

BULLETIN DE LA S. M. F.

TON-THAT LONG

**Semi-groupes de contractions de classe C_0
de l'espace de Hilbert**

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 109-127

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__109_0

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS DE CLASSE C_0
DE L'ESPACE DE HILBERT

PAR

TÔN-THẮT LONG (*)

RÉSUMÉ. — Une contraction complètement non unitaire T est, d'après Sz.-NAGY et C. FOIAS, dite de classe C_0 s'il existe une fonction analytique non nulle m de classe H^∞ telle que $m(T) = 0$. Il existe alors, parmi les fonctions non nulles m de classe H^∞ telles que $m(T) = 0$, une fonction intérieure m_T dont toutes les autres sont des multiples. La fonction m_T est déterminée de façon unique, à un facteur constant près, et est appelée la fonction minimale de T .

Dans ce travail, on caractérise tous les semi-groupes continus de contractions de classe C_0 et cela par l'intermédiaire de la fonction minimale du cogénérateur de semi-groupe donné. On note en particulier que, si le cogénérateur d'un semi-groupe continu de contractions est de classe C_0 , alors le semi-groupe n'est pas nécessairement de classe C_0 . On étudie aussi certaines propriétés des semi-groupes (non nécessairement continus) qui possèdent une propriété de la forme : « Il existe un élément du semi-groupe qui est (ou qui n'est pas) de classe C_0 ».

0. Introduction

Soit $(T(s))_{s>0}$ un semi-groupe continu de contractions dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , Sz. NAGY et C. FOIAS ont montré que le semi-groupe peut être complètement déterminé par son cogénérateur T . De façon plus précise, l'opérateur T , défini par

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} a_s(T(s)), \quad \text{où } a_s(z) = \frac{z-1+s}{z-1-s},$$

est une contraction, dite cogénérateur du semi-groupe et, réciproquement, le semi-groupe est donné, à partir du cogénérateur T , par les relations

$$T(s) = e_s(T) \quad \text{pour tout } s > 0 \quad \text{et} \quad \text{où } e_s(z) = \exp\left(s \frac{z+1}{z-1}\right).$$

(*) Équipe de Recherche n° 1 : « Processus stochastiques et applications », associée au C. N. R. S.

On sait aussi que la nature de certains semi-groupes est analogue à celle de leurs cogénérateurs. Par exemple, pour qu'un semi-groupe soit de classe $C_{\alpha\beta}$, il faut et il suffit que son cogénérateur T soit une contraction de la même classe.

Ce travail est consacré à l'étude des propriétés des contractions de classe C_0 liées à l'étude des semi-groupes de contractions. Il est clair que, si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions de classe C_0 , alors le cogénérateur T du semi-groupe est aussi de classe C_0 [en effet, si $f(T(s)) = 0$, on a aussi

$$(f \circ e_s)(T) = f(e_s(T)) = f(T(s)) = 0,$$

où $f \circ e_s$ est la fonction composée de f par e_s], et on se demande si la réciproque de cette propriété est exacte.

On démontre que, contrairement au cas des contractions de classe $C_{\alpha\beta}$, cela n'est pas le cas. On obtient ensuite des caractérisations de tous les semi-groupes continus de contractions de classe C_0 .

Il est clair aussi que, s'il existe un scalaire positif s' tel que $T(s')$ soit une contraction de classe $C_{\alpha\beta}$ (par exemple), alors les contractions $T(s)$, $s > 0$, sont toutes de même classe. On va voir que cette propriété n'est pas exacte dans le cas des contractions de classe C_0 . On obtient, cependant, certains résultats pour les semi-groupes $(T(s))_{s>0}$ non nécessairement continus, qui possèdent une propriété de la forme : « Il existe un scalaire $s' > 0$ tel que $T(s')$ est (ou n'est pas) une contraction de classe C_0 ».

1. Notations et énoncé des résultats principaux

Dans la suite, on donne un semi-groupe de contractions $(T(s))_{s>0}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Si le semi-groupe est continu, on note T son cogénérateur, et on suppose que T est une contraction de classe C_0 . La fonction minimale m_T de T est alors de la forme

$$\begin{aligned} m_T(z) &= B_A(z) \cdot e_v(z) \cdot S_\mu(z) \\ &= \left(z^{p_0} \prod_{0 \neq a \in A} \left(\frac{\bar{a}}{|a|} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \right)^{p_a} \right) \\ &\quad \times \exp \left(v \frac{z+1}{z-1} \right) \exp \left(\int_I \frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} d\mu(t) \right), \end{aligned}$$

où B_A est un produit de Blaschke ayant A comme ensemble des zéros p_a est la multiplicité du zéro a de m_T [on a donc nécessairement

$\sum_{a \in A} p_a (1 - |a|) < \infty$, $v \geq 0$, et S_μ est une fonction singulière correspondant à une mesure singulière finie $\mu \geq 0$ sur l'intervalle (ouvert à gauche et fermé à droite) $I =] - \pi, \pi$, telle que $\mu(\{0\}) = 0$.

Pour chaque scalaire $s > 0$, on note A_s l'ensemble des scalaires de la forme $e_s(a)$, où a parcourt l'ensemble A des zéros de m_T et, pour $b \in A_s$, posons

$$q_b = \sup \{ p_a; a \in A \text{ et } b = e_s(a) \}.$$

Le théorème suivant donne une caractérisation partielle des semi-groupes continus de contractions de classe C_0 .

1.1. THÉORÈME. — m_T étant une fonction intérieure donnée, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (B) $\sum_{b \in A_s} q_b (1 - |b|) < \infty$ pour tout $s > 0$;
- (B₁) $\sum_{a \in A} p_a (1 - |e_s(a)|) < \infty$ pour tout $s > 0$;
- (B₂) s' étant un scalaire positif donné, alors $\sum_{a \in A} p_a (1 - |e_{s'}(a)|) < \infty$;
- (B₃) m_T n'a qu'un nombre fini de zéros positifs ou nuls et

$$\sum_{R^+ \ni a \in A} p_a (1-r)(1-\cos \lambda)^{-1} < \infty \text{ ou } \sum_{R^+ \ni a \in A} p_a (1-r)\lambda^{-2} < \infty;$$

où, si $a \in A$, on écrit $a = |a| e^{i\lambda} = r e^{i\lambda}$ avec $-\pi < \lambda \leq \pi$.

Si m_T est une fonction de Blaschke, ces conditions sont aussi équivalentes à la condition

- (G) $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . La fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$ est alors donnée par

$$m_{T(s)}(z) = \prod_{b \in A_s} \left(\frac{\bar{b}}{|b|} \frac{b-z}{1-\bar{b}z} \right)^{q_b} \text{ pour tout } s > 0.$$

Maintenant, pour chaque entier relatif $n \in Z$ et chaque scalaire positif s , soit α_n^s le point (unique) de I donné par

$$\alpha_n^s = 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{-s}{(2n-1)\pi} \right).$$

On note que la famille $(\alpha_n^s)_{n \in Z}$ forme une suite telle que $\alpha_n^s = -\alpha_{-n+1}^s$, $-\pi < \alpha_{-n}^s < \alpha_{-n-1}^s < 0$ si $n > 0$ et $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n^s = 0$. Posons aussi

$$\tau_n^s(t) = 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{-s}{t+2n\pi} \right) \text{ pour tout } t \in]-\pi, \pi[.$$

Pour $n \neq 0$, les fonctions τ_n^s sont continues, décroissantes et, lorsque t décrit l'intervalle I , τ_n^s décrit l'intervalle $I_n^s = (\alpha_{n+1}^s, \alpha_n^s[$. De même, lorsque t décrit I , τ_0^s décrit l'ensemble $I_0^s =]\alpha_0^s, \pi) \cup]-\pi, \alpha_1^s[$ de façon monotone (si on identifie I au cercle unité du plan complexe, on note que chaque ensemble I_n^s est identifié alors à un arc de cercle, même pour $n = 0$). De plus, on a

$$I_m^s \cap I_n^s = \emptyset \quad \text{si } m \neq n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in Z} I_n^s = I - \{0\}.$$

Au point de vue de la théorie de la mesure, τ_n^s est une transformation mesurable, biunivoque, qui transforme l'espace mesurable I (muni de la tribu borélienne) en I_n^s .

La mesure μ étant donnée, soit $\mu'_{s,n}$ la restriction de la mesure μ sur I_n^s , c'est-à-dire la mesure sur I_n^s définie par

$$\mu'_{s,n}(E) = \mu(E) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } E \text{ de } I_n^s,$$

et soit $\mu''_{s,n}$ la mesure (absolument continue par rapport à la mesure $\mu'_{s,n}$) sur I_n^s définie par

$$\mu''_{s,n}(E) = \int_E s(1 - \cos \lambda)^{-1} d\mu'_{s,n}(\lambda) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } E \text{ de } I_n^s.$$

Cela étant, soit $\mu_{s,n} = \mu''_{s,n}(\tau_n^s)$ la transformée de $\mu''_{s,n}$ dans la transformation mesurable $(\tau_n^s)^{-1}$, c'est-à-dire la mesure sur I définie par

$$\mu_{s,n}(E) = \mu''_{s,n}(\tau_n^s(E)) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } E \text{ de } I,$$

et posons

$$\mu_s = \sup_{n \in Z} \mu_{s,n}$$

(la borne supérieure étant prise dans l'espace des mesures).

Avec ces notations, la caractérisation des semi-groupes continus de contractions de classe C_0 est donnée aussi par les deux théorèmes suivants :

1.2. THÉORÈME. — *On suppose que m_T est une fonction singulière de la forme S_μ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(S) \int_I d\mu_s(t) < \infty \quad \text{pour tout } s > 0;$$

(G) $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 .

Dans ces conditions, la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$ est donnée par

$$m_{T(s)}(z) = \exp \left(\int_I \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\mu_s(t) \right) \quad \text{pour tout } s > 0.$$

D'autre part, les conditions précédentes sont vérifiées, en particulier si

$$(S_1) \int_I (1 - \cos \lambda)^{-1} d\mu(\lambda) < \infty \text{ ou } \int_I \lambda^{-2} d\mu(\lambda) < \infty.$$

1.3. THÉORÈME. — Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(G) $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 ;

(G₁) pour tout $s > 0$, il existe $m_s, k_s \in H^\infty$; $m_s \neq 0$ telles que $m_s \circ e_s = k_s \cdot m_T$;

(G₂) la condition (S) du théorème 1.2 et l'une des quatre conditions (B), (B₁), (B₂) et (B₃) du théorème 1.1 sont vérifiées.

Dans le cas général, où le semi-groupe donné n'est pas nécessairement continu, on a le résultat suivant :

1.4. THÉORÈME. — Soit $(T(s))_{s>0}$ un semi-groupe (non nécessairement continu) de contractions, alors :

1° S'il existe $s' > 0$ tel que $T(s')$ soit de classe C_0 , alors $T(s)$ est aussi de classe C_0 , du moins pour une famille de scalaires s formant un ensemble dense dans R^+ .

2° S'il existe $s'' > 0$ tel que $T(s'')$ ne soit pas une contraction de classe C_0 , alors les contractions $T(s)$ ne sont pas de classe C_0 , du moins pour une famille de scalaires s formant un ensemble dense dans R^+ .

Pour terminer ce paragraphe, on va démontrer le lemme suivant qui sera utile dans toute la suite :

1.5. LEMME. — Soit T' une contraction de la forme $T' = f(T)$, $f \in H^\infty$, telle que $(m \circ f)(T) = m(T')$ pour toute fonction m de classe H^∞ , alors :

1° Pour que T' soit de classe C_0 , il faut et il suffit qu'il existe des fonctions m et k de H^∞ , avec $m \neq 0$, telles que $m \circ f = k \cdot m_T$. La plus petite de ces fonctions m est alors la fonction minimum de T' .

2° Si m_T est le produit d'un nombre fini de fonctions intérieures m_i , $i \in J$, la condition précédente est équivalente à la condition suivante : « Pour tout $i \in J$, il existe $m'_i, k_i \in H^\infty$; $m'_i \neq 0$, telles que $m'_i \circ f = k_i \cdot m_i$. ».

Démonstration. — Pour que T' soit de classe C_0 , il faut et il suffit qu'il existe $m \in H^\infty$, $m \neq 0$, telle que $m(T') = 0$. Il en résulte que

$$(m \circ f)(T) = m(f(T)) = m(T') = 0,$$

c'est-à-dire que $m \circ f$ est un multiple de m_T , et réciproquement.

Si m_i est un diviseur de m_T , on peut écrire $m_T = m_i \cdot m'$, où $m' \in H^\infty$, et la relation $m \circ f = k \cdot m_T$ s'écrit $m \circ f = (k \cdot m') m_i$. Il existe donc m'_i et k_i dans H^∞ , $m'_i \neq 0$ telles que $m'_i \circ f = k_i \cdot m_i$ (par exemple $m'_i = m$ et $k_i = k \cdot m'$). Réciproquement, si cette propriété est vérifiée, pour tout $i \in J$, on obtient

$$\begin{aligned} (\prod_{i \in J} m'_i) \circ f &= \prod_{i \in J} m'_i \circ f = \prod_{i \in J} k_i \cdot m_i \\ &= (\prod_{i \in J} k_i) (\prod_{i \in J} m_i) = (\prod_{i \in J} k_i) m_T, \end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

Dans la suite, nous utiliserons le lemme précédent seulement dans les deux cas particuliers suivants : $f(z) = e_s(z)$ et $f(z) = z^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(m \circ f)(T) = m(T') = m(f(T))$ résulte alors du théorème III.2.1. de [2].

2. Comportement des zéros de m_T . Cas des produits de Blaschke

Ce paragraphe est consacré à l'étude des zéros de m_T lorsque $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . Le résultat essentiel est la démonstration du théorème 1.1. Pour cela, nous avons besoin des résultats préliminaires suivants :

2.1. LEMME. — *La fonction m_T étant donnée, il existe un scalaire $s'' > 0$ tel que*

$$e_{s''}(a) \neq e_{s''}(a') \quad \text{pour tout } a, a' \in A \text{ et } a \neq a'.$$

Démonstration. — Notons que, pour tout $a, a' \in A$ et $a \neq a'$, une relation de la forme $e_s(a) = e_s(a')$ est équivalente à la relation

$$s = \left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a'+1}{a'-1} \right)^{-1} \frac{1}{2\pi ni}, \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}.$$

Comme Z et A sont dénombrables, l'ensemble S des scalaires s tels qu'il existe $a, a' \in A$; $a \neq a'$ et $e_s(a) = e_s(a')$ est donc dénombrable. Le complémentaire $R^+ - S$ de S dans R^+ est donc non vide et, pour un s'' de $R^+ - S$, on a évidemment

$$e_{s''}(a) \neq e_{s''}(a') \quad \text{pour tout } a, a' \in A \text{ et } a \neq a'.$$

2.2. PROPOSITION. — On suppose que l'ensemble A des zéros de m_T est infini et que l'une des conditions (B), (B₁) et (B₂) du théorème 1.1 est vérifiée. Alors :

1° Pour tout $a = r e^{i\lambda} \in A$, $\lambda \in I$ et $r > 0$, on a $\lambda \neq 0$ sauf, peut-être, pour un nombre fini d'éléments de A . En particulier, si A contient une sous-suite infinie de réels, cette sous-suite converge nécessairement vers -1 .

2° On a, d'autre part :

$$\lim_{a \in A} (1-r)\lambda^{-2} = \lim_{a \in A} (1-r)(1-\cos \lambda)^{-1} = 0$$

suivant le filtre des sous-ensembles finis de A . En particulier, aucune sous-suite infinie de A ne converge vers 1 non tangentiellement.

Démonstration. — Il est évident que la condition (B₁) implique la condition (B₂). D'autre part, d'après le lemme précédent, il existe $s'' > 0$ tel que

$$e_{s''}(a) \neq e_{s''}(a') \quad \text{pour tout } a, a' \in A \text{ tel que } a \neq a'.$$

Il en résulte que

$$\sum_{b \in A_{s''}} q_b(1-|b|) = \sum_{a \in A} p_a(1-|e_{s''}(a)|),$$

et la condition (B) implique la condition $\sum_{a \in A} p_a(1-|e_{s''}(a)|) < \infty$.

Pour démontrer la proposition, on peut donc supposer que la condition (B₂) est satisfaite. En particulier, on a $\lim_{a \in A} |e_{s''}(a)| = 1$.

Si A contient une sous-suite infinie A' de réels positifs, cette sous-suite converge nécessairement vers 1, qui est le seul scalaire positif situé sur le cercle unité. Il en résulte que

$$\lim_{a \in A'} |e_{s'}(a)| = \lim_{a \rightarrow 1, 0 < a < 1} \exp\left(s' \frac{a+1}{a-1}\right) = 0,$$

ce qui est contraire à la propriété $\lim_{a \in A} |e_{s'}(a)| = 1$.

Si A contient une sous-suite réelle infinie A' , cette sous-suite admet nécessairement des points d'accumulation, qui doivent être 1 ou -1 ou 1 et -1 . Comme A ne contient qu'un nombre fini de réels positifs, le seul point d'accumulation de A' est -1 , et on obtient $\lim_{a \in A'} a = -1$.

D'après la première partie de la proposition, dans la suite de la démonstration, on peut supposer que A ne contient aucun réel positif ou nul. On note d'abord que $\lim_{a \in A} r = 1$ (car les points limites des zéros de m_T sont sur le cercle unité). L'expression explicite de $|e_{s'}(a)|$:

$$|e_{s'}(a)| = \exp\left(\frac{-s'(1-r^2)}{1+r^2-2r \cos \lambda}\right) = \exp\left(\frac{-s'(1+r)}{1-r+(2r(1-\cos \lambda))/(1-r)}\right),$$

et la condition $\lim_{a \in A} |e_{s'}(a)| = 1$ impliquent alors nécessairement

$$\lim_{a \in A} \frac{1-r}{1-\cos \lambda} = 0.$$

Comme $-\pi < \lambda \leq \pi$, le dernier résultat est équivalent à la propriété $\lim_{a \in A} (1-r)\lambda^{-2} = 0$, qui implique à son tour qu'aucune sous-suite de A ne converge vers 1 non tangentiellement. En effet, la convergence de $a = r e^{i\lambda}$ vers 1 non tangentiellement veut dire que la quantité $(1-r)^{-1}\lambda$ est, en valeur absolue, bornée par une quantité finie et, par suite, $\lim (1-r)^{-1}\lambda^2 = 0$ (car $\lim \lambda = 0$) c'est-à-dire $\lim (1-r)\lambda^{-2} = \infty$, ce qui est incompatible avec la propriété $\lim_{a \in A} (1-r)\lambda^{-2} = 0$.

2.3. PROPOSITION. — *On suppose que $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . Si a est un zéro de m_T , alors $e_s(a)$ est, pour tout $s > 0$, un zéro de la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$. La multiplicité du zéro $e_s(a)$ de $m_{T(s)}$ est au moins égale à la multiplicité correspondante du zéro a de m_T .*

Démonstration. — En effet, la relation $m_T(a) = 0$ donne

$$m_s(e_s(a)) = k_s(a)m_T(a) = 0$$

pour toute fonction m_s de H^∞ vérifiant une relation de la forme $m_s \circ e_s = k_s \cdot m_T$.

Il en résulte que

$$m_T(z) = (z-a) \cdot m_1(z), \quad m_s(z) = (z-e_s(a)) \cdot m_2(z)$$

avec

$$m_1, m_2 \in H^\infty,$$

et on obtient

$$\begin{aligned} m_2(e_s(a)) &= \lim_{z \rightarrow a} m_2(e_s(z)) = \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{z-a}{e_s(z)-e_s(a)} k_s(z) m_1(z) \right) \\ &= \frac{-(a-1)^2}{2se_s(a)} k_s(a) m_1(a). \end{aligned}$$

Si la multiplicité du zéro a de m_T est au moins égale à 2, on a $m_1(a) = 0$, et la relation précédente donne $m_2(e_s(a)) = 0$. La multiplicité du zéro $e_s(a)$ de m_s est donc au moins égale à 2 et ainsi de suite ... La proposition est maintenant une conséquence du lemme 1.5.

2.4. Procédons à la démonstration du théorème 1.1.— Si m_T n'a qu'un nombre fini de zéro, les conditions (B), (B₁), (B₂) et (B₃) sont toutes véri-

fiées. On peut donc supposer, dans la suite, que A est un ensemble infini et même, d'après la proposition 2.2, qu'aucun zéro de m_T n'est réel positif ou nul.

Cela étant, pour s fixé et $s > 0$, une condition de la forme

$$\sum_{a \in A} p_a (1 - |e_s(a)|) < \infty$$

est équivalente à la condition

$$\prod_{a \in A} |e_s(a)|^{p_a} \neq 0,$$

qui, d'après l'expression explicite de $|e_s(a)|$ donnée dans la démonstration de la proposition 2.2, est équivalente à la condition

$$\exp \left(\sum_{a \in A} \frac{-s p_a (1+r)}{1-r+(2r(1-\cos \lambda))/(1-r)} \right) \neq 0.$$

Comme la série dans l'exponentielle est à termes négatifs, la condition précédente est équivalente à la condition

$$\sum_{a \in A} \frac{p_a (1+r)}{1-r+(2r(1-\cos \lambda))/(1-r)} < \infty$$

ou même à

$$\sum_{a \in A} p_a (1-r)(1-\cos \lambda)^{-1} < \infty.$$

Ce raisonnement montre que les deux conditions (B_2) et (B_3) d'une part, les deux conditions (B_1) et (B_3) d'autre part, sont équivalentes. Les trois conditions (B_1) , (B_2) et (B_3) sont donc équivalentes.

Les inégalités

$$\sum_{b \in A_s} q_b (1 - |b|) \leq \sum_{a \in A} p_a (1 - |e_s(a)|) \quad \text{pour tout } s > 0$$

montrent aussi que (B) est une conséquence de la condition (B_1) , et le lemme 2.1 (avec $s' = s''$) implique que la condition (B) entraîne la condition (B_2) . Les quatre conditions (B) , (B_1) , (B_2) et (B_3) sont donc équivalentes.

Supposons maintenant que $(T(s))_{s>0}$ soit un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . D'après la proposition 2.3, l'ensemble A_s fait partie de l'ensemble des zéros de la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$ et, pour tout $b \in A_s$, la multiplicité du zéro b de $m_{T(s)}$ est au moins égale à p_a pour tout $a \in A$ tel que $b = e_s(a)$. La multiplicité du zéro b de $m_{T(s)}$ est donc au moins égale à $q_b = \sup \{ p_a; a \in A \text{ et } b = e_s(a) \}$.

Ainsi le produit de Blaschke B_s , donné par

$$B_s(z) = \prod_{b \in A_s} \left(\frac{\bar{b}}{|b|} \frac{b-z}{1-\bar{b}z} \right)^{q_b},$$

est un diviseur de $m_{T(s)}$ et doit, pour cette raison, satisfaire à la condition

$$(B) \quad \sum_{b \in A_s} q_b (1 - |b|) < \infty \quad \text{pour tout } s > 0.$$

Réciproquement, si la condition (B) est vérifiée, le produit de Blaschke B_s est bien défini dans H^∞ et $B_s \neq 0$. D'autre part, pour tout $a \in A$, il existe $b \in A_s$ tel que $b = e_s(a)$ et, par suite, a est un zéro de $B_s \circ e_s$. Comme l'équation $e_s(z) = b$ (où l'inconnue est z) n'admet que des racines simples, la multiplicité du zéro a de $B_s \circ e_s$ est effectivement égale à q_b , c'est-à-dire plus grande que la multiplicité p_a du zéro a de m_T . Cela veut dire aussi que $B_s \circ e_s$ est un multiple de z^{p_a} si $a = 0$, de $((\bar{a}/|a|) [(a-z)/(1-\bar{a}z)])^{p_a}$ si $a \neq 0$.

Si m_T est un produit de Blaschke, ce dernier résultat veut dire aussi que $B_s \circ e_s$ est un multiple de m_T . D'après le lemme 1.5, $(T(s))_{s>0}$ est alors un semi-groupe de contractions de classe C_0 et, pour tout $s > 0$, B_s est la fonction minimum de $T(s)$.

2.5. COROLLAIRE. — *On suppose que m_T est un produit de Blaschke et que 1 n'est pas un point d'accumulation des zéros de m_T , alors $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions de classe C_0 .*

Démonstration. — Dans l'hypothèse donnée, on peut supposer que

$$0 < \alpha < |\lambda| \leq \pi \quad \text{pour tout } a = r e^{i\lambda} \in A,$$

et la convergence de la série $\sum_{a \in A} p_a (1-r) \lambda^{-2}$ est équivalente à celle de la série $\sum_{a \in A} p_a (1-|a|)$. Or, comme $m_T \in H^\infty$, la dernière série est toujours convergente. Le corollaire est donc démontré.

2.6. COROLLAIRE. — *Si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 , alors l'ensemble A des zéros de m_T ne contient aucune sous-suite infinie de solutions d'une équation de la forme $e_s(z) = b$, où $b \in D$ et $s > 0$. En particulier, si A est infini, les ensembles A_s (où $s > 0$) sont des ensembles infinis.*

Démonstration. — En effet, si A contient une sous-suite infinie A' telle que $e_s(a) = b$ pour tout $a \in A'$, on a alors

$$\sum_{a \in A'} p_a (1 - |e_s(a)|) = \sum_{a \in A'} p_a (1 - |b|) = \infty.$$

En particulier, cela implique la divergence de la série $\sum_{a \in A} p_a (1 - |e_s(a)|)$, et la condition (B_1) n'est pas vérifiée.

3. Comportement de la mesure μ . Cas des fonctions singulières

Dans ce paragraphe, on va examiner le comportement de la mesure singulière μ lorsque $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . D'après le lemme 1.5 (deuxième partie), on peut, sans sortir du cas général, supposer même que m_T est une fonction singulière de la forme S_μ , où $\mu(\{0\}) = 0$. La restriction $\mu(\{0\}) = 0$ est justifiée par le fait que, lorsque m_T est la fonction singulière e_v avec $v > 0$ correspondant à une mesure ponctuelle placée au point $z = 1$, la solution obtenue n'est pas de même nature que celle obtenue dans la suite de ce paragraphe.

Nous avons besoin du résultat préliminaire suivant :

3.1. PROPOSITION. — Si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 , et si la fonction minimum m_T de T est une fonction singulière de la forme S_μ , alors, pour tout $s > 0$, la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$ est une fonction singulière.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $m_{T(s)}$ n'a aucun zéro. Or, si $z = 0$ est un zéro de $m_{T(s)}$, on peut écrire $m_{T(s)} = z \cdot m_1(z)$ avec $m_1 \in H^\infty$, et une relation de la forme $m_{T(s)} \circ e_s = h_s \cdot m_T$ (avec $h_s \in H^\infty$) devient

$$e_s(z) \cdot m_1(e_s(z)) = h_s(z) \cdot m_T(z).$$

Comme m_T est premier avec e_s [car $\mu(\{0\}) = 0$], la fonction e_s doit être un diviseur de h_s . On peut donc écrire $h_s = e_s \cdot k_s$ (avec $k_s \in H^\infty$), et on obtient $m_1 \circ e_s = k_s \cdot m_T$.

Si $z = b$ est un zéro non nul de $m_{T(s)}$, on peut écrire

$$m_{T(s)}(z) = (z - b) \cdot m_2(z)$$

(avec $m_2 \in H^\infty$ et $m_2 \neq 0$). Soit B le produit de Blaschke dont l'ensemble des zéros coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation $e_s(z) = b$, on a alors

$$e_s(z) - b = B(z) \cdot g(z),$$

où

$$g \in H^\infty \quad \text{et} \quad g(z) \neq 0 \quad \text{pour tout } z \in D = \{z; |z| < 1\}.$$

La dernière propriété veut dire que g^{-1} est analytique dans le disque D . Sur la frontière on a, d'autre part,

$$\frac{1}{1+|b|} \leq |g(z)|^{-1} = |B(z)(e_s(z)-b)^{-1}| = |e_s(z)-b|^{-1} \leq \frac{1}{1-|b|} \text{ p. s.,}$$

et g^{-1} est une fonction dans H^∞ .

Cela étant, une relation de la forme $m_{T(s)} \circ e_s = h_s \cdot m_T$ devient

$$B(z) \cdot g(z) \cdot m_2(e_s(z)) = h_s(z) \cdot m_T(z),$$

et montre que B est un diviseur de h_s (en effet, m_T est une fonction singulière et, par suite, est première avec B). On peut donc écrire $h_s = B \cdot f$ (avec $f \in H^\infty$), et on obtient $m_2 \circ e_s = (f g^{-1}) m_T$.

Ainsi, dans les deux cas, $m_{T(s)}$ n'est plus la plus petite des fonctions m_s vérifiant une relation de la forme $m_s \circ e_s = k_s \cdot m_T$. La proposition est alors une conséquence du lemme 1.5.

3.2. Passons à la démonstration du théorème 1.2. — Si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 alors, pour tout $s > 0$, la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$ est, d'après la proposition précédente, une fonction singulière. Soit maintenant m_s une fonction singulière correspondant à une mesure singulière ν_s et vérifiant une relation de la forme $m_s \circ e_s = k_s \cdot m_T$, avec $k_s \in H^\infty$.

D'autre part, en utilisant les notations du premier paragraphe, on a aussi le développement suivant :

$$\frac{e_s(z) + e^{it}}{e_s(z) - e^{it}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \cos \tau_n^s(t)}{s} \frac{z + e^{i\tau_n^s(t)}}{z - e^{i\tau_n^s(t)}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m_s(e_s(z)) &= \exp \left(\int_I \frac{e_s(z) + e^{it}}{e_s(z) - e^{it}} d\nu_s(t) \right) \\ &= \exp \left(\int_I \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z + e^{i\tau_n^s(t)}}{z - e^{i\tau_n^s(t)}} \frac{1 - \cos \tau_n^s(t)}{s} d\nu_s(t) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I \frac{z + e^{i\tau_n^s(t)}}{z - e^{i\tau_n^s(t)}} \frac{1 - \cos \tau_n^s(t)}{s} d\nu_s(t) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{I_n^s} \frac{z + e^{i\lambda}}{z - e^{i\lambda}} \frac{1 - \cos \lambda}{s} d(\nu_s(\tau_n^s)^{-1})(\lambda) \right), \end{aligned}$$

et $m_s \circ e_s$ sera un multiple de m_T ,

$$\begin{aligned} m_T(z) &= \exp \left(\int_I \frac{z + e^{i\lambda}}{z - e^{i\lambda}} d\mu(\lambda) \right) = \exp \left(\int_{I - \{0\}} \frac{z + e^{i\lambda}}{z - e^{i\lambda}} d\mu(\lambda) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n \in Z} \int_{I_n^s} \frac{z + e^{i\lambda}}{z - e^{i\lambda}} d\mu(\lambda) \right) = \exp \left(\sum_{n \in Z} \int_{I_n^s} \frac{z + e^{i\lambda}}{z - e^{i\lambda}} d\mu'_{s,n}(\lambda) \right), \end{aligned}$$

si, et seulement si,

$$v_{s,n}^1 \geq \mu'_{s,n} \quad \text{pour tout } n \in Z,$$

où $v_{s,n}^1$ est la mesure sur I_n^s , définie par

$$v_{s,n}^1(E) = \int_E \frac{1 - \cos \lambda}{s} d(v_s(\tau_n^s)^{-1})(\lambda) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } E \text{ de } I_n^s.$$

Il en résulte que

$$v_s(\tau_n^s)^{-1} \geq \mu''_{s,n} \quad \text{pour tout } n \in Z,$$

ou, de façon équivalente,

$$v_s \geq \mu''_{s,n} \tau_n^s = \mu_{s,n} \quad \text{pour tout } n \in Z,$$

et, par suite,

$$v_s \geq \sup_{n \in Z} \mu_{s,n} = \mu_s.$$

Comme v_s est une mesure finie sur I , ce dernier résultat donne

$$(S) \quad \int_I d\mu_s(t) \leq \int_I dv_s(t) < \infty \quad \text{pour tout } s > 0.$$

Réciproquement, si cette dernière condition est vérifiée, la fonction singulière S_s , associée à la mesure μ_s , est bien définie et, d'après la définition même de μ_s , la fonction $S_s \circ e_s$ est un multiple de m_T . Le semi-groupe $(T(s))_{s>0}$ est donc de classe C_0 , d'après le lemme 1.5. Ce lemme et ce que nous avons vu plus haut montrent aussi que S_s est la fonction minimum $m_{T(s)}$ de $T(s)$.

Enfin, comme $\mu_s = \sup_{n \in Z} \mu_{s,n} \leq \sum_{n \in Z} \mu_{s,n}$, on a

$$\begin{aligned} \int_I d\mu_s(t) &\leq \sum_{n \in Z} \int_I d\mu_{s,n}(t) = \sum_{n \in Z} \int_{I_n^s} \frac{s d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda} \\ &= \int_{I - \{0\}} \frac{s d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda} = \int_I \frac{s d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda} \quad [\text{car } \mu(\{0\}) = 0]. \end{aligned}$$

La condition (S_1) implique donc la condition (S), et le théorème 1.2 est démontré.

3.3. COROLLAIRE. — Si m_T est une fonction singulière de la forme S_μ , et si le support de la mesure μ ne contient pas le point $\lambda = 0$, alors $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions de classe C_0 .

Démonstration. — Dans l'hypothèse donnée, on peut supposer que $0 < \alpha < |\lambda| \leq \pi$ pour tout point λ dans le support de μ et, par suite,

$$\int_I \frac{d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda} \leq \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_{\{|\lambda| > \alpha\}} d\mu(\lambda) \leq \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_I d\mu(\lambda) < \infty$$

et la condition (S_1) est vérifiée.

3.4. COROLLAIRE. — S'il existe $s' > 0$ tel que $e_{s'}(e^{it}) \neq e_{s'}(e^{it'})$ pour tout t et t' du support de μ , alors les deux conditions (S) et (S_1) sont équivalentes.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse considérée, on a

$$\mu_{s'} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \mu_{s', n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_{s', n}$$

et par suite

$$\int_I d\mu_{s'}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I d\mu_{s', n}(\lambda) = \int_{I - \{0\}} \frac{s' d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda} = \int_I \frac{s' d\mu(\lambda)}{1 - \cos \lambda}.$$

L'hypothèse $\int_I d\mu_{s'}(\lambda) < \infty$ implique donc $\int_I [d\mu(\lambda)/(1 - \cos \lambda)] < \infty$, et le corollaire 3.4 est démontré.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le support de la mesure μ est dénombrable ou, plus généralement, μ est une somme de masses positives α_λ placées aux points λ d'un ensemble dénombrable L de points de $I - \{0\}$. Soit alors L_s l'ensemble des scalaires $u \in I$ tels que $e^{iu} = e_s(e^{i\lambda})$ pour un certain $\lambda \in L$ et, pour chaque $u \in L_s$, posons

$$\beta^u = \sup \{s \cdot \alpha_\lambda (1 - \cos \lambda)^{-1}; \lambda \in L \text{ et } e^{iu} = e_s(e^{i\lambda})\}.$$

On note d'abord que la condition (S) est identique à la condition

$$(S') \quad \sum_{u \in L_s} \beta^u < \infty \quad \text{pour tout } s > 0$$

et la condition (S_1) à la condition

$$(S'_1) \quad \sum_{\lambda \in L} \frac{\alpha_\lambda}{1 - \cos \lambda} < \infty \quad \text{ou} \quad \sum_{\lambda \in L} \lambda^{-2} \alpha_\lambda < \infty.$$

Avec ces notations, on peut améliorer le théorème 1.2 par le théorème suivant :

3.5. THÉORÈME — *Les deux conditions (S') et (S'₁) sont équivalentes. D'autre part, si ces conditions sont vérifiées, et si L est un ensemble infini, alors :*

1° $\lim_{\lambda \in L} (1 - \cos \lambda)^{-1} \alpha_\lambda = \lim_{\lambda \in L} \lambda^{-2} \alpha_\lambda = 0$, suivant le filtre des sous-ensembles finis de L.

2° S'il existe $s' > 0$ tel que $L_{s'}$ soit un ensemble fini, alors $\lim_{\lambda \in L} \lambda = 0$.

Démonstration. — Comme L est un ensemble dénombrable, un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 2.1 montre qu'il existe $s'' > 0$ tel que $e_{s''}(e^{i\lambda}) \neq e_{s''}(e^{i\lambda'})$ pour tout λ, λ' dans L et $\lambda \neq \lambda'$. En particulier, on a

$$\sum_{u \in L_{s''}} \beta^u = \sum_{\lambda \in L} s'' \alpha_\lambda (1 - \cos \lambda)^{-1},$$

ce qui montre que (S') implique la condition (S'₁).

La partie 1° du théorème résulte de la convergence de la série $\sum_{\lambda \in L} (1 - \cos \lambda)^{-1} \alpha_\lambda$ ou de la série $\sum_{\lambda \in L} \lambda^{-2} \alpha_\lambda$.

Dans l'hypothèse de la dernière partie du théorème tout point λ de L est une solution d'un nombre fini d'équations de la forme $e_{s'}(e^{i\lambda}) = e^{iu}$, où $u \in L_{s'}$. Un élément quelconque de L est donc de la forme λ_n tel que

$$-s' \cotg(2^{-1} \lambda_n) = u + 2n\pi, \quad \text{où } u \in L_{s'} \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

Or, pour u fixé dans $L_{s'}$ et pour $|n|$ assez grand, on a $\lambda_n \simeq (-s'/n)$ et, par suite, $\lim_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n = 0$. Comme $L_{s'}$ est fini, on a aussi $\lim_{\lambda \in L} \lambda = 0$, et le théorème est démontré.

Pour terminer le paragraphe, notons que, contrairement à une propriété analogue dans le cas des produits de Blaschke et exprimée par le corollaire 2.6, l'hypothèse faite dans le 2° du théorème 3.5, peut être réalisée effectivement. En effet, soit u un scalaire non nul de I , et soit L l'ensemble des solutions de l'équation $e_{s'}(e^{i\lambda}) = e^{iu}$. Chaque élément λ de L est donc de la forme λ_n telle que $-s' \cotg(2^{-1} \lambda_n) = u + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$. Soit μ la somme des masses $\alpha_{\lambda_n} = 1/|n|^\alpha$ placées aux points λ_n , $n \in \mathbb{Z}$. La masse totale de μ est donc égale à $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 1/|n|^\alpha$, et est finie si $\alpha > 1$. D'autre part pour $|n|$ assez grand, on a

$$\lambda_n^{-2} \alpha_{\lambda_n} \simeq \pi^2 s'^{-2} n^2 |n|^{-\alpha} = \pi^2 s'^{-2} (|n|^{2-\alpha}).$$

Si $\alpha - 2 > 1$, c'est-dire si $\alpha > 3$, la mesure μ vérifie les conditions du théorème précédent. Pour cet exemple, L est un ensemble infini et pourtant L_s se réduit à un seul point (c'est-à-dire est un ensemble fini).

4. Retour au cas général

Maintenant, nous allons démontrer les autres résultats annoncés dans le premier paragraphe. Des exemples de contractions de classe C_0 , dont les semi-groupes associés ne sont pas de classe C_0 , seront donnés.

4.1. *Démontrons d'abord le théorème 1.3.* — L'équivalence des deux conditions (G) et (G₁) résulte de la première partie du lemme 1.5.

D'autre part, on note que, si $m_T = e_v$ avec $v > 0$, alors $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . En effet, si on pose

$$n_s = \inf \{ n; n \in N \text{ et } n.s \geq v \},$$

il est facile de vérifier que $(T(s))^{n_s} = 0$.

L'équivalence des deux conditions (G₁) et (G₂) résulte alors de la remarque précédente, des deux théorèmes 1.1, 1.2, et de la deuxième partie du lemme 1.5. Le théorème 1.3 est donc démontré.

4.2. COROLLAIRE. — *Si la fonction minimum m_T de T est analytique au point $z = 1$, ou si $z = 1$ est un point singulier isolé de la partie singulière de m_T et n'est pas un point d'accumulation des zéros de m_T , alors $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 .*

4.3. COROLLAIRE. — *Soient T et T' deux contractions de classe C_0 , et soient $(T(s))_{s>0}$, $(T'(s))_{s>0}$, les semi-groupes admettant respectivement T et T' comme cogénérateurs. Si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions de classe C_0 et si la fonction minimum de T' est un diviseur de celle de T , alors $(T'(s))_{s>0}$ est aussi un semi-groupe de contractions de classe C_0 .*

4.4. PROPOSITION. — *Toute contraction unicellulaire et de classe C_0 est le cogénérateur d'un semi-groupe continu de contractions de classe C_0 . De plus, si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe continu de contractions unicellulaires et de classe C_0 , alors :*

ou bien $\dim(\mathcal{H}) = n$ est finie, et il existe $a \in D$ tel que

$$m_{T(s)}(z) = (e_s(a) - z)^n (1 - \overline{e_s(a)}z)^{-n} \text{ pour tout } s > 0;$$

ou bien, dans le cas contraire, il existe $t \in I$, $t \neq 0$ et $u > 0$ tels que

$$m_{T(s)}(z) = \exp(s \cdot u(z + e_s(e^{it}))(z - e_s(e^{it}))^{-1}) \text{ pour tout } s > 0.$$

Démonstration. — Si $T(s)$ est une contraction unicellulaire, il en est de même pour T . En effet, la relation $T(s) = e_s(T)$ montre que tout sous-espace invariant par T l'est aussi par $T(s)$. L'ensemble des sous-espaces invariants par T est donc une sous-famille de l'ensemble des sous-espaces invariants par $T(s)$ et, par suite, est totalement ordonné par inclusion. T est donc une contraction unicellulaire.

Si T est unicellulaire et de classe C_0 , on a les trois possibilités suivantes :
ou bien $\dim \mathcal{H} = n$ est finie, et alors m_T est de la forme

$$m_T(z) = (a-z)^n (1-\bar{a}z)^{-n} \quad \text{avec } a \in D;$$

ou bien

$$m_T(z) = \exp(u(z+e^{it})(z-e^{it})^{-1}) \quad \text{avec } t \neq 0 \text{ et } u > 0;$$

ou bien $m_T = e_v$ avec $v > 0$.

Dans les trois cas, $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions de classe C_0 , d'après le théorème 1.3. Le dernier cas n'est pas possible si $(T(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de contractions unicellulaires. En effet, la propriété $m_T = e_v$ avec $v > 0$ implique d'abord que la dimension de \mathcal{H} est infinie. D'autre part, si $m_T = e_v$, alors $m_{T(s)}$ sera, pour $s > 0$, un monôme de degré n_s ce qui implique que la dimension de \mathcal{H} est finie.

Le reste de la proposition résulte alors des deux théorèmes 1.1 et 1.2.

4.5. En utilisant les résultats obtenus jusqu'à maintenant, on peut donner des exemples de contractions de classe C_0 qui ne sont pas cogénérateurs de semi-groupes continus de contractions de classe C_0 . C'est le cas de l'exemple considéré dans la dernière partie du paragraphe précédent si $1 < \alpha < 3$. C'est aussi le cas si m_T est un produit de Blaschke dont l'ensemble des zéros coïncide avec l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $e_{s'}(z) = b$, où $s' > 0$ et $b \in D$.

Pour ces deux exemples, on note que $T(s)$, $s > 0$, ne sont pas toutes de classe C_0 bien que $T(s')$ soit une contraction de classe C_0 . Cette remarque justifie l'intérêt du théorème 1.4 dont voici la démonstration :

Montrons d'abord que, si T est une contraction de classe C_0 , alors les contractions T^n , $n \in \mathbb{N}$, sont aussi de classe C_0 . En effet, soit

$$m_T(z) = \left(z^{p_0} \prod_{0 \neq a \in A} \left(\frac{\bar{a}}{|a|} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \right)^{p_a} \right) \exp \left(\int_I \frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} d\mu(t) \right),$$

la fonction minimale de T , et posons

$$m(z) = \left(z^{p_0} \prod_{0 \neq a \in A} \left(\frac{\bar{a}^n}{|a^n|} \frac{a^n - z}{1 - \bar{a}^n z} \right)^{p_a} \right) \exp \left(\int_I \frac{z + e^{int}}{z - e^{int}} n d\mu(t) \right);$$

on obtient une fonction nulle m de H^∞ telle que $m(z^n)$ soit un multiple de m_T . Cette propriété résulte des développements suivants :

$$\begin{aligned} \frac{a^n - z^n}{1 - \bar{a}^n z^n} &= \prod_{k=1, \dots, n} \frac{a u_k - z}{1 - \bar{a} u_k z} \\ &= \left(\frac{a - z}{1 - \bar{a} z} \right) \left(\prod_{k=2, \dots, n} \frac{a u_k - z}{1 - \bar{a} u_k z} \right), \\ \exp \left(\int_I \frac{z^n + e^{int}}{z^n - e^{int}} n d\mu(t) \right) &= \exp \left(\int_I \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\mu(t) \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{k=2, \dots, n} \int_I \frac{z + u_k e^{it}}{z - u_k e^{it}} d\mu(t) \right), \end{aligned}$$

où $(u_k)_{k=1, \dots, n}$ est la famille des racines de l'équation $z^n = 1$ et $u_1 = 1$.

D'après le lemme 1.5, la contraction T^n est donc de classe C_0 .

Cela étant, si $T(s')$ est une contraction de classe C_0 , les contractions $T(s'/p)$, où $p \in \mathbb{N}$, sont aussi de classe C_0 . En effet, si $m(T(s')) = 0$, on a alors

$$(m \circ f) \left(T \left(\frac{s'}{p} \right) \right) = m \left(T \left(\frac{s'}{p} \right)^p \right) = m(T(s')) = 0 \quad \text{où } f(z) = z^p,$$

et $T(s'/p)$ est une contraction de classe C_0 .

D'autre part, d'après ce que nous avons vu au début de cette démonstration, la dernière propriété implique aussi que $T[(n/p)s'] = T(s'/p)^n$ est de classe C_0 pour tout $n, p \in \mathbb{N}$. La première partie du théorème résulte alors du fait que l'ensemble des scalaires de la forme $(n/p)s'$, où $n, p \in \mathbb{N}$, est dense dans R^+ .

La deuxième partie du théorème 1.4 résulte aussi de la démonstration de la première partie. En effet, d'après la démonstration précédente, si $T(s'')$ n'est pas une contraction de classe C_0 , alors aucune des contractions de la forme $T[(n/p)s'']$, avec $n, p \in \mathbb{N}$, n'est de classe C_0 . Le théorème 1.4 est donc démontré.

La proposition suivante donne un procédé pour construire des semi-groupes de contractions de classe C_0 .

4.6. PROPOSITION. — Soient $(T(s))_{s>0}$ et $(T'(s))_{s>0}$ deux semi-groupes de contractions Si $(T(s))_{s>0}$ est une transformée quasi affine du semi-groupe $(T'(s))_{s>0}$ [c'est-à-dire s'il existe une quasi-affinité X telle que

$$XT(s) = T'(s)X \quad \text{pour tout } s > 0],$$

alors le semi-groupe $(T(s))_{s>0}$ est de classe C_0 si, et seulement si, $(T'(s))_{s>0}$ est un semi-groupe de même nature.

Démonstration. — Si $XT(s) = T'(s)X$, on a aussi

$$Xf(T(s)) = f(T'(s))X \quad \text{pour tout } f \in H^\infty,$$

et la proposition en résulte.

Pour terminer, notons que la proposition 4.4 montre aussi que, si une contraction T est unicellulaire, alors le semi-groupe $(T(s))_{s>0}$ admettant T comme cogénérateur n'est pas nécessairement un semi-groupe de contractions unicellulaires (c'est le cas, par exemple, si $m_T = e_v$ avec $v > 0$.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions*. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962 (*Prentice-Hall Series in modern analysis*).
- [2] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Paris, Masson; Budapest, Akadémiai Kiado, 1967.
- [3] TÔN-THÁT LONG. — Contributions à la théorie spectrale des contractions de l'espace de Hilbert, *Bull. Soc. math. France*, t. 101, 1973, p. 219-235.
- [4] TÔN-THÁT LONG. — *Contributions à la théorie spectrale des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Thèse Sc. math. Univ. Paris-VI, 1973.

(Texte reçu le 12 avril 1973,
révisé le 20 novembre 1973.)

TÔN-THÁT LONG

Laboratoire de Mathématiques,
Faculté des Sciences de Saïgon,
227 rue Cong-Hòa,
Saïgon (Viet-Nam Sud).