

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

## Sur la fonction exponentielle

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 8 (1880), p. 11-18

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1880\\_\\_8\\_\\_11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__11_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# BULLETIN

DE LA

## SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

### MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

*Sur la fonction exponentielle; par M. LAGUERRE.*

(Séance du 7 novembre 1879.)

1. Soient  $a, b, c, \dots, l, m$  quantités arbitraires et  $F, F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$ ,  $m$  polynômes entiers en  $x$ . Si l'on désigne respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  le degré de ces polynômes et si l'on pose, pour abréger,

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

on voit que, dans l'expression

$$V = F e^{ax} + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} + \dots + F_{m-1} e^{lx},$$

figurent les  $\mu + m$  coefficients des polynômes  $F, F_1, \dots, F_{m-1}$ .

En donnant à l'un d'eux une valeur arbitraire, on peut encore disposer des  $(\mu + m - 1)$  autres coefficients de façon à annuler, dans le développement de  $V$  suivant les puissances croissantes de  $x$ , les coefficients de

$$x^0, x^1, x^2, \dots, x^{\mu+m-2}.$$

Les polynômes  $F, F_1, \dots, F_{m-1}$  étant ainsi déterminés, le développement de  $V$  commencera par un terme de l'ordre de  $x^{\mu+m-1}$ .

Dans une Note publiée dans le *Journal de M. Borchardt* (<sup>1</sup>),

---

(<sup>1</sup>) *Lettre de M. Hermite à M. Borchardt (Journal de M. Borchardt, t. 76).*

M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. Depuis, dans le cas particulier où tous les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  sont égaux à un même nombre  $n$  <sup>(1)</sup>, j'ai rattaché la recherche de l'expression V au développement de  $e^{zx}$  suivant les puissances croissantes du polynôme

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c) \dots (z - l),$$

et, en posant

$$f(z) = z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} + \dots + sz + t,$$

j'ai montré que V était une solution de l'équation différentielle du  $m^{\text{ième}}$  ordre

$$x \left( \frac{d^m y}{dx^m} + p \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + s \frac{dy}{dx} + ty \right) - n \left[ m \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1)p \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + (m-2)q \frac{d^{m-3} y}{dx^{m-3}} + \dots + sy \right] = 0.$$

Si l'on représente, pour un instant, par

$$Dy, D^2y, D^3y, \dots$$

les dérivées successives de  $y$ , l'équation précédente peut se mettre sous la forme symbolique qui suit :

$$xf(D)y - f'(D)y = 0.$$

2. Dans le cas plus général où les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sont différents, il est aussi facile de former l'équation différentielle à laquelle satisfait V.

Si l'on pose, pour abrégé,

$$f_a = \frac{f}{x-a}, \quad f_b = \frac{f}{x-b}, \quad \dots, \quad f_l = \frac{f}{x-l},$$

cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(1) \quad xf(D)y - [\alpha f_a(D) + \beta f_b(D) + \dots + \lambda f_l(D)]y = 0,$$

et on le démontrerait aisément en suivant la voie indiquée par M. Hermite dans la Note que j'ai citée ci-dessus.

---

<sup>(1)</sup> Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme (*Journal de M. Borchardt*, t. 88).

3. En particulier, si  $m = 3$ , l'équation (1) peut s'écrire

$$x[y''' - (a + b + c)y'' + (ab + bc + ca)y' - abc y] - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b + c) + \beta(c + a) + \gamma(a + b)]y' + (abc + \beta ca + \gamma ab)y\} = 0.$$

En supposant, ce qu'il est toujours permis de faire sans nuire à la généralité du problème, que

$$a = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x[y''' - (b + c)y'' + bcy'] \\ - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b + c) + c\beta + a\gamma]y' + \alpha bcy\} \end{array} \right\} = 0.$$

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer directement cette équation.

4. Soient  $F$ ,  $F_1$  et  $F_2$  trois polynômes en  $x$  dont le degré soit respectivement marqué par les nombres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ; on peut disposer des coefficients de ces polynômes de telle sorte que le développement de l'expression

$$V = F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx}$$

commence par un terme de l'ordre de  $x^{\alpha+\beta+\gamma+2}$ .

On a donc

$$F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\alpha+\beta+\gamma+2}),$$

ou, en faisant, pour abréger,  $\alpha + \beta + \gamma = \mu$ ,

$$(3) \quad F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\mu+2}) \quad (1).$$

En formant successivement la première et la seconde dérivée de la relation (3), il vient

$$(4) \quad F' + e^{bx}(F'_1 + bF_1) + e^{cx}(F'_2 + cF_2) = (x^{\mu+1})$$

et

$$(5) \quad F'' + e^{bx}(F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1) + e^{cx}(F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2) = (x^\mu).$$

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement, indépendamment de la nature des coefficients, par  $(x^p)$  une série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $x$  et commençant par un terme en  $x^p$ .

En résolvant les équations (3), (4) et (5), on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F' & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ F'' & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x^{\mu+2}) & F_1 & F_2 \\ (x^{\mu+1}) & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ (x^\mu) & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix}.$$

d'où il résulte que  $\Delta$  est divisible par  $x^\mu$ , et, comme d'ailleurs cette expression est précisément du degré  $\mu$ , on a

$$\Delta = Mx^\mu,$$

$M$  désignant une quantité constante.

5. Je pose, pour abrégér,

$$\Delta = Mx^\mu = PF'' - QF' + RF,$$

puis

$$F_1 e^{bx} = u, \quad F_2 e^{cx} = v,$$

et enfin

$$uv' - vu' = \omega, \quad u'v'' - v'u'' = \omega.$$

Comme on a évidemment

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ F' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ F'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix}.$$

on en déduit

$$P = e^{-(b+c)}\omega, \quad Q = e^{-(b+c)}\omega' \quad \text{et} \quad R = e^{-(b+c)}\omega.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ y' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ y'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix} = Mx^\mu,$$

que l'on peut écrire

$$(6) \quad Py'' - Qy' + Ry = Mx^\mu.$$

Cette équation est satisfaite quand on y fait  $y = F$ ; la même équation

tion est également satisfaite quand on y fait  $y = u$  ou  $y = v$ , pourvu que l'on y remplace la constante  $M$  par zéro.

Si donc on élimine, par différentiation, la constante  $M$  de l'équation (6), l'équation que l'on obtient

$$Pxy''' + (Px' - Qx - 3nP)y'' + (Rx - Q'x + 3nQ)y' + (R'x - 3nR)y = 0$$

a pour solutions

$$y = F, \quad y = u \quad \text{et} \quad y = v;$$

c'est, par suite, l'équation à laquelle satisfait l'expression  $V$ . En y remplaçant  $P$ ,  $Q$  et  $R$  par leurs valeurs données plus haut, elle prend la forme suivante :

$$(A) \quad \begin{cases} \omega xy''' - [(b+c)x + \mu]\omega y'' \\ + [x\omega + x(b+c)\omega' - x\omega'' + \mu\omega']y' \\ + [x\omega' - (b+c)x\omega - \mu\omega]y = 0. \end{cases}$$

6. Pour simplifier cette équation, je remarque que l'équation (6) a une solution entière, à savoir le polynôme  $F$ . Il est facile d'ailleurs d'intégrer cette équation, puisque l'équation obtenue en retranchant le second membre,

$$Py'' - Qy' + Ry = 0$$

a pour solutions

$$y = u \quad \text{et} \quad y = v.$$

En employant donc la méthode connue de la variation des constantes arbitraires, je poserai

$$y = Au + Bv,$$

puis

$$A'u + B'v = 0 \quad \text{et} \quad A'u' + B'v' = \frac{Mx^k}{P}.$$

On en déduit

$$A' = \frac{Mx^k}{P^2} e^{-bx} F_2 dx, \quad B' = -\frac{Mx^k}{P^2} e^{-cx} F_1 dx$$

et

$$y = MF_1 e^{bx} \int \frac{x^k}{P^2} e^{-bx} F_2 dx - MF_2 e^{cx} \int \frac{x^k}{P^2} e^{-cx} F_1 dx.$$

Comme l'une des valeurs de  $\gamma$  est le polynôme  $F$ , on voit que l'intégrale

$$\int \frac{x^2}{P^2} e^{-bx} F_2 dx$$

ne doit renfermer d'autre transcendante que la fonction  $e^{-bx}$ .

En désignant par  $\lambda$  une racine quelconque de l'équation  $P = 0$ , posons

$$\frac{x^2 F_2}{P^2} = E + \sum \frac{p}{x - \lambda} + \sum \frac{q}{(x - \lambda)^2};$$

l'intégrale précédente devient

$$\int e^{-bx} E dx + \int e^{-bx} \sum \frac{p}{x - \lambda} dx + \int e^{-bx} \sum \frac{q}{(x - \lambda)^2} dx,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int e^{-bx} E dx - \sum \frac{e^{-bx} q}{x - \lambda} + \int e^{-bx} \sum \frac{p - bq}{x - \lambda} dx.$$

Cette expression ne devant renfermer d'autre transcendante que  $e^{-bx}$ , on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation  $P(\lambda) = 0$ , la relation

$$b = \frac{p}{q};$$

or un calcul facile donne

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{F_2'(\lambda)}{F_2(\lambda)} - \frac{P''(\lambda)}{P'(\lambda)}.$$

On a donc, quelle que soit la racine considérée de l'équation  $P(\lambda) = 0$ ,

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{F_2'(\lambda)}{F_2(\lambda)} - \frac{P''(\lambda)}{P'(\lambda)} = b,$$

d'où l'identité suivante, où  $G$  désigne un polynôme du degré  $\gamma$  :

$$(7) \quad x F_2 P' + \mu F_2 P' - x F_2 P'' - b x F_2 P' + G P = 0.$$

7. Pour déterminer le polynôme  $G$ , je remarque qu'en négligeant les multiples de  $F_2$  on a, par la définition même du polynôme  $P$ ,

$$P \equiv F_1 F_2'$$

et

$$P' \equiv F_1 F_2'' + (c - b) F_1 F_2'.$$

La relation donne d'ailleurs

$$x F_2' P' + GP \equiv 0,$$

d'où, en remplaçant P et P' par leurs valeurs congrues suivant le module  $F_2$ ,

$$x F_1 F_2' F_2'' + (c - b) x F_1 F_2'^2 + G F_1 F_2' \equiv 0,$$

puis, en divisant par  $F_1 F_2'$ ,

$$G \equiv (b - c) x F_2'' - x F_2'^2$$

et enfin

$$G = m F_2 + (b - c) x F_2'' - x F_2'^2,$$

$m$  désignant une quantité constante.

En portant cette valeur de G dans l'équation (7), elle devient

$$(8) \quad x F_2 P'' + (b x F_2 - x F_2' - \mu F_2) P' - [m F_2 + (b - c) x F_2'' - x F_2'^2] P = 0;$$

P étant du degré  $(\beta + \gamma)$ , on trouve facilement, en égalant à zéro le coefficient du terme le plus élevé dans la relation précédente,

$$b(\beta + \gamma) - m - \gamma(b - c) = 0, \quad \text{d'où} \quad m = b\beta + c\gamma.$$

### 8. En employant maintenant les relations

$$P = e^{-(b+c)\omega} \quad \text{et} \quad F_2 = e^{-c\omega},$$

j'introduis les fonctions  $\omega$  et  $\nu$  dans l'équation (8).

En effectuant les calculs, on obtient la relation

$$\nu x \omega'' - [(b + c)\nu x + \mu\nu + x\nu']\omega' + [bcx\nu + \mu(b + c)\nu - m\nu + x\nu'']\omega = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$x\omega'' - [(b + c)x + \mu]\omega' + [bcx + \mu(b + c) - m]\omega + \frac{x}{\nu}(\nu''\omega - \nu'\omega').$$

Je remarque maintenant que,  $\omega$  étant égal à  $u\nu' - \nu u'$ , l'expression  $\frac{\nu''\omega - \nu'\omega'}{\nu}$  a pour valeur

$$\nu' u'' - u' \nu'' = -\omega.$$

On a donc identiquement

$$x(w'' - \omega) - [(b + c)x + \mu]w' + [bcx + \mu(b + c) - m]w = 0.$$

Tirons  $\omega$  de cette relation et portons sa valeur dans l'équation (A);  $w$ ,  $w'$  et  $w''$  disparaîtront, et l'on obtiendra une équation de la forme

$$xy''' - [(b + c)x + \mu]y'' + [bcx + \mu(b + c) - m]y' + Hy = 0.$$

On déterminera  $H$  en remarquant que, l'équation précédente ayant pour solution le polynôme entier  $F$  qui est du degré  $\alpha$ ,  $H$  est une constante, et que le coefficient de  $x^\alpha$  dans le premier membre est

$$H + \alpha bc;$$

on a donc

$$H = -\alpha bc.$$

9. Si maintenant on remplace respectivement  $\mu$  et  $m$  par  $\alpha + \beta + \gamma$  et  $b\beta + c\gamma$ , l'équation devient

$$xy''' - [(b + c)x + \alpha + \beta + \gamma]y'' + [bcx + \alpha(b + c) + c\beta + b\gamma]y' - \alpha bcy = 0,$$

et on peut la mettre sous la forme que j'ai mentionnée plus haut :

$$x[y''' - (b + c)y'' + bcy'] - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b + c) + c\beta + b\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0.$$

---