un R. A. V. (métrisable) et que l'identité $i : X \rightarrow X_d$ soit une équivalence homotopique; nous utilisons ceci pour ramener l'étude du type d'homotopie de X/A , où A est un compact de X , au cas où X est métrique complet, cas où l'on dispose d'outils très puissants, par exemple la théorie des variétés de dimension infinie.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Un espace X est dit *stratifiable* [1] s'il est séparé et si l'on peut faire correspondre à tout ouvert U de X une suite $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ d'ouverts de X de façon que :

- (a) $\bar{U}_n \subset U$ quel que soit n ,
- (b) $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$,
- (c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ quel que soit n .

Toutes les propriétés de ces espaces que nous aurons à utiliser se trouvent dans [1].

Soit Q une classe d'espaces topologiques. Nous dirons qu'un espace X est un *rétracte absolu* pour la classe Q , ou R. A. (Q) [resp. un *rétracte absolu de voisinage* pour la classe Q , ou R. A. V. (Q)] si X appartient à Q et si, pour tout espace Y appartenant à Q , tout fermé de Y homéomorphe à X est un rétracte (resp. rétracte de voisinage) de Y . Il est connu qu'un espace métrisable X est un R. A. (métrisable) [resp. R. A. V. (métrisable)] si, pour tout fermé A d'un espace métrisable Y , toute fonction continue de A dans X se prolonge à Y (resp. à un voisinage de A dans Y) (voir [11], th. 3.3.2); le résultat analogue pour les espaces stratifiables a été démontré par BORGES ([1], cor. 6.3). D'après le théorème 3.4.1 (a) de [11], tout R. A. V. (métrisable) est un R. A. V. (stratifiable).

Un espace topologique X est dit U. L. C. s'il y a un voisinage U de la diagonale Δ de $X \times X$ et une fonction continue $\varphi : U \times I \rightarrow X$ vérifiant :

- (a) $\varphi(x, y, 0) = x$, $\varphi(x, y, 1) = y$ quel que soit (x, y) dans U , et
- (b) $\varphi(x, x, t) = x$ quels que soient x et t . Il est facile de voir que tout R. A. V. (stratifiable) est U. L. C. [En effet, ceci résulte du fait que, si X est un R. A. V. (stratifiable), la fonction φ , définie sur le fermé $A = (X \times X \times \{0, 1\}) \cup (\Delta \times I)$ de l'espace stratifiable $X \times X \times I$ par les conditions (a) et (b), se prolonge à un voisinage de A dans $X \times X \times I$].

Si $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X , et C un sous-ensemble de X , nous noterons $\text{St}(C, \mathcal{U})$ la réunion des éléments de \mathcal{U} qui rencontrent C , et nous poserons

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\Delta &= \{ \text{St}(x, \mathcal{U}); x \in X \}, \\ \text{St}(\mathcal{U}) &= \{ \text{St}(U, \mathcal{U}); U \in \mathcal{U} \}. \end{aligned}$$

Nous noterons $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ le nerf de \mathcal{U} . Une fonction continue $\varphi : X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$ est dite canonique si, pour tout sommet α de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, $\varphi^{-1}(\text{St } \alpha)$ est contenu dans U_α ($\text{St } \alpha$ désigne l'étoile ouverte du sommet α). Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ sont deux recouvrements ouverts de X , et si \mathcal{U} est plus fin que \mathcal{V} , une application canonique de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ est une application simpliciale φ telle que $U_\alpha \subset V_{\varphi(\alpha)}$ pour tout sommet α de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

2. Une construction-test

Le développement de la théorie des rétractes dans le cas métrisable a été rendu possible par le théorème de plongement d'Eilenberg-Wojdyslawski, qui permet d'utiliser les propriétés géométriques des espaces normés. Malheureusement, on ne dispose d'aucun résultat analogue pour les espaces stratifiables. Nous allons introduire une construction qui permet, dans de nombreux cas, de contourner cette difficulté. A tout espace stratifiable X , elle en associe canoniquement un autre, $Z(X)$, contenant X comme fermé, et tel que X soit un R. A. V. (stratifiable) si, et seulement si, c'est un rétracte de voisinage de $Z(X)$.

Étant donné un espace topologique X , nous noterons $M(X)$, ou simplement M , le complexe simplicial plein dont les sommets sont les points de X . Il y a une bijection canonique α du 0-squelette M^0 de M sur X . Soit $Z' = M \cup_\alpha X$ l'espace d'adjonction, et soit $p' : M \cup X \rightarrow Z'$ la projection canonique; à l'aide de p' , nous identifierons, comme d'habitude, X à son image dans Z' . La restriction de p' à M est une bijection de M sur Z' ; nous dirons, par abus de langage, qu'un simplexe σ de M est contenu dans un sous-ensemble U de Z' si $p'(\sigma)$ est contenu dans U . Nous noterons $Z(X)$, ou simplement Z , l'espace topologique ayant même ensemble sous-jacent que Z' , et dont la topologie a pour base les ensembles U , ouverts dans Z' , et vérifiant la condition suivante :

(★) Si σ est un simplexe de M dont les sommets sont contenus dans $U \cap X$, alors σ est contenu dans U .

Nous noterons p l'application canonique de $M \cup X$ sur Z ; cette application est continue. Si U est un sous-ensemble de X et si $0 < \varepsilon < 1$, nous noterons $M(U, \varepsilon)$ [resp. $\bar{M}(U, \varepsilon)$] l'ensemble des points z de Z de la forme

$$z = p((1 - t)x + ty),$$

où x appartient à un simplexe de M dont tous les sommets sont contenus dans U , et où $0 \leq t < \varepsilon$ (resp. $0 \leq t \leq \varepsilon$). Alors,

$$\bar{M}(U, \varepsilon) \cap X = M(U, \varepsilon) \cap X = U,$$

et l'on vérifie que $M(U, \varepsilon)$ est ouvert dans Z si U est ouvert dans X , et que $\overline{M}(U, \varepsilon)$ est fermé dans Z si U est fermé dans X . Nous en déduisons que la restriction de p à X est un homéomorphisme de X sur un sous-espace fermé de Z ; nous identifierons donc encore X à ce sous-espace.

La restriction de p à $N = M \setminus M^0$ est un homéomorphisme de N sur l'ouvert $Z \setminus X$ de Z ; nous identifierons ainsi N à $Z \setminus X$. La projection p induit une bijection de M sur Z ; nous utiliserons cette bijection pour transposer les notions affines de M à Z , en donnant ainsi un sens aux notations, abusives mais dépourvues d'ambiguïté, du type $(1-t)x + ty$ ($x, y \in Z, 0 \leq t \leq 1$).

1.1. LEMME. — *Si X est stratifiable, alors $Z(X)$ est stratifiable.*

Démonstration. — Montrons d'abord que Z est séparé. Il est clair que deux points de N peuvent être séparés. Soient x, y deux points distincts de X , et soient U et V des voisinages ouverts disjoints de x et y dans X ; alors $M(U, 1/3)$ et $M(V, 1/3)$ sont des voisinages disjoints de x et y dans Z . Soient enfin x un point de X , et y un point de N , et soit σ le simplexe de M dont l'intérieur contient y . La dimension de σ est ≥ 1 , et la composante δ de y sur x est < 1 . Soit U un voisinage ouvert de x dans X dont l'adhérence ne contient aucun sommet de σ distinct de x , et soit $0 < \eta < 1 - \delta$. Alors, $M(U, \eta)$ et $Z \setminus \overline{M}(\overline{U}, \eta)$ sont des voisinages disjoints de x et y respectivement dans Z . Ceci montre que Z est séparé.

Puisque X et M sont stratifiables, Z' est stratifiable ([1], th. 6.2); soit $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^\infty$ une stratification croissante de Z' (i. e. $U_n \subset U_{n+1}$ quel que soit n). D'après le lemme 2.1 de [1], on peut faire correspondre à tout couple (A, U) de sous-ensembles de Z' , où A est fermé et U ouvert dans Z' , un ouvert $U(A)$ contenu dans U de façon que :

(a) $A \subset B$ et $U \subset V$ impliquent $U(A) \subset V(B)$,

(b) $A \cap U \subset U(A) \subset \overline{U(A)} \subset A \cup U$.

Puisque X est stratifiable, $X \times X$ l'est aussi, donc $X \times X$ est parfaitement normal, et il y a une fonction continue $\lambda : X \times X \rightarrow I (=]0, 1[)$ telle que $\lambda^{-1}(0)$ soit la diagonale Δ de $X \times X$. Par définition, le diamètre d'un sous-ensemble A de X sera $\sup_{x, y \in A} \lambda(x, y)$, et le diamètre d'un simplexe de M sera le diamètre de l'ensemble de ses sommets. Pour tout sous-ensemble F de X et $0 \leq \delta \leq 1$, nous noterons $L(F, \delta)$ l'ensemble des points de Z qui peuvent se mettre sous la forme $(1-t)x + ty$, où x appartient à un simplexe σ de diamètre $\leq \delta$ dont tous les sommets sont contenus dans F , et où $t \leq \delta$. Si F est fermé dans X , alors $L(F, \delta)$ est fermé dans Z' .

Si U est un ouvert de Z , posons $U^* = U \setminus X$, et notons $A_n(U)$ la réunion de tous les simplexes fermés de M contenus dans U et dont les sommets sont contenus dans $\overline{U'_n \cap X}$; alors $A_n(U)$ est fermé dans Z' . Posons, pour $n \geq 1$,

$$U_n = (U'_n \cup U^*(A_n(U))) \setminus L\left(X \setminus U'_n, \frac{1}{2n}\right).$$

Nous allons montrer que $U \mapsto \{U_n\}_{n=1}^\infty$ est une stratification de Z . Il est clair que U_n est ouvert dans Z' quel que soit n , donc $U_n \cap N$ est ouvert dans Z . Soit x un point de $X \cap U_n$; alors x appartient à U'_n . Soit V un voisinage ouvert de x dans Z , vérifiant la condition (\star) , contenu dans U et tel que $V \cap X$ soit contenu dans $U'_n \cap X$. Soit W la réunion des étoiles ouvertes des sommets de M contenus dans $V \cap X$, et soit $O = W \cap U_n$. Alors O est ouvert dans Z' , et $O \cap X = V \cap X$, donc, si σ est un simplexe de M dont les sommets sont contenus dans $O \cap X$, alors σ est contenu dans W , ainsi que dans V , donc dans U . Puisque $V \cap X$ est contenu dans $U'_n \cap X$, σ est contenu dans $A_n(U)$, donc $\sigma \cap N$ est contenu dans $U^*(A_n(U))$. Enfin, il est clair que σ ne rencontre pas $L(X \setminus U'_n, 1/2n)$; par suite, σ est contenu dans U_n , donc dans O . Ceci montre que O vérifie (\star) , donc est ouvert dans Z . Puisque U_n contient O , c'est un voisinage de x ; les U_n sont donc ouverts dans Z .

Soit x un point n'appartenant pas à U . L'adhérence de U'_n et de $U^*(A_n(U))$ dans Z' ne contient pas x . Si x appartient à N , on peut donc trouver un voisinage V de x dans Z' , contenu dans N et disjoint de U_n ; V est encore un voisinage de x dans Z , donc x n'appartient pas à l'adhérence de U_n dans Z . Si x appartient à X , on peut trouver un voisinage ouvert V de x dans X , disjoint de $\overline{U'_n \cap X}$ et de diamètre $< 1/2n$; alors $M(V, 1/3n)$ est contenu dans $L(X \setminus U'_n, 1/2n)$, donc est disjoint de U_n . Ceci montre que l'adhérence de U_n dans Z est contenue dans U .

Soit x un point de U . On peut trouver un entier n tel que x appartienne à U'_n . Si x est dans X , il n'appartient pas à $L(X \setminus U'_n, 1/2n)$, donc il appartient à U_n . Si x est dans N , soit $\sigma = (x_0, \dots, x_m)$ le simplexe de M dont l'intérieur contient x , et soit $0 < \delta < \lambda(x_i, x_j)$ pour $i, j = 0, \dots, m, i \neq j$. Alors, si q est un entier $> n$ tel que $1/2q < \delta$, x appartient à U'_q puisque la stratification de Z' est croissante, et x n'appartient pas à $L(X \setminus U'_q, 1/2q)$, donc x appartient à U_q . Ceci montre que $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$.

Enfin, il est clair que $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ quel que soit n .

C. Q. F. D.

1.2. LEMME. — Soit X un espace topologique arbitraire. Si Y est un espace stratifiable, A un fermé de Y , et f une fonction continue de A dans X , alors il y a une fonction continue $F : Y \rightarrow Z(X)$ prolongeant f .

La démonstration suit celle de la généralisation du théorème de Dugundji, due à BORGES ([1], th. 4.3). Si U est un ouvert de Y , et x un point de U , soit $n(U, x)$ le plus petit entier n tel que U_n contienne x (la stratification de Y étant supposée croissante), et soit

$$U_x = U_{n(U,x)} \setminus \overline{(X \setminus \{x\})_{n(U,x)}}.$$

On sait (cf. [1], lemme 4.2) que

- 1° U_x est un voisinage ouvert de x ;
- 2° Si $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ et si $n(U, x) \leq n(V, y)$, alors y appartient à U ;
- 3° Si $U_x \cap V_y \neq \emptyset$, alors x appartient à V ou y appartient à U .

Soient $W = Y \setminus A$ et $W' = \{x \in W; x \in U_y \text{ pour un } y \in A \text{ et un ouvert } U \text{ contenant } y\}$. Pour tout point x de W' , soit

$$m(x) = \max \{n(U, y); y \in A \text{ et } x \in U_y\}.$$

Alors, $m(x) < n(W, x)$ (voir [1], démonstration du théorème 4.3). Soit $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini (par rapport à W) de W plus fin que $\{W_x\}_{x \in W}$. Pour tout i dans I , soit x_i un point de W tel que W_{x_i} contienne V_i . Si x_i appartient à W' , soient a_i un point de A , et U_i un ouvert contenant a_i , tels que x_i appartienne à $(U_i)_{a_i}$ et que $n(U_i, a_i) = m(x_i)$; si x_i n'appartient pas à W' , soit a_i le point fixé a de A . Soit $\{p_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à \mathfrak{V} , et définissons $F: Y \rightarrow Z$ par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A), \\ \sum_{i \in I} p_i(x) f(a_i) & (x \in W). \end{cases}$$

La restriction de F à W est continue en tant que fonction à valeurs dans le complexe simplicial M . L'application canonique p étant continue, F est continue en tout point de W . Soit y un point de A , et soit U un voisinage ouvert de $f(y)$ dans Z ; U contient un voisinage ouvert V de $f(y)$ vérifiant (\star) . Soit N un voisinage ouvert de y dans Y tel que $f(A \cap N) \subset V$. Comme dans la démonstration du théorème 4.3 de [1], on vérifie que $F((N_y)_y)$ est contenu dans V . Puisque $(N_y)_y$ est un voisinage de y dans Y , ceci montre que F est aussi continue aux points de A .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des lemmes 1.1 et 1.2.

1.3. THÉORÈME. — *Un espace stratifiable X est un R. A. (stratifiable) [resp. R. A. V. (stratifiable)] si, et seulement si, c'est un rétracte (de voisinage) de $Z(X)$.*

Soit \mathfrak{U} un recouvrement ouvert d'un espace X . Nous dirons que deux fonctions continues f et g de Y dans X sont proches d'ordre \mathfrak{U} si, pour

tout point y de Y , $f(y)$ et $g(y)$ sont contenus dans un même élément de \mathcal{U} ; nous dirons que f et g sont \mathcal{U} -homotopes s'il existe une homotopie $h : Y \times I \rightarrow X$ entre f et g , telle que, pour tout point y de Y , $h(\{y\} \times I)$ soit contenu dans un élément de \mathcal{U} . Enfin, nous dirons qu'un espace Y \mathcal{U} -domine X s'il y a des fonctions continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ soit \mathcal{U} -homotope à l'identité.

1.4. LEMME. — Soit X un R. A. V. (stratifiable). Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il y a un recouvrement ouvert \mathcal{V} de X tel que, pour tout espace topologique Y , deux applications proches d'ordre \mathcal{V} quelconques de Y dans X , f et g , soient \mathcal{U} -homotopes par une homotopie qui est constante sur l'ensemble des points où elles coïncident.

Ceci est une conséquence facile du fait que X est U. L. C.

1.5. THÉORÈME. — Soit X un R. A. V. (stratifiable). Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il y a un complexe simplicial qui \mathcal{U} -domine X .

Démonstration. — D'après le lemme 1.4, il suffit de montrer que, pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il y a un complexe simplicial K et des fonctions continues $f : X \rightarrow K$ et $g : K \rightarrow X$ telles que $g \circ f$ et id_X soient proches d'ordre \mathcal{U} . D'après le théorème 1.3, il y a un voisinage O de X dans Z et une rétraction r de O sur X . Pour tout point x de X , soit U_x un élément de \mathcal{U} contenant x , et soit W_x un voisinage ouvert de x dans Z , vérifiant (\star) , contenu dans O et tel que $r(W_x)$ soit contenu dans U_x . Alors, $\mathcal{W} = \{W_x \cap X\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X . Soit $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $\text{St}(\mathcal{V})$ soit plus fin que \mathcal{W} (voir [9], th. 5.1.5); nous supposons les éléments de \mathcal{V} non vides. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{V})$ une fonction canonique. Pour chaque α dans A , choisissons un point x_α de V_α , et soit $\psi : \mathcal{S}(\mathcal{V}) \rightarrow M$ l'application simpliciale envoyant α sur x_α . Si $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est un simplexe de $\mathcal{S}(\mathcal{V})$, alors $V_{\alpha_0} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \neq \emptyset$, donc $V_{\alpha_0} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$ est contenu dans un élément $W_y \cap X$ de \mathcal{W} . Puisque W_y vérifie (\star) , le simplexe $(x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n})$ de M est contenu dans W_y , donc dans O ; comme $\psi((\alpha_0, \dots, \alpha_n))$ est contenu dans ce simplexe, la fonction

$$g = r \circ \psi : \mathcal{S}(\mathcal{V}) \rightarrow X$$

est bien définie. Si x est un point de X , et si $\varphi(x)$ appartient au simplexe ouvert de sommets $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, alors x appartient à $V_{\alpha_0} \cap \dots \cap V_{\alpha_n}$, et il y a un y tel que $V_{\alpha_0} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \subset W_y \cap X \subset U_y$. D'après ce qui précède, $\psi(\varphi(x))$ appartient à W_y , donc $g(\varphi(x))$ est dans U_y , ce qui montre que id_X et $g \circ \varphi$ sont proches d'ordre \mathcal{U} .

C. Q. F. D.

Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert d'un espace topologique X . Si L est un sous-complexe d'un complexe simplicial K , nous dirons qu'une fonc-

tion continue f de L dans X est petite d'ordre \mathfrak{u} si, pour tout simplexe σ de K , $f(\sigma \cap L)$ est contenu dans un élément de \mathfrak{u} .

1.6. THÉORÈME. — Soit X un R. A. V. (stratifiable). Pour tout recouvrement ouvert \mathfrak{u} de X , il y a un recouvrement ouvert \mathfrak{v} de X tel que, si L est un sous-complexe d'un complexe simplicial K contenant tous les sommets de K , alors toute fonction petite d'ordre \mathfrak{v} de L dans X se prolonge en une fonction petite d'ordre \mathfrak{u} de K dans X .

Démonstration. — Soit $\mathfrak{w} = \{W_x \cap X\}_{x \in X}$ comme dans la démonstration du théorème 1.5. Soient alors K un complexe simplicial, et $f: K^0 \rightarrow X$ une fonction petite d'ordre \mathfrak{w} définie sur le 0-squelette de K . Si (p_0, \dots, p_n) est un simplexe de K , il y a un x tel que $W_x \cap X$ contienne $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$, donc le simplexe $(f(p_0), \dots, f(p_n))$ de M est contenu dans O , et $r((f(p_0), \dots, f(p_n)))$ est contenu dans U_x . Ceci montre que la fonction $g: K \rightarrow X$, définie par

$$g(\sum_i x_i p_i) = r(\sum_i x_i f(p_i)), \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad \sum_i x_i = 1,$$

est bien définie et petite d'ordre \mathfrak{u} . Par conséquent, pour tout recouvrement ouvert \mathfrak{u} de X , on peut trouver un \mathfrak{w} vérifiant la conclusion du théorème chaque fois que L est le 0-squelette de K .

Passons au cas général. Puisque X est paracompact, il y a un recouvrement ouvert \mathfrak{u}_1 de X tel que $\text{St}(\mathfrak{u}_1)$ soit plus fin que \mathfrak{u} (voir [9], th. 5.1.5). Soit \mathfrak{u}_2 un recouvrement ouvert de X plus fin que \mathfrak{u}_1 tel que deux applications proches d'ordre \mathfrak{u}_2 d'un espace topologique arbitraire dans X soient \mathfrak{u}_1 -homotopes par une homotopie qui est constante sur l'ensemble des points où elles coïncident. Soit \mathfrak{u}_3 un recouvrement ouvert de X tel que $\text{St}(\mathfrak{u}_3)$ soit plus fin que \mathfrak{u}_2 . Enfin, soit \mathfrak{v} un recouvrement ouvert de X tel que, si K est un complexe simplicial, toute fonction petite d'ordre \mathfrak{v} de K^0 dans X se prolonge en une fonction petite d'ordre \mathfrak{u}_3 de K dans X .

Soient K un complexe simplicial, L un sous-complexe de K contenant K^0 , et $f: L \rightarrow X$ une fonction petite d'ordre \mathfrak{v} . Alors, la restriction f_0 de f à K^0 se prolonge en une application $k: K \rightarrow X$ petite d'ordre \mathfrak{u}_3 . Soient x un point de L , σ le simplexe de K dont l'intérieur contient x , V_1 un élément de \mathfrak{v} contenant $f(\sigma \cap L)$, U_1 un élément de \mathfrak{u}_3 contenant V_1 , et U_2 un élément de \mathfrak{u}_3 contenant $k(\sigma)$. Alors, si p est un sommet de σ , $U_1 \cap U_2$ contient $k(p) = f(p)$, donc $U_1 \cup U_2$ est contenu dans un élément de \mathfrak{u}_2 . Ceci montre que f et $k|_L$ sont proches d'ordre \mathfrak{u}_2 , donc il y a une \mathfrak{u}_1 -homotopie h' entre f et $k|_L$ qui est constante sur K^0 . Puisque X est un R. A. V. (stratifiable) et que tout CW-complexe est stratifiable, un argument classique ([11], lemme 4.2.1) permet de trouver un prolongement h de h' à $K \times I$. Soit O l'ensemble des points x de K

tels que $h(x \times I)$ soit contenu dans un élément de \mathfrak{U}_1 ; c'est un voisinage ouvert de L , donc il y a une fonction continue α de K dans I telle que $\alpha(L) = 0$ et $\alpha(K \setminus O) = 1$. Définissons $g: K \rightarrow X$ par

$$g(x) = h(x, \alpha(x)).$$

Si x appartient à L , alors $\alpha(x) = 0$, donc $g(x) = h(x, 0) = f(x)$, ce qui montre que g prolonge f . Soit σ un simplexe de K ; soient V un élément de \mathfrak{U}_3 , contenant $k(\sigma)$, et U un élément de \mathfrak{U}_1 , contenant V . Soit x un point de σ ; si x n'appartient pas à O , alors $g(x) = k(x)$ appartient à V . Si x appartient à O , soit U' un élément de \mathfrak{U}_1 contenant $h(x \times I)$; alors $k(x) = h(x, 1)$ appartient à $U \cap U'$, et, puisque $g(x)$ appartient à U' , il appartient à $\text{St}(U, \mathfrak{U}_1)$. Comme ce dernier ensemble est contenu dans un élément de \mathfrak{U} , $g(\sigma)$ est contenu dans un élément de \mathfrak{U} .

C. Q. F. D.

Dans le cas des espaces métrisables, la réciproque des théorèmes 1.5 et 1.6 est vraie (voir [11], th. 4.6.3 et 4.4.1). Il serait intéressant de savoir s'il en est de même pour les espaces stratifiables.

Si \mathfrak{U} est un recouvrement ouvert d'un espace X , et n un entier ≥ 1 , nous noterons $X^n(\mathfrak{U})$ l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) de X^n tels que x_1, \dots, x_n appartiennent à un même élément de \mathfrak{U} . Nous noterons P_{n-1} le $(n - 1)$ -simplexe standard dans \mathbf{R}^n .

1.7. *Définition.* — Nous dirons qu'un espace topologique X est *localement hyperconnexe* s'il y a un recouvrement ouvert \mathfrak{U} de X et des fonctions $\lambda^n: X^n(\mathfrak{U}) \times P_{n-1} \rightarrow X$, $n = 1, 2, \dots$, vérifiant

(i) Si $t_i = 0$, alors

$$\begin{aligned} &\lambda^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \\ &= \lambda^{n-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n; t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n); \end{aligned}$$

(ii) Quel que soit x dans $X^n(\mathfrak{U})$, l'application $t \mapsto \lambda^n(x, t)$ de P_{n-1} dans X est continue;

(iii) Pour tout point x de X et tout voisinage V de x , il y a un voisinage W de x contenu dans V (et dans un élément de \mathfrak{U}) tel que

$$\lambda^n(W^n \times P_{n-1}) \subset V \quad \text{quel que soit } n \geq 1.$$

Si \mathfrak{U} est réduit au seul ensemble X , nous dirons que X est *hyperconnexe*.

Pour les espaces métrisables, le théorème suivant a été démontré par C. R. BORGES ([2], th. 5.1 et [3], th. 4.4).

1.8. THÉORÈME. — *Un espace stratifiable X est un R. A. (stratifiable) [resp. R. A. V. (stratifiable)] si, et seulement si, il est (localement) hyperconnexe.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.1 de [2] et le théorème 4.5 de [3], tout espace stratifiable (localement) hyperconnexe est un R. A. (stratifiable) [resp. R. A. V. (stratifiable)].

Soit X un R. A. V. (stratifiable). Alors, il y a une rétraction r d'un voisinage O de X dans Z sur X . Tout point x de X a un voisinage ouvert W_x vérifiant (\star) et contenu dans O . Soit $U_x = W_x \cap X$, et soit $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$. Définissons $\lambda^n : X^n(\mathcal{U}) \times P_{n-1} \rightarrow X$ par

$$\lambda^n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = r(\sum_{i=1}^n t_i x_i).$$

Il est clair que les λ^n vérifient (i) et (ii). Si V est un voisinage de x dans X , on peut trouver un voisinage W_1 de x dans Z , vérifiant (\star) , contenu dans O , et tel que $r(W_1) \subset V$; alors, si $W = W_1 \cap X$, $\lambda^n(W^n \times P_{n-1})$ est contenu dans V quel que soit n .

C. Q. F. D.

Nous dirons qu'un espace topologique X a la propriété d'extension par rapport aux espaces stratifiables si, pour tout espace stratifiable Y et tout fermé A de Y , toute fonction continue de A dans X peut se prolonger à Y . Le corollaire suivant a été démontré par BORGES [3] quand Y est métrisable.

1.9. COROLLAIRE. — *Si Y est un R. A. (stratifiable) et X un espace topologique arbitraire, alors l'espace Y^X , muni de la topologie de la convergence simple, a la propriété d'extension par rapport aux espaces stratifiables.*

Ceci résulte du théorème 1.8, du théorème 2.2 de [3], et du théorème 4.1 de [2].

3. Une méthode de réduction des problèmes homotopiques au cas métrisable

Nous allons maintenant développer une méthode permettant de ramener l'étude du type d'homotopie d'un quotient X/A , où A est un sous-ensemble compact d'un R. A. V. (stratifiable) X , au cas où X est un espace métrique complet. Cette réduction se fera en deux étapes, dont la première est le théorème 2.1. Si X est un espace topologique, et d une distance continue sur X , nous noterons X_d l'espace X muni de la topologie associée à d .

2.1. THÉORÈME. — *Soit X un R. A. V. (stratifiable). Il existe une distance continue d sur X telle que X_d soit un R. A. V. (métrisable) et que l'identité $i : X \rightarrow X_d$ soit une équivalence homotopique. En outre, on peut choisir d de façon que, pour tout compact K de X , il existe une fonction*

continue $j : X_d \rightarrow X$ et des homotopies $h : X \times I \rightarrow X$ et $k : X_d \times I \rightarrow X_d$ vérifiant

- (i) $h(x, 0) = x, k(x, 0) = x;$
- (ii) $h(x, 1) = j \circ i(x), k(x, 1) = i \circ j(x);$
- (iii) $h(a, t) = k(a, t) = a$ quels que soient a dans K et t dans I .

Démonstration. — Puisque X est stratifiable, $X \times X$ est stratifiable, donc parfaitement normal; la diagonale Δ de $X \times X$ est donc l'intersection d'une suite décroissante $\{G_n\}, n = 1, 2, \dots$, d'ouverts de $X \times X$. Soit \mathcal{G}_n un recouvrement ouvert de X tel que $\cup \{G \times G; G \in \mathcal{G}_n\}$ soit contenu dans $G_n, n = 1, 2, \dots$. D'après le théorème 1.8, X est localement hyperconnexe; soient \mathcal{U} et $\lambda^m, m = 1, 2, \dots$, comme dans la définition 1.7. Soit \mathcal{X} un recouvrement ouvert de X tel que deux applications proches d'ordre \mathcal{X} soient toujours homotopes par une homotopie qui est constante sur l'ensemble des points où elles coïncident.

Nous allons définir par récurrence deux suites $\{\mathcal{V}_n\}$ et $\{\mathcal{V}'_n\}, n = 0, 1, \dots$, de recouvrements ouverts de X . Soient $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}'_0 = \mathcal{X}$. Supposons $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n$ et $\mathcal{V}'_0, \dots, \mathcal{V}'_n$ construits. En utilisant la condition (iii) de la définition 1.7, on peut trouver un recouvrement ouvert \mathcal{V}_{n+1} tel que, pour tout élément W de \mathcal{V}_{n+1} , il existe $G \in \mathcal{G}_n$ et $V \in \mathcal{V}_n$ tels que

$$\lambda^m(W \times P_{m-1}) \subset G \cap V \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Notons que la condition (iii) de la définition 1.7 implique que $\lambda^1(x, 1) = x$ quel que soit x , donc $\lambda^1(W \times P_0) = W$, ce qui montre que \mathcal{V}'_{n+1} est plus fin que \mathcal{G}_n et \mathcal{V}_n . Nous prendrons pour \mathcal{V}'_{n+1} un recouvrement ouvert de X tel que \mathcal{V}'_{n+1} soit plus fin que \mathcal{V}'_{n+1} et \mathcal{G}_{n+1} . Outre les conditions générales déjà indiquées, nous imposerons à \mathcal{V}'_7 des conditions supplémentaires. Soit \mathcal{X}_1 un recouvrement ouvert de X , plus fin que \mathcal{V}_6 , tel que deux applications proches d'ordre \mathcal{X}_1 soient toujours \mathcal{V}_6 -homotopes. Soit \mathcal{X}_2 un recouvrement ouvert tel que \mathcal{X}_2^λ soit plus fin que \mathcal{X}_1 . Soit \mathcal{X}_3 un recouvrement ouvert tel que, pour tout complexe simplicial P et tout sous-complexe Q de P contenant tous les sommets de P , toute fonction petite d'ordre \mathcal{X}_3 de Q dans X puisse se prolonger en une fonction petite d'ordre \mathcal{X}_2 de P dans X . Nous supposons que \mathcal{V}'_7^λ est plus fin que \mathcal{X}_3 .

D'après notre construction, $\mathcal{V}'_{n+1}^\lambda$ est plus fin que \mathcal{V}_n , donc (voir par exemple [12], th. 2.16, p. 13), il existe un écart fini d sur X tel que, notant \mathcal{B}_n la famille des boules ouvertes $B(x, 2^{-n})$ relatives à d , on ait

$$(1) \quad \mathcal{V}'_{n+3}^\lambda \text{ est plus fin que } \mathcal{B}_n, \text{ et } \mathcal{B}_n \text{ est plus fin que } \mathcal{V}_n^\lambda.$$

La relation (1) implique que d est continue. Puisque $\mathfrak{V}_{n+1}^\lambda$ est plus fin que \mathcal{G}_n , elle implique que, quel que soit x , $B(x, 2^{-n-1}) \times B(x, 2^{-n-1})$ est contenu dans G_n , d'où il résulte que l'intersection des $B(x, 2^{-n})$, $n = 1, 2, \dots$, est réduite au point x , ce qui montre que d est une distance sur X .

Pour montrer que X_d est un R. A. V. (métrisable), il suffit de montrer que \mathfrak{B}_1 et $\mu^m = \lambda^m | X_d^m(\mathfrak{B}_1)$ vérifient les conditions de la définition 1.7. Les conditions (i) et (ii) sont trivialement satisfaites. Soient $x \in X$ et $n > 0$; il y a un point y de X tel que

$$(2) \quad \text{St}(x, \mathfrak{V}_{n+1}) \subset B(y, 2^{-n-1}).$$

Alors $d(x, y) < 2^{-n-1}$, donc $B(y, 2^{-n-1})$ est contenu dans $B(x, 2^{-n})$. Soit z un point de X tel que $B(x, 2^{-n-3})$ soit contenu dans $\text{St}(z, \mathfrak{V}_{n+3})$; soit W un élément de \mathfrak{V}_{n+3} contenant $\text{St}(z, \mathfrak{V}_{n+3})$, et soit V un élément de \mathfrak{V}_{n+1} tel que

$$(3) \quad \lambda^m(W^m \times P_{m-1}) \subset V \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Alors, $x = \lambda^1(x, 1)$ appartient à V , donc $V \subset \text{St}(x, \mathfrak{V}_{n+1}) \subset B(x, 2^{-n})$. Par conséquent, $\lambda^m(B(x, 2^{-n-3})^m \times P_{m-1})$ est contenu dans $B(x, 2^{-n})$, $m = 1, 2, \dots$, ce qui montre que X_d vérifie la condition (iii), donc est localement hyperconnexe et, par suite, est un R. A. V. (métrisable).

Soit $\mathcal{K} = \{K_x\}_{x \in A}$ un recouvrement ouvert localement fini de X_d plus fin que \mathfrak{B}_0 . Soit $\varphi : X_d \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{K})$ une application canonique. Pour tout sommet α de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$, soit x_α un point de K_α ; alors, si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est un simplexe de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$, l'ensemble $\{x_{x_0}, \dots, x_{x_n}\}$ est contenu dans $K_{x_0} \cup \dots \cup K_{x_n} \subset \text{St}(K_\alpha, \mathcal{K})$, donc est contenu dans un élément de \mathfrak{B}_7 , donc aussi dans un élément de \mathcal{H}_3 . Par suite, il y a une fonction continue $\psi : \mathcal{U}(\mathcal{K}) \rightarrow X$, petite d'ordre \mathcal{H}_2 telle que $\psi(\alpha) = x_\alpha$ pour tout sommet α de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$. Si x est un point de X , et si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est le simplexe de $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ dont l'intérieur contient $\varphi(x)$, alors x appartient à $K_{x_0} \cap \dots \cap K_{x_n}$, et $\psi \circ \varphi(x)$ appartient à un élément de \mathcal{H}_2 qui contient le point x_{x_0} de K_{x_0} ; puisque K_{x_0} est contenu dans un élément de \mathcal{H}_2 , x et $\psi \circ \varphi(x)$ appartiennent tous deux à $\text{St}(x_{x_0}, \mathcal{H}_2)$. Par conséquent, les fonctions continues $i^{-1}|K$ et $\psi \circ \varphi|K$, de K dans X , sont proches d'ordre \mathcal{H}_1 , donc il y a une \mathfrak{V}_6 -homotopie $\beta : K \times I \rightarrow X$ telle que

$$\beta(x, 0) = x, \quad \beta(x, 1) = \psi \circ \varphi(x), \quad \forall x \in K.$$

Il y a un voisinage M de K dans X_d , et un prolongement $\gamma : M \times I \rightarrow X$ de β ; puisque β est une \mathfrak{V}_6 -homotopie, on peut trouver un voisinage fermé N de K dans X_d , contenu dans M , tel que la restriction de γ à $N \times I$ soit encore une \mathfrak{V}_6 -homotopie. Soit θ une fonction continue de X_d dans I

telle que $\theta(x) = 0$ si x appartient à K , et $\theta(x) = 1$ si x n'appartient pas à N . Définissons une fonction $j : X_d \rightarrow X$ par

$$j(x) = \begin{cases} \gamma(x, \theta(x)) & \text{si } x \in M \\ \psi \circ \varphi(x) & \text{si } x \in X \setminus N \end{cases}$$

Alors, $j(a) = a$ pour tout point a de K . Si x appartient à N , $\gamma(x \times I)$ est contenu dans un élément de \mathfrak{V}_6 , donc $j(x)$ et x sont contenus dans un même élément de \mathfrak{V}_6 ; si x n'appartient pas à N , alors x et $j(x) = \psi \circ \varphi(x)$ sont contenus dans un même élément de \mathfrak{X}_1 , donc dans un même élément de \mathfrak{V}_6 . Par conséquent, id_X et $j \circ i$ sont proches d'ordre \mathfrak{V}_6 . Puisque \mathfrak{V}_6 est plus fin que \mathfrak{X} , il y a une homotopie $h : X \times I \rightarrow X$ entre id_X et $j \circ i$ telle que $h(a, t) = a$ pour tout a dans K et tout t dans I .

Si la fonction μ^2 était continue, l'existence de k serait immédiate. Comme nous ne savons même pas si λ^2 est continue, il faut utiliser un raisonnement beaucoup plus compliqué. L'existence de k est un cas particulier de l'affirmation suivante.

2.2. AFFIRMATION. — Soient Y un espace métrique, B un fermé de Y , et f, g deux applications de Y dans X_d qui coïncident sur B . Alors, si f et g sont proches d'ordre \mathfrak{B}_3 , elles sont homotopes par une homotopie qui est constante sur B .

Démonstration. — X_d , étant un R. A. V. (métrisable), est U. L. C., donc il existe un voisinage ouvert E de la diagonale de $X_d \times X_d$ et une fonction continue $\mu : E \times I \rightarrow X_d$ vérifiant

$$\mu(x, y, 0) = x, \quad \mu(x, y, 1) = y \quad \text{et} \quad \mu(x, x, t) = x \text{ quel que soit } t.$$

Soit \mathfrak{O} un recouvrement ouvert de X_d tel que $\cup \{D \times D; D \in \mathfrak{O}\}$ soit contenu dans E . Soit \mathfrak{R} un recouvrement ouvert de X_d plus fin que \mathfrak{B}_1 tel que, pour tout élément R de \mathfrak{R} , $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mu^m(R^m \times P_{m-1})$ soit contenu dans un élément de \mathfrak{B}_1 et dans un élément de \mathfrak{O} . Soit $\{\mathfrak{C}_n\}$, $n \geq 1$, une suite de recouvrements ouverts de X_d vérifiant

- (1) \mathfrak{C}_n est plus fin que \mathfrak{B}_{n+2} , $n \geq 1$;
- (2) \mathfrak{C}_1 est plus fin que \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{R} ;
- (3) \mathfrak{C}_{n+1} est plus fin que \mathfrak{C}_n , $n \geq 1$.

Soit M un complexe simplicial de sommets $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$; supposons A totalement ordonné. Si ψ' est une fonction petite d'ordre \mathfrak{B}_1 de M^0 dans X_d , nous appellerons prolongement distingué de ψ' à M la fonction $\psi : M \rightarrow X_d$ définie, sur tout simplexe $\sigma = (p_{\alpha_0}, \dots, p_{\alpha_n})$ de M , où $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$, par

$$\psi\left(\sum_{i=0}^n x_i p_{\alpha_i}\right) = \mu^{n+1}\left(\psi(p_{\alpha_0}), \dots, \psi(p_{\alpha_n}); x_0, \dots, x_n\right).$$

Cette fonction ψ est continue.

Soit \mathcal{B}'_n le recouvrement de Y par les boules ouvertes de rayon $1/2^n$. Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{X}_n = \{N_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_n}$ un recouvrement ouvert localement fini de Y vérifiant

(4) $\text{St}(\mathcal{X}_n)$ est plus fin que $f^{-1}(\mathfrak{C}_n)$, $g^{-1}(\mathfrak{C}_n)$ et \mathcal{B}'_n ;

(5) \mathcal{X}_{n+1} est plus fin que \mathcal{X}_n , $n \geq 1$.

Nous supposons les A_n deux à deux disjoints. Pour $n \geq 1$, soient N_n le nerf de \mathcal{X}_n , $\varphi_n : Y \rightarrow N_n$ une application canonique, $\varphi_{n,n+1} : N_{n+1} \rightarrow N_n$ une application canonique, et M_n le cylindre de l'application $\varphi_{n,n+1}$. M_n est le quotient de $N_{n+1} \times (0, 1) \cup N_n$ obtenu en identifiant $(x, 1)$ à $\varphi_{n,n+1}(x)$; nous noterons $[x, t]$ l'image du point (x, t) de $N_{n+1} \times (0, 1)$ dans M_n , et nous identifierons N_{n+1} et N_n à des sous-complexes de M_n ; l'image d'un point x de N_n dans M_n sera encore notée x . Les sommets de M_n sont ceux de N_n et de N_{n+1} , et les simplexes de M_n sont, soit des simplexes de N_n et de N_{n+1} , soit de la forme

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_p, \varphi_{n,n+1}(\alpha_p), \dots, \varphi_{n,n+1}(\alpha_q)),$$

où $(\alpha_0, \dots, \alpha_q)$ est un simplexe de N_{n+1} . Le complexe $M_n \times I$ a pour sommets les points $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, 1)$, où α parcourt les sommets de M_n , et ses simplexes sont de la forme

$$((\alpha_0, 0), \dots, (\alpha_p, 0), (\alpha_p, 1), \dots, (\alpha_q, 1)),$$

où $(\alpha_0, \dots, \alpha_q)$ est un simplexe de M_n . Si α est un sommet de N_n , $n \geq 1$, soit x_α un point de N_α . Définissons une fonction ψ'_n du 0-squelette de $M_n \times I$ dans X_d par

$$\psi'_n((\alpha, 0)) = f(x_\alpha), \quad \psi'_n((\alpha, 1)) = g(x_\alpha).$$

Si $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ est un simplexe de N_{n+1} , et si $\alpha'_i = \varphi_{n,n+1}(\alpha_i)$, $0 \leq i \leq p$, alors $x_{\alpha'_i}$ appartient à $N_{\alpha'_i}$ et x_{α_i} appartient à $N_{\alpha_i} \subset N_{\alpha'_i}$, donc $\{x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_p}, x_{\alpha'_0}, \dots, x_{\alpha'_p}\}$ est contenu dans $\text{St}(N_{\alpha'_0}, \mathcal{X}_n)$. Il en résulte que, pour tout simplexe $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_q)$ de M_n , $\{x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_q}\}$ est contenu dans $\text{St}(N, \mathcal{X}_n)$, où N est un élément convenable de \mathcal{X}_n , donc $\{f(x_{\alpha_0}), \dots, f(x_{\alpha_q})\}$ est contenu dans un élément T_1 de \mathfrak{C}_n , et $\{g(x_{\alpha_0}), \dots, g(x_{\alpha_q})\}$ est contenu dans un élément T_2 de \mathfrak{C}_n . Soient B_1, B_2 respectivement des éléments de \mathcal{B}_3 contenant T_1 et T_2 , et soit B_0 un élément de \mathcal{B}_3 contenant $f(x_{\alpha_0})$ et $g(x_{\alpha_0})$. Alors, $\{f(x_{\alpha_0}), \dots, f(x_{\alpha_q}), g(x_{\alpha_0}), \dots, g(x_{\alpha_q})\}$ est contenu dans $\text{St}(B_0, \mathcal{B}_3)$, donc dans un élément de \mathcal{B}_1 . Par suite, ψ'_n admet un prolongement distingué ψ_n à $M_n \times I$. En choisissant convenablement l'ordre total sur l'ensemble des sommets de $M_n \times I$, nous pouvons supposer que $\psi_n|_{N_n \times I} = \psi_{n-1}|_{N_n \times I}$

pour $n \geq 2$, ce qui permet de définir une fonction continue $G : Y \times I \times (1, \infty[\rightarrow X_d$ par

$$G(x, t, u) = \begin{cases} \psi_n((2n + 1 - 2u)\varphi_n(x) + 2(u - n)\varphi_{n, n+1}(\varphi_{n+1}(x)), t) & \left(n \leq u \leq n + \frac{1}{2}\right), \\ \psi_n([\varphi_{n+1}(x), 2(n + 1 - u)], t) & \left(n + \frac{1}{2} \leq u \leq n + 1\right). \end{cases}$$

Soit x un point de Y , soit $\varphi'_n : Y \rightarrow N_n$ une fonction canonique arbitraire, et soit $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ le simplexe de N_n dont l'intérieur contient $\varphi'_n(x)$; si $n > 1$, soit $\alpha'_i = \varphi_{n-1, n}(\alpha_i)$, $i = 0, \dots, p$. Alors,

$$\{x, x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_p}\} \text{ est contenu dans } \text{St}(N_{\alpha_0}, \mathcal{N}_n)$$

et, pour $n > 1$,

$$\{x, x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_p}, x_{\alpha'_0}, \dots, x_{\alpha'_p}\}$$

est contenu dans

$$N_{\alpha_0} \cup \dots \cup N_{\alpha_p} \cup N_{\alpha'_0} \cup \dots \cup N_{\alpha'_p} \subset \text{St}(N_{\alpha'_0}, \mathcal{N}_{n-1}).$$

Soit L le sous-complexe de M_n formé des simplexes dont les sommets appartiennent à $\{\alpha_0, \dots, \alpha_p, \alpha'_0, \dots, \alpha'_p\}$, soit T un élément de \mathfrak{S}_{n-1} contenant $f(\text{St}(N_{\alpha'_0}, \mathcal{N}_{n-1}))$, et soit R un élément de \mathcal{R} , contenant T . Alors, il y a un élément B de \mathcal{B}_1 et un élément D de \mathcal{O} qui contiennent $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mu^m(R^m \times P_{m-1})$, donc aussi T et $\psi_n(L \times \{0\})$ d'après la définition d'un prolongement distingué; alors, $[\varphi'_n(x), 0]$ appartient à $L \times \{0\}$, donc $\psi_n([\varphi'_n(x), 0])$ appartient à D et à B , ainsi que $f(x)$; de même, $f(x)$ et $\psi_1(\varphi'_1(x))$ appartiennent à un même élément de \mathcal{O} . En raisonnant de façon analogue avec g , et en remarquant que, quels que soient n et t , l'application

$$x \mapsto (1 - t)\varphi_n(x) + t\varphi_{n, n+1}(\varphi_{n+1}(x))$$

est une application canonique de Y dans N_n , on voit que l'on peut définir une fonction continue $H : Y \times I \times (1, \infty[\rightarrow X_d$ par

$$H(x, t, u) = \begin{cases} \mu(f(x), G(x, 0, u), 3t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right), \\ G(x, 3t - 1, u) & \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\right), \\ \mu(G(x, 1, u), g(x), 3t - 2) & \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1\right). \end{cases}$$

Soit $\theta : Y \rightarrow I$ une fonction continue telle que $\theta^{-1}(0) = B$. Définissons $k : Y \times I \rightarrow X_d$ par

$$k(x, t) = \begin{cases} H\left(x, t, \frac{1}{\theta(x)}\right) & (x \notin B), \\ f(x) & (x \in B). \end{cases}$$

Il est clair que $k(x, 0) = f(x)$, que $k(x, 1) = g(x)$, et que k est continue en tout point de $Y \setminus B$. Il suffit donc de montrer que k est continue en un point x_0 de B . Soit V un voisinage de $f(x_0) = g(x_0)$ dans X_d . Soit V_1 un voisinage de x_0 tel que $\mu(V_1 \times V_1 \times I) \subset V$, soit V_2 un voisinage de $f(x_0)$ contenu dans V_1 tel que $\mu^m(V^m \times P_{m-1}) \subset V_1$ pour tout $m \geq 1$, et soit l un entier tel que $B(f(x_0), 2^{-l}) \subset V_2$. A l'aide de (4), on peut trouver un entier $p \geq l + 1$ tel que $\text{St}(x_0, \mathcal{U}_p) \subset f^{-1}(V_2) \cap g^{-1}(V_2)$; soit $q > p$ tel que $B(x_0, 2^{-q}) \subset \text{St}(x_0, \mathcal{U}_p)$. Si $n \geq q + 1$, alors, pour tout point x de $B(x_0, 2^{-q-1})$, $\text{St}(x, \mathcal{U}_n)$ est contenu dans $B(x_0, 2^{-q})$, d'où l'on déduit facilement que $\psi_n(\{\varphi'_n(x), t\})$ appartient à V_1 quel que soit t pour toute application canonique φ'_n de Y dans N_n . Il en résulte que

$$H(B(x_0, 2^{-q-1}) \times I \times (q + 1, \infty)) \subset V.$$

Soit O un voisinage de x_0 contenu dans $B(x_0, 2^{-q-1})$ tel que $\theta(x) < 1/(q + 1)$ pour tout x dans O ; alors $k(O \times I) \subset V$, d'où la continuité de k au point (x_0, t) $t \in I$.

C. Q. F. D.

Remarquons que, si ρ est un écart continu sur X , on peut choisir d de façon que ρ soit uniformément continu sur X_d . Il suffit pour cela de choisir la suite $\{\mathcal{V}_n\}$ de façon que \mathcal{V}_n^λ soit plus fin que la famille des ouverts

$$B_\rho(x, 2^{-n}) = \{y \in X; \rho(x, y) < 2^{-n}\} \quad (x \in X).$$

La deuxième étape de notre réduction est de compléter tout R. A. V. (métrisable) de façon à avoir encore un R. A. V. (métrisable).

2.3. THÉORÈME. — Soit X un R. A. V. (métrisable). Il existe une distance d compatible avec la topologie de X , telle que, si X^* est le complété de (X, d) , alors, pour tout compact C de X , il existe une homotopie $h : X^* \times I \rightarrow X^*$ vérifiant

- (i) $h(x, 0) = x$ quel que soit x dans X^* ;
- (ii) $h(x, t) \in X$ pour tout $t > 0$, quel que soit x appartenant à X^* ;
- (iii) $h(a, t) = a$ pour tout t si a appartient à C .

En outre, X^* est alors un R. A. V. (métrisable).

Démonstration. — Puisque X est un R. A. V. (métrisable), si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de X , il existe un recouvrement ouvert \mathcal{V} , plus

fin que \mathcal{U} , possédant les deux propriétés suivantes (voir [11], th. 2.1.2 et 4.4.1) :

(1) Si Y est un espace métrique, A un fermé de Y , f et g des applications proches d'ordre \mathfrak{V} de Y dans X , et h une \mathfrak{V} -homotopie entre $f|A$ et $g|A$, il existe une \mathcal{U} -homotopie k entre f et g telle que $k|A \times I = h$.

(2) Si L est un sous-complexe d'un complexe simplicial K contenant tous les sommets de K , toute fonction petite d'ordre \mathfrak{V} de L dans X se prolonge en une fonction petite d'ordre \mathcal{U} de K dans X .

D'après un théorème de Dugundji et Michael ([8], th. 1'), il existe une distance d sur X telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant :

(1') Si Y est un espace métrique, A un fermé de Y , f et g des applications proches d'ordre η de Y dans X , et h une η -homotopie entre $f|A$ et $g|A$, il existe une ε -homotopie k entre f et g telle que $k|A \times I = h$.

(2') Si L est un sous-complexe d'un complexe simplicial K contenant tous les sommets de K , toute fonction petite d'ordre η de L dans X se prolonge en une fonction petite d'ordre ε de K dans X .

A l'aide de (1'), choisissons une suite décroissante $\{\varepsilon_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, de nombres > 0 tels que deux fonctions proches d'ordre ε_n soient $(1/2^n)$ -homotopes par une homotopie constante sur l'ensemble des points où elles coïncident, puis des nombres $\varepsilon'_n < \varepsilon_n/2$, $n = 1, 2, \dots$, tels que deux applications proches d'ordre ε'_n soient $(\varepsilon_n/2)$ -homotopes. A l'aide de (2'), choisissons $\eta_n < \varepsilon'_n$ tel que toute fonction petite d'ordre η_n définie sur L se prolonge en une fonction petite d'ordre $\varepsilon'_n/2$ définie sur K . Soit $\mathfrak{V}_n = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_n}$ un recouvrement ouvert localement fini du complété X^* de (X, d) , tel que le diamètre de chaque élément de \mathfrak{V}_n soit inférieur à $\eta_n/3$. Pour tout sommet α de $\mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n)$, soit x_α un point de $V_\alpha \cap X$; alors, si $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ est un simplexe de $\mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n)$, l'ensemble $\{x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_p}\}$ est contenu dans $V_{\alpha_0} \cup \dots \cup V_{\alpha_p}$, donc, puisque $V_{\alpha_0} \cap \dots \cap V_{\alpha_p} \neq \emptyset$, a un diamètre $< \eta_n$. Par conséquent, il y a une fonction $\psi_n : \mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n) \rightarrow X$, petite d'ordre $\varepsilon'_n/2$, telle que $\psi_n(x) = x_\alpha$ pour tout sommet de $\mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n)$. Soit φ_n une application canonique de X^* dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n)$. Soit x un point de X^* , et soit $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ le simplexe de $\mathfrak{U}(\mathfrak{V}_n)$ dont l'intérieur contient $\varphi_n(x)$; alors $x \in V_{\alpha_0} \cap \dots \cap V_{\alpha_p}$, donc

$$d(x, \psi_n \varphi_n(x)) \leq d(x, x_0) + \text{diamètre}(\psi_n(\sigma)) < \frac{\eta_n}{3} + \frac{\varepsilon'_n}{2} < \varepsilon'_n,$$

ce qui montre que $\psi_n \varphi_n|X$ et id_X sont proches d'ordre ε'_n . Par suite, si C est un compact de X , il y a une $(\varepsilon_n/2)$ -homotopie $\beta_n : C \times I \rightarrow X$ telle que $\beta_n(x, 0) = \psi_n \varphi_n(x)$ et $\beta_n(x, 1) = x$ pour tout x dans C . Soit $B = (X^* \times 0) \cup (C \times I)$, et soit $F_n : B \rightarrow X$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} F_n(x, 0) &= \psi_n \varphi_n(x) & (x \in X^*) \\ F_n(x, t) &= \beta_n(x, t) & (x \in C; t \in I). \end{aligned}$$

Il y a un voisinage V_n de B dans $X^* \times I$ et un prolongement G_n de F_n à V_n . Si x appartient à C , alors

$$d(x, G_n(x, t)) < \frac{\varepsilon_n}{2} \text{ quel que soit } t.$$

La compacité de I permet de trouver un voisinage W_n de C dans X^* tel que $W_n \times I$ soit contenu dans V_n et que

$$d(x, G_n(x, t)) < \frac{\varepsilon_n}{2} \text{ quels que soient } x \text{ dans } W_n \text{ et } t \text{ dans } I.$$

Soit $\gamma_n : X^* \rightarrow I$ une fonction continue égale à 1 sur C et à 0 sur $X^* \setminus W_n$, et soit $f_n : X^* \rightarrow X$ la fonction définie par

$$f_n(x) = G_n(x, \gamma_n(x)).$$

Alors, $f_n(x) = x$ si x appartient à C . Si x est un point de W_n , alors $d(x, f_n(x)) < \varepsilon_n/2$ d'après le choix de W_n , et si x n'appartient pas à W_n , alors $f_n(x) = \psi_n \varphi_n(x)$, donc $d(x, f_n(x)) < \varepsilon'_n < \varepsilon_n/2$, ce qui montre que $d(f_n, \text{id}_{X^*}) < \varepsilon_n/2$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$d(f_n, f_{n+1}) \leq d(f_n, \text{id}_{X^*}) + d(\text{id}_{X^*}, f_{n+1}) < \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} < \varepsilon_n.$$

Puisque $f_n(x) = f_{n+1}(x) = x$ pour x dans C , il y a donc une $(1/2^n)$ -homotopie $h_n : X^* \times [1/(n+1), 1/n] \rightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} h_n\left(x, \frac{1}{n}\right) &= f_n(x), \\ h_n\left(x, \frac{1}{n+1}\right) &= f_{n+1}(x) \qquad (x \in X^*), \\ h_n(x, t) &= x \quad \text{si } x \in C, \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On peut alors définir $h : X^* \times I \rightarrow X^*$ par

$$h(x, t) = \begin{cases} x & (t = 0), \\ h_n(x, t) & \left(\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

On vérifie facilement que h est continue et possède les propriétés (i)-(iii). Que X^* soit un R. A. V. (métrisable) résulte du lemme suivant.

2.4. LEMME. — Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X . Supposons qu'il y ait une homotopie $h : X \times I \rightarrow X$ vérifiant :

- (i) $h(x, 0) = x$ quel que soit x dans X ,
- (ii) $h(x, t) \in A$ pour tout $t > 0$, quel que soit x dans X .

Alors X est un R. A. V. (métrisable) si, et seulement si, A est un R. A. V. (métrisable).

Démonstration. — Supposons que X soit un R. A. V. (métrisable). Soient B un fermé d'un espace métrique Y , et f une fonction continue de B dans A . Il existe un voisinage ouvert O de B dans Y , et une fonction $g' : O \rightarrow X$ prolongeant f . Soit $\theta : Y \rightarrow I$ une fonction continue telle que $\theta^{-1}(0) = B$. Alors, la fonction g , définie sur O par

$$g(x) = h(g'(x), \theta(x)),$$

est un prolongement de f à valeurs dans A , ce qui montre que A est un R. A. V. (métrisable).

Supposons que A soit un R. A. V. (métrisable). Soient B un fermé d'un espace métrique Y , et f une fonction continue de B dans X . La fonction $f_1 : B \rightarrow X$, définie par

$$f_1(x) = h(f(x), 1),$$

prend ses valeurs dans A , donc il y a un voisinage U de B dans Y , et une fonction $g_1 : U \rightarrow A$ prolongeant f_1 . Soit G la fonction de $(U \times 0) \cup (B \times I)$ dans X , définie par

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= g_1(x) & (x \in U), \\ G(a, t) &= h(f(a), 1 - t) & (a \in B; t \in I). \end{aligned}$$

Alors, si l'on pose $J = (0, 1[$ et $C = (U \times 0) \cup (B \times J)$, C est fermé dans $U \times J$ et $G|_C$ prend ses valeurs dans A , donc a un prolongement continu à un voisinage ouvert de C dans $U \times J$. Il résulte d'un théorème de Dowker ([7], th. 1) que G a un prolongement $G' : U \times I \rightarrow X$. Alors, la fonction $F : U \rightarrow X$ définie par $F(x) = G(x, 1)$ est un prolongement de f à U . Ceci montre que X est un R. A. V. (métrisable).

2.5. Remarques :

1° Il est clair que l'inclusion $i : X \rightarrow X^*$ est une équivalence homotopique ayant pour inverse l'application $j : X^* \rightarrow X$, définie par $j(x) = h(x, 1)$, l'application h définissant de façon évidente une homotopie entre id_{X^*} et $i \circ j$, ainsi qu'entre id_X et $j \circ i$. Il est également clair que, pour tout compact C de X , i induit une équivalence homotopique de X/C dans X^*/C .

2° Si ρ est un écart continu sur X , la démonstration du théorème cité de Dugundji et Michael montre que l'on peut choisir d de façon que ρ soit uniformément continu par rapport à d .

Les deux théorèmes suivants ont été démontrés par D. W. HENDERSON [10] pour les espaces métriques complets à l'aide de la théorie des variétés de dimension infinie.

Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur un sous-ensemble A d'un espace topologique X , nous noterons X/\mathcal{R} le quotient de X par la relation d'équivalence dont les classes sont les classes de \mathcal{R} et les points de $X \setminus A$.

Il est connu que tout sous-ensemble compact d'un espace stratifiable est métrisable, donc sa forme, au sens de BORSUK, est définie. (La définition de la forme d'un espace métrique est trop longue pour être donnée ici. Le lecteur pourra se reporter au livre [4] de K. BORSUK qui est consacré à cette théorie. Mentionnons simplement, pour éclairer la signification du théorème 2.7 ci-dessous, que tout espace contractile a la forme d'un point.)

2.6. THÉORÈME. — Soient X et Y des R. A. V. (stratifiable), et soient A et B des sous-ensembles compacts de X et Y respectivement.

1° Supposons qu'il existe des équivalences homotopiques $f: A \rightarrow B$ et $g: X \rightarrow Y$ telles que f soit homotope à $g|_A$ dans Y . Alors X/A a le type d'homotopie de Y/B .

2° Si, en outre, $f: A \rightarrow B$ est un homéomorphisme, et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur A , alors, X/\mathcal{R} a le type d'homotopie de $Y/f(\mathcal{R})$.

2.7. THÉORÈME. — Soit A un compact d'un R. A. V. (stratifiable) X . Si A a la forme d'un point, alors X/A a le type d'homotopie de X .

La méthode de démonstration de ces deux théorèmes est de se ramener aux résultats correspondants d'HENDERSON en deux étapes : A l'aide du théorème 2.3, on ramène le cas des espaces métrisables à celui des espaces métriques complets, puis, à l'aide du théorème 2.1, on ramène le cas général à celui des espaces métriques. Donnons les détails pour le 2° du théorème 2.6.

Premier cas. — Supposons X et Y métrisables. Soit ρ une distance sur Y ayant les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème 2.3. Définissons un écart continu d_1 sur X par $d_1(x, y) = \rho(g(x), g(y))$. Soit d une distance sur X comme dans le théorème 2.3, et telle que d_1 soit uniformément continu par rapport à d . Alors, $g: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ est uniformément continue, donc a un prolongement continu $g^*: X^* \rightarrow Y^*$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X^* & \xrightarrow{g^*} & Y^* \end{array}$$

où i et j sont les inclusions. Alors, i , j et g sont des équivalences homotopiques, donc g^* aussi. D'autre part, f est homotope dans Y , donc

aussi dans Y^* , à $g|A = g^*|A$. D'après le théorème d'HENDERSON, X^*/A et Y^*/B ont le même type d'homotopie. Mais X/A et X^*/A ont même type d'homotopie, ainsi que Y/B et Y^*/B , d'où le résultat.

Cas général. — Soient d et ρ des distances sur X et Y respectivement comme dans le théorème 2.1, et définissons d_1 comme ci-dessus. Comme nous l'avons remarqué, nous pouvons choisir d de façon que d_1 soit uniformément continue sur X_d , ce qui implique que f induit une fonction continue f_d de X_d dans Y_ρ . On procède alors comme précédemment pour se ramener au premier cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BORGES (C. J. R.). — On stratifiable spaces, *Pacific J. of math.*, t. 17, 1966, p. 1-16.
- [2] BORGES (C. J. R.). — A study of absolute extensor spaces, *Pacific J. of Math.*, t. 31, 1969, p. 609-617.
- [3] BORGES (C. J. R.). — Connectivity of function spaces, *Canad. J. of Math.*, t. 23, 1971, p. 759-763.
- [4] BORSUK (K.). — *Theory of shape.* — Aarhus, Matematisk Institut, 1971 (Lecture Notes Series, 28).
- [5] CAUTY (R.). — Sur le prolongement des fonctions continues à valeurs dans les CW-complexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 35-37.
- [6] CAUTY (R.). — Une généralisation du théorème de Borsuk-Whitehead-Hanner aux espaces stratifiables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, 1972, série A, p. 271-274.
- [7] DOWKER (C. H.). — Homotopy extension theorems, *Proc. London math. Soc.*, series 3, t. 6, 1956, p. 100-116.
- [8] DUGUNDJI (J.) and MICHAEL (E.). — On local and uniformly local topological properties, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 7, 1956, p. 304-306.
- [9] ENGELKING (R.). — *Outline of general topology.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1968.
- [10] HENDERSON (D. W.). — Applications of infinite-dimensional manifolds to quotient spaces of complete ANR's, *Bull. Acad. pol. Sc.*, t. 19, 1971, p. 747-753.
- [11] HU (S. T.). — *Theory of retracts.* — Detroit, Wayne State University Press, 1965.
- [12] NAGAMI (K.). — *Dimension theory.* — New York, Academic Press, 1970 (*Pure and applied Mathematics, Academic Press*, 37).

(Texte reçu le 3 juillet 1973.)

Robert CAUTY,
88, rue de Clichy,
75009 Paris.