DIDIER ARNAL
GEORGES PINCZON

Idéaux à gauche dans les quotients simples de l'algèbre enveloppante de $sl(2)$

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 381-395
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__381_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 381-395.

IDÉAUX À GAUCHE DANS LES QUOTIENTS SIMPLES DE L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE DE sl(2)

PAR

DIDIER ARNAL ET GEORGES PINCZON
[Dijon]

RÉSUMÉ. — On montre que les idéaux à gauche des quotients simples de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie complexe sl (2) sont engendrés par deux éléments. On applique ce résultat à l'étude de certains idéaux, monogènes ou non, liés aux représentations irréductibles de sl (2), puis aux représentations irréductibles de so (4).

1. Préliminaires

Soit sl (2) l'algèbre de Lie simple complexe de base $\{ Y, F, G \}$ vérifiant les relations de commutation

$$[Y, F] = F, \qquad [Y, G] = -G, \qquad [F, G] = 2Y.$$

Soient $\mathcal{U}$ l'algèbre enveloppante de sl (2), $Q = GF + Y + Y^2$ l'élément de Casimir, et $Z = \mathbf{C}[Q]$ le centre de $\mathcal{U}$. Les idéaux maximaux bilatères de codimension infinie de $\mathcal{U}$ sont les idéaux $(Q - \lambda)\mathcal{U}$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\lambda \neq u(u+1)$, $2u \in \mathbf{N}$ [6] (cette restriction sur λ est supposée vérifiée dans toute la suite).

Soit B_λ le quotient $\mathcal{U}/(Q - \lambda)\mathcal{U}$. Voici quelques propriétés utiles de cette algèbre : B_λ est primitive, noethérienne, de centre $\mathbf{C}$, intègre, et ses seuls inversibles sont les scalaires. En outre [si l'on désigne par les mêmes lettres les images canoniques des éléments de base de sl (2) dans B_λ], B_λ est un $\mathbf{C}[Y]$-module libre de base $\{ F^m, G^r, m$ et r entiers, $r > 0 \}$ [3]. Enfin, un calcul simple prouve [1] le lemme suivant.

LEMME. — *Soit P un polynôme de* $\mathbf{C}[X]$; *les égalités suivantes sont vraies dans B_λ :*

$$F^n P(Y) = P(Y - n) F^n,$$
$$G^n P(Y) = P(Y + n) G^n.$$

Soit α *le polynôme* $\alpha(X) = \lambda - X - X^2$;

si $n \geqq p$,

$$G^n F^p = G^{n-p} \alpha(Y + p - 1) \ldots \alpha(Y + 1) \alpha(Y)$$

et

$$F^p G^n = \alpha(Y - 1) \alpha(Y - 2) \ldots \alpha(Y - p) G^{n-p};$$

si $n \leqq p$,

$$G^n F^p = \alpha(Y) \alpha(Y + 1) \ldots \alpha(Y + n - 1) F^{p-n}$$

et

$$F^p G^n = F^{p-n} \alpha(Y - n) \ldots \alpha(Y - 2) \alpha(Y - 1).$$

Dans l'étude des représentations irréductibles de dimension infinie [1] de sl (2), on est amené à étudier les idéaux à gauche de B_λ et à déterminer, dans certains cas, combien (au moins) on doit prendre d'éléments dans un idéal pour l'engendrer [1]. Nous montrons dans cet article qu'on peut toujours engendrer un idéal à gauche de B_λ par deux de ses éléments bien choisis, et établissons des critères qui permettent de reconnaître les idéaux monogènes. La technique utilisée est une adaptation de celle de [2] (qui concernait l'algèbre de Weyl A_1) au cas traité. Enfin, nous utilisons ces résultats pour simplifier certaines démonstrations de [1] et caractériser les représentations irréductibles de so (4) qui sont produits tensoriels de représentations de sl (2).

2. Idéaux de polynômes associés à un idéal de B_λ

Soit B_n pour $n \geqq -1$ (resp. B'_n) le sous-espace de B_λ constitué des éléments x qui s'écrivent :

$$x = P_m(Y) F^m + P_{m-1}(Y) F^{m-1} + \ldots + P_0(Y) + \ldots + Q_r(Y) G^r$$

avec $[P_m(Y) \neq 0$ et $m \leqq n]$ ou $P_m = \ldots = P_0 = 0$ (resp.

$$x = P_m(Y) F^m + \ldots + P_0(Y) + \ldots + Q_{r-1}(Y) G^{r-1} + Q_r(Y) G^r$$

avec $[Q_r(Y) \neq 0$ et $r \leqq n]$ ou $Q_r = \ldots = P_0 = 0)$.

La suite des B_n (resp. des B'_n) est une filtration de B_λ puisque, lorsque x appartient à B_n (resp. à B'_n) et y appartient à B_p (resp. à B'_p), on vérifie aisément que xy appartient à B_{n+p} (resp. à B'_{n+p}).

Considérons alors un idéal à gauche I de B_λ, et $I_n = I \cap B_n$ et $I'_n = I \cap B'_n$ les filtrations de I déduites de celles de B_λ. Pour chaque x de I_n (resp. de I'_n), il existe un polynôme P_x de $\mathbf{C}[Y]$ (resp. Q_x), et un seul, tel que

$$x - P_x(Y) F^n \text{ appartienne à } B_{n-1}$$

[resp. $x - Q_x(Y) G^n$ appartienne à B'_{n-1}].

On note $a(I, n)$ [resp. $a'(I, n)$] l'ensemble des polynômes P_x (resp. Q_x) pour x appartenant à I_n (resp. à I'_n).

LEMME 1. — *$a(I, n)$ et $a'(I, n)$ sont des idéaux de* $\mathbf{C}[Y]$.

Démonstration. — $a(I, n)$ est évidemment un sous-espace vectoriel; d'autre part, soit P un élément de $a(I, n)$, x un élément de I_n vérifiant $x - P(Y) F^n \in B_{n-1}$.

Pour tout entier positif m, $Y^m x$ appartient à I_n et

$$Y^m x - Y^m P(Y) F^n \in B_{n-1},$$

donc $Y^m P$ appartient à $a(I, n)$.

Une démonstration identique s'applique pour $a'(I, n)$.

C. Q. F. D.

Notation. — On note φ l'automorphisme d'algèbre de $\mathbf{C}[Y]$, défini par

$$\varphi(Y^m) = (Y+1)^m \quad \text{si } m \in \mathbf{N} - \{0\}, \qquad \varphi(1) = 1,$$

et ψ l'automorphisme réciproque

$$\psi(Y^m) = (Y-1)^m \quad \text{si } m \in \mathbf{N} - \{0\}, \qquad \psi(1) = 1.$$

LEMME 2. — *Avec les notations précédentes, on a, pour tout n,*

$$\psi(a(I, n)) \subset a(I, n+1),$$
$$\varphi(a'(I, n)) \subset a'(I, n+1).$$

Démonstration. — Soient P un élément de $a(I, n)$, x un élément de I_n, vérifiant

$$x - P(Y) F^n \in B_{n-1}.$$

L'élément $F x$ de I_{n+1} vérifie

$$F x - FP(Y) F^n = F x - \psi(P(Y)) F^{n+1} \in B_n,$$

donc $\psi(P(Y)) \in a(I, n+1)$.

Une démonstration analogue s'applique pour l'autre inclusion.

C. Q. F. D.

On déduit du lemme 2 l'existence des suites d'idéaux suivantes de $\mathbf{C}[Y]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(I, 0) &= a(I, 0) \subset \mathfrak{a}(I, 1) = \varphi(a(I, 1)) \subset \mathfrak{a}(I, 2) \\ &= \varphi^2(a(I, 2)) \subset \ldots \subset \mathfrak{a}(I, n) = \varphi^n(a(I, n)) \subset \ldots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}'(I, 0) &= a'(I, 0) \subset \mathfrak{a}'(I, 1) = \psi(a'(I, 1)) \subset \mathfrak{a}'(I, 2) \\ &= \psi^2(a'(I, 2)) \subset \ldots \subset \mathfrak{a}'(I, n) = \psi^n(a'(I, n)) \subset \ldots\end{aligned}$$

Ces suites d'idéaux sont stationnaires, soient $\mathcal{A}(I, \infty)$ et $\mathcal{A}'(I, \infty)$ leurs unions respectives.

Remarque 1. — $\mathcal{A}(I, \infty) = \{0\}$ [resp. $\mathcal{A}'(I, \infty) = \{0\}$] si, et seulement si, $I = \{0\}$. En effet, si $I \neq \{0\}$, il est facile de voir que $a(I, n) \neq \{0\}$, pour tout n.

Considérons alors I_0 et I'_0, qui sont des idéaux respectivement de B_0 et B'_0. [Il est clair que $I_0 = \{0\}$ (resp. $I'_0 = \{0\}$) si, et seulement si, $I = \{0\}$.]

On leur applique une méthode analogue à la précédente : on filtre B_0 (resp. B'_0) par les sous-espaces B_{0n} (resp. B'_{0n}), $n \geq 0$, constitués des éléments

$$x = Q_0(Y) + \ldots + Q_m(Y)\, G^m, \qquad \text{avec} \quad Q_m(Y) \neq 0 \quad \text{et} \quad m \leq n$$

[resp. $x = P_m(Y)\, F^m + \ldots + Q_0(Y)$, avec $P_m(Y) \neq 0$ et $m \leq n$], et on note I_{0n} (resp. I'_{0n}) la filtration de I_0 (resp. I'_0) déduite de celle de B_0 (resp. B'_0).

Pour chaque x de I_{0n} (resp. I'_{0n}), il existe un polynôme Q_x (resp. P_x) de $\mathbf{C}[Y]$, et un seul, tel que

$$x - Q_x(Y)\, G^n \in B_{0n-1} \qquad [\text{resp. } x - P_x(Y)\, F^n \in B'_{0n-1}].$$

On désigne par $b(I, n)$ [resp. $b'(I, n)$ l'ensemble des polynômes Q_x (resp. P_x) pour x appartenant à I_{0n} (resp. I'_{0n})]. On vérifie comme précédemment les deux lemmes suivants :

LEMME 3. — *$b(I, n)$ et $b'(I, n)$ sont des idéaux de* $\mathbf{C}[Y]$.

LEMME 4 :

$$\begin{cases} \varphi(b(I, n)) \subset b(I, n+1). \\ \psi(b'(I, n)) \subset b'(I, n+1). \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir deux suites d'idéaux de $\mathbf{C}[Y]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(I, 0) &= b(I, 0) \subset \mathcal{B}(I, 1) \\ &= \psi(b(I, 1)) \subset \ldots \subset \mathcal{B}(I, n) = \psi^n(b(I, n)) \subset \ldots, \\ \mathcal{B}'(I, 0) &= b'(I, 0) \subset \mathcal{B}'(I, 1) \\ &= \varphi(b'(I, 1)) \subset \ldots \subset \mathcal{B}'(I, n) = \varphi^n(b'(I, n)) \subset \ldots. \end{aligned}$$

Ces suites sont stationnaires, soient $\mathcal{B}(I, \infty)$ et $\mathcal{B}'(I, \infty)$ leurs unions respectives.

REMARQUE 2. — $I = \{0\}$ si, et seulement si, $\mathcal{B}(I, \infty) = \{0\}$ [ou $\mathcal{B}'(I, \infty) = \{0\}$].

Notation. — On désigne par $d(I)$ [resp. $d'(I)$] le plus petit entier n (resp. n') tel que $\mathcal{B}(I, n) \neq \{0\}$ [resp. $\mathcal{B}'(I, n') \neq \{0\}$].

PROPOSITION 1 :

$$\begin{cases} d(I) = d'(I), \\ \mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{B}'(I, \infty), \\ \mathcal{A}'(I, \infty) = \mathcal{B}(I, \infty). \end{cases}$$

Démonstration. — Soit x un élément non nul de I de la forme $x = P_0(Y) + \ldots + Q_0(Y)\, G^{d(I)}$. Par définition de $d(I)$, on a nécessairement $P_0(Y) \neq 0$. L'élément

$$F^{d(I)} x = P_0(Y - n)\, F^{d(I)} + \ldots + Q_0(Y)\, \alpha(Y + d(I) - 1) \ldots \alpha(Y)$$

appartient à I, et comme $P_0(Y - n) \neq 0$, on en déduit que $d'(I) \leqq d(I)$. Par une technique analogue, on prouverait que $d(I) \leqq d'(I)$, d'où la première assertion.

L'inclusion $\mathcal{B}'(I, \infty) \subset \mathcal{A}(I, \infty)$ résulte des définitions. Soit P un élément de $\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(I, n)$, il existe x appartenant à I_n et vérifiant

$$x = P(Y - n)\, F^n + \ldots + Q(Y)\, G^r, \qquad \text{avec} \quad Q \neq 0.$$

$F^r x$ s'écrit $F^r x = P(Y - n - r)\, F^{n+r} + \ldots + Q'$, avec $Q' \neq 0$, donc $P(Y)$ appartient à $\mathcal{B}'(I, n + r)$, et par conséquent à $\mathcal{B}'(I, \infty)$.

C. Q. F. D.

La troisième assertion se démontre d'une façon analogue.

3. Génération des idéaux de B_λ

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer à B_λ une démonstration analogue à celle de [2].

PROPOSITION 2. — *Soient I et J deux idéaux à gauche de B_λ. On suppose :*

1° $I \subset J$;

2° $d(I) = d(J)$;

3° $\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(J, \infty)$;

4° $\mathcal{B}(I, \infty) = \mathcal{B}(J, \infty)$.

Alors $I = J$.

Démonstration. — Suivant la méthode de [2], on démontre l'égalité

$$\dim [J_m / I_m] = \Sigma_{0 < m' \leqq m} \dim [\mathcal{A}(J, m') / \mathcal{A}(I, m')] + \dim [J_0 / I_0].$$

Soit n_0 le plus petit entier n tel que

$$\mathcal{A}(J, n) = \mathcal{A}(J, \infty) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}(I, n) = \mathcal{A}(I, \infty).$$

Pour $m \geqq n_0$, la formule précédente devient

$$\dim [J_m / I_m] = \Sigma_{m'=1}^{n_0 - 1} \dim [\mathcal{A}(J, m') / \mathcal{A}(I, m')] + \dim [J_0 / I_0].$$

Désignons par n'_0 le plus petit entier n tel que

$$\mathcal{B}(J, n) = \mathcal{B}(J, \infty) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(I, n) = \mathcal{B}(I, \infty).$$

Par le même procédé, on montre que, pour $m \geqq n'_0$, on a

$$\dim [J_{0m}/I_{0m}] = \Sigma_{m'=d(I)=d(J)}^{n'_0-1} \dim [\mathcal{B}(J, m')/\mathcal{B}(I, m')].$$

Lorsque $d(I) \leqq m' \leqq n'_0 - 1$, $\mathcal{B}(I, m')$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et par conséquent $\dim [\mathcal{B}(J, m')/\mathcal{B}(I, m')] < +\infty$. Il en résulte que, pour $m \geqq n'_0$, la $\dim [J_{0m}/I_{0m}]$ est finie et indépendante de m, d'où on conclut aisément que $\dim [J_0/I_0] < +\infty$.

Maintenant, lorsque $1 \leqq m' \leqq n_0 - 1$, $\mathcal{A}(I, m')$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et par conséquent $\dim [\mathcal{A}(J, m')/\mathcal{A}(I, m')] < +\infty$. Il en résulte que, pour $m \geqq n_0$, $\dim [J_m/I_m]$ est finie et indépendante de m, donc $\dim [J/I] < +\infty$. Comme B_λ est simple de dimension infinie sur $\mathbf{C}$, on peut conclure que $I = J$.

C. Q. F. D.

Proposition 3. — *Tout idéal à gauche de B_λ est engendré par deux éléments.*

Démonstration. — Soit J un idéal à gauche non nul de B_λ. Notons :

— m_0 le plus petit entier m tel que $\mathcal{A}(J, m) = \mathcal{A}(J, \infty)$, f un générateur de $\mathcal{A}(J, m_0)$ et z un élément de J_{m_0} vérifiant

$$z = f(Y - m_0) F^{m_0} + \ldots + Q(Y) G^r, \qquad Q(Y) \neq 0.$$

— k_0 le plus petit entier $k > r$ tel que $\mathcal{B}(J, k) = \mathcal{B}(J, \infty)$, g un générateur de $\mathcal{B}(J, k_0)$, et t un élément de J_{0, k_0} qui vérifie

$$t = P(Y) + \ldots + g(Y + k_0) G^{k_0}.$$

L'élément $y = z + t = f(Y - m_0) F^{m_0} + \ldots + g(Y + k_0) G^{k_0}$ appartient à J. F xons alors un élément x non nul de $J_{0d(J)}$, et envisageons l'idéal $I = B_\lambda x + B_\lambda y \subset J$. On a évidemment

$$d(I) \geqq d(J), \qquad \mathcal{A}(I, \infty) \subset \mathcal{A}(J, \infty) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}(I, \infty) \subset \mathcal{B}(J, \infty).$$

Comme x appartient à I, $\mathcal{B}(I, d(J)) \neq \{0\}$, et par conséquent $d(I) \leqq d(J)$, d'où $d(I) = d(J)$.

Par ailleurs, y appartient à I_{m_0}, donc f appartient à $\mathcal{A}(I, m_0)$, et on a les inclusions $\mathcal{A}(J, \infty) \subset \mathcal{A}(I, m_0) \subset \mathcal{A}(I, \infty)$, d'où $\mathcal{A}(J, \infty) = \mathcal{A}(I, \infty)$. En multipliant y par G^{m_0}, on obtient un élément de $I_{0, k_0 + m_0}$ de la forme

$P(Y) + \ldots + g(Y + k_0 + m_0) G^{k_0+m_0}$, et il en résulte que g appartient à $\mathcal{B}(I, k_0 + m_0)$. On en déduit les inclusions

$$\mathcal{B}(J, \infty) \subset \mathcal{B}(I, k_0 + m_0) \subset \mathcal{B}(I, \infty), \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{B}(J, \infty) = \mathcal{B}(I, \infty).$$

La proposition 2 permet de conclure que $I = J$.

C. Q. F. D.

4. Idéaux monogènes

Nous établissons une caractérisation de certains idéaux monogènes (parmi lesquels les idéaux monogènes maximaux).

Proposition 4. — *Soient m et r deux entiers, x un élément de B_λ de la forme*

$$x = P(Y - m) F^m + \ldots + Q(Y + r) G^r \qquad \textit{avec} \quad P \textit{ et } Q \neq 0.$$

On note $I = B_\lambda x$. Alors on a

$$\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(I, m) = \mathcal{B}'(I, m + r) = P(Y) \mathbf{C}[Y],$$
$$\mathcal{A}'(I, \infty) = \mathcal{A}'(I, r) = \mathcal{B}(I, m + r) = Q(Y) \mathbf{C}[Y],$$
$$\mathcal{A}(I, 0) = P(Y) \alpha(Y + m - 1) \ldots \alpha(Y) \mathbf{C}[Y],$$
$$\mathcal{A}'(I, 0) = Q(Y) \alpha(Y + r - 1) \ldots \alpha(Y) \mathbf{C}[Y],$$
$$d(I) = m + r.$$

Démonstration. — Soit y un élément de B_λ de degré en $F = p$:

$$y = H(Y) F^p + \ldots \qquad \text{avec} \quad H(Y) \neq 0.$$

Alors yx est de degré en $F = m + p$, de la forme

$$yx = H(Y) P(Y - (m + p)) F^{m+p} + \ldots.$$

D'où il résulte que $\mathcal{A}(I, m + p) = P(Y) \mathbf{C}[Y]$, pour $p \geq 0$, donc que

$$\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(I, m) = P(Y) \mathbf{C}[Y].$$

De même, on prouve que

$$\mathcal{A}'(I, \infty) = \mathcal{A}'(I, m) = Q(Y) \mathbf{C}[Y].$$

Un simple calcul prouve que

$$G^m x = P(Y) \alpha(Y + m - 1) \ldots \alpha(Y) + \ldots + Q(Y + r + m) G^{r+m}.$$

Par conséquent, $P(Y) \alpha(Y + m - 1) \ldots \alpha(Y)$ appartient à $\mathcal{A}(I, 0)$, et $Q(Y)$ appartient à $\mathcal{B}(I, m + r)$, donc $\mathcal{B}(I, m + r) = Q(Y) \mathbf{C}[Y]$. On prouve de façon analogue que $\mathcal{B}'(I, m + r) = P(Y) \mathbf{C}[Y]$.

Maintenant, pour que yx appartienne à B_0, il est nécessaire et suffisant que y soit de la forme

$$y = H(Y)\, G^k + \ldots + H'(Y)\, G^h, \qquad \text{avec} \quad m \leqq k \leqq h, \quad H \text{ et } H' \neq 0.$$

Alors $yx \in B_{0,\,h+r}$ avec $h + r \geqq m + r$, donc $\mathcal{B}(I, k) = 0$ si $k < m + r$, ce qui achève de prouver que $d(I) = m + r$.

Enfin, pour que yx appartienne à B_0 et possède un terme « constant » non nul, il est nécessaire et suffisant que $k = m$, et alors le terme « constant » en question est égal à $H(Y)\,\alpha(Y + m - 1) \ldots \alpha(Y)\, P(Y)$, donc $\mathcal{A}(I, 0) = P(Y)\,\alpha(Y + m - 1) \ldots \alpha(Y)\, \mathbf{C}[Y]$.

On prouve de même que

$$\mathcal{A}'(I, 0) = Q(Y)\,\alpha(Y + r - 1) \ldots \alpha(Y)\, \mathbf{C}[Y].$$

C. Q. F. D.

Proposition 5. — *Soit I un idéal à gauche de B_λ. On suppose :*

1° $\mathcal{B}(I, \infty) = \mathcal{B}(I, d(I)) = Q(Y)\, \mathbf{C}[Y]\, (= \mathcal{A}'(I, r))$;

2° $\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(I, d(I) - r) = P(Y)\, \mathbf{C}[Y]$;

3° *il existe x appartenant à $I_{d(I)-r}$ de la forme*

$$x = P(Y - (d(I) - r))\, F^{d(I)-r} + \ldots + h(Y + r)\, G^r \qquad \textit{avec} \quad h(Y) \neq 0.$$

Alors I est monogène et engendré par x.

Démonstration. — Notons $m = d(I) - r$. Soit y un élément de I de la forme

$$y = h'(Y - s)\, F^s + \ldots + Q(Y + r)\, G^r.$$

On peut choisir y de façon que s soit minimal, c'est ce que l'on suppose vérifié dans la suite. Montrons d'abord que $m \leqq s < r + m$. Pour cela, on suppose que $s \geqq r + m$, et on considère

$$z = P(Y - m - r)\, F^{m+r} + \ldots + q(Y) \in J'_{0,\, m+r},$$

$$F^{s-(m+r)}\, z = P(Y - s)\, F^s + \ldots + q(Y - s + (m + r))\, F^{s-(m+r)}.$$

Comme

$$h'(Y - s) = \beta(Y - s)\, P(Y - s),$$

l'élément $t = y - \beta(Y - s)\, F^{s-(m+r)}\, z$ vérifie $d_F^0\, t < s$, $d_G^0\, t = r$, et le terme en G^r de t est $Q(Y + r)\, G^r$.

Ceci étant en contradiction avec la minimalité de s, l'inégalité cherchée est vérifiée.

Supposons maintenant que $s > m$:

$$F^{s-m}\, x = P\,(Y - s)\, F^s + \ldots + h''\,(Y + r - (s - m))\; G^{r-(s-m)}$$

avec

$$h''\,(Y) \in \mathbf{C}\,[Y] \qquad \text{et} \qquad r - (s - m) < r.$$

Mais alors l'élément $u = y - \beta\,(Y - s)\, F^{s-m}\, x$ vérifie $d^0_F\, u < s$, $d^0_G\, u = r$, et le terme en G^r de u est $Q\,(Y + r)\; G^r$, ce qui est en contradiction avec la minimalité de s. On en déduit que $s = m$. On considère alors les éléments

$$x = P\,(Y - m)\, F^m + \ldots + h\,(Y + r)\; G^r,$$
$$y = h'\,(Y - m)\, F^m + \ldots + Q\,(Y + r)\; G^r$$

comme $h\,(Y) = \gamma\,(Y)\; Q\,(Y)$ et que $d\,(I) = m + r$, l'élément $x - \gamma\,(Y + r)\, y$ est nul.

Il s'ensuit en particulier que

$$P\,(Y) = \gamma\,(Y)\; h'\,(Y) = \gamma(Y)\, \beta\,(Y)\, P\,(Y),$$

donc que $\gamma\,(Y)$ et $\beta\,(Y)$ sont des scalaires. L'idéal $J = B_\lambda\, x$ vérifie

$$J \subset I,$$
$$\mathcal{A}\,(J, \infty) = \mathcal{A}\,(I, \infty),$$
$$\mathcal{B}\,(J, \infty) = \mathcal{B}\,(I, \infty),$$
$$d\,(I) = d\,(J),$$

donc $I = J$.

C. Q. F. D.

La proposition suivante a l'avantage de ne faire intervenir que les idéaux de polynômes associés à l'idéal considéré.

PROPOSITION 6. — *Soit I un idéal à gauche maximal de B_λ. On suppose :*

1° $\mathcal{B}\,(I, d\,(I)) = \mathcal{B}\,(I, \infty)$;

2° $\mathcal{A}\,(I, \infty) = \mathcal{A}\,(I, m)$, *avec* $0 \leqq m \leqq d\,(I)$,

3° $\mathcal{A}\,(I, 0) = \mathcal{A}\,(I, m)\; \alpha\,(Y + m - 1)\; \alpha\,(Y + m - 2) \ldots \alpha\,(Y)$.

Alors I est monogène.

Démonstration. — Soient $P\,(Y)$ le générateur de $\mathcal{A}\,(I, m)$, $Q\,(Y)$ le générateur de $\mathcal{B}\,(I, d\,(I))$, x un élément de I_m de la forme

$$x = P\,(Y - m)\, F^m + \ldots + q\,(Y + s)\; G^s, \qquad s \geqq 0,$$

et y un élément de $I_{0\,d(I)}$ de la forme

$$y = p\,(Y) + \ldots + Q\,(Y + d\,(I))\; G^{d\,(I)}.$$

Alors l'élément $G^m\, x$ appartient à $I_{0\,s+m}$, et par conséquent $q\,(Y)$ appartient à $\mathcal{B}\,(I, s + m)$. Comme $s + m$ est au moins égal à $d\,(I)$, on a

$\mathcal{B}(I, s+m) = \mathcal{B}(I, \infty)$, d'où il résulte que

$$q(Y) = q_1(Y)\,Q(Y)$$

soit

$$G^m x = P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots$$
$$+\, q_1(Y+s+m)\,Q(Y+s+m)\,G^{s+m}.$$

Mais si $s+m > d(I)$, l'élément

$$z = G^m x - q_1(Y+s+m)\,G^{s+m-d(I)}\,y$$
$$= P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots+r(Y+s+m-1)\,G^{s+m-1}$$

appartient à I.

Si $s+m-1 > d(I)$, on peut recommencer le même raisonnement, et construire

$$t = z - r_1(Y+s+m-1)\,G^{s+m-d(I)-1}\,y$$
$$= P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots+s(Y+s+m-2)\,G^{s+m-2}$$

appartenant à I.

Au terme d'un nombre fini d'opérations, on obtient un élément u de I de la forme

$$u = P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots+v(Y+d(I))\,G^{d(I)}.$$

Il est clair que v est multiple de Q, soit $v(Y) = v_1(Y)\,Q(Y)$, donc que l'élément $u - v_1(Y)\,y$ appartient à $I_{0,d(I)-1} = \{0\}$. Ceci prouve que

$$P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y) = v_1(Y)\,p(Y).$$

Or y appartient à $\mathcal{A}(I, 0)$, et le 3° s'applique

$$p(Y) = w(Y)\,P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y).$$

Des deux dernières relations, on tire que v et w sont des scalaires non nuls. On peut donc choisir $y \in I$ de la forme

$$y = P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots+Q(Y+d(I))\,G^{d(I)}$$

[en fait, le cas

$$y = P(Y)\,\alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots+-Q(Y+d(I))\,G^{d(I)}$$

apparaît également, mais il se traite de la même façon].

Démontrons maintenant que, pour tout h vérifiant $0 \leqq h < m$, on a

$$\mathcal{A}(I, h) = \alpha(Y+m-1)\ldots\alpha(Y+h)\,\mathcal{A}(I, \infty).$$

Soit ξ un élément de I_h, il est de la forme $\xi = p(Y-h)\,F^h+\ldots$, donc

$$G^h\,\xi = p(Y)\,\alpha(Y+h-1)\ldots\alpha(Y)+\ldots \in I_0.$$

L'élément $p(Y)\alpha(Y+h-1)\dots\alpha(Y)$ appartient à $\mathcal{A}(I, 0)$, et d'après l'hypothèse 3°, il est de la forme $v(Y)P(Y)\alpha(Y+m-1)\dots\alpha(Y)$. Ce qui donne

$$p(Y)\alpha(Y+h-1)\dots\alpha(Y) = v(Y)P(Y)\alpha(Y+m-1)\dots\alpha(Y),$$

d'où l'on déduit que

$$p(Y) = v(Y)P(Y)\alpha(Y+m-1)\dots\alpha(Y+h)$$

appartient à $\mathcal{A}(I, \infty)\alpha(Y+m-1)\dots\alpha(Y+h)$. Ceci démontre l'inclusion

$$\mathcal{A}(I, h) \subset \mathcal{A}(I, \infty)\ \alpha(Y+m-1)\dots\ \alpha(Y+h).$$

Maintenant, l'inclusion inverse est immédiate en utilisant le fait que $G^{m-h}x$ appartient à I_h.

Ceci étant, montrons que, lorsque ξ appartient à I_h, $0 \leqq h < m$, il existe η appartenant à B_λ tel que $\xi = G\eta$.

Pour $h = 0$, c'est vrai puisqu'alors ξ s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi &= v(Y)P(Y)\alpha(Y+m-1)\dots\alpha(Y)+\dots \qquad \text{(termes en } G\text{)}\\ &= G[v(Y-1)P(Y-1)\alpha(Y+m-2)\dots\alpha(Y)F+\dots]\end{aligned}$$

et est de la forme voulue. Supposons-le démontré en h, et montrons-le en $(h+1)$ $(h+1<m)$:

$$\xi = v(Y-h-1)P(Y-h-1)\alpha(Y+m-h-2)\dots\alpha(Y-1)F^{h+1}+\dots.$$

Alors $\xi - v(Y-h-1)G^{m-h-1}x$ appartient à I_h, et comme

$$v(Y-h-1)\ G^{m-h-1}x = G\,v(Y-h-2)\ G^{m-h-2}x,$$

ξ est de la forme cherchée. Appliquons ce résultat à $y \in I_0$: il existe η_1 appartenant à B_λ tel que $y = G\eta_1$. Montrons que, pour $0 \leqq h \leqq m$, il existe η_h tel que $y = G^h\eta_h$, avec $\eta_h \in I_h$ et

$$\begin{cases} \text{si } h<m, & \eta_h = P(Y-h)\alpha(Y+m-h-1)\dots\alpha(Y)F^h+\dots \\ & \qquad + Q(Y+d(I)-h)\ G^{d(I)-h}, \\ \text{si } h=m, & \eta_m = P(Y-m)F^m+\dots+Q(Y+d(I)-m)\ G^{d(I)-m}.\end{cases}$$

C'est vrai pour $h=0$, supposons-le vrai en $(h-1)$, avec $h \leqq m$. Alors η_{h-1} appartient à I_{h-1} et $h-1<m$, donc il existe η_h tel que $\eta_{h-1} = G\eta_h$. Comme

$$\begin{aligned}\eta_{h-1} &= P(Y-h+1)\alpha(Y+m-h)\dots\alpha(Y)F^{h-1}+\dots\\ &\quad + Q(Y+d(I)-h+1)\ G^{d(I)-h+1},\end{aligned}$$

on vérifie facilement que

$$\eta_h = P(Y-h)\,\alpha(Y+m-h-1)\dots\alpha(Y)\,F^h+\dots$$
$$+\,Q(Y+d(I)-h)\,G^{d(I)-h}, \qquad \text{si} \quad h<m$$

et sinon

$$\eta_m = P(Y-m)\,F^m+\dots+Q(Y+d(I)-m)\,G^{d(I)-m}.$$

Montrons que η_h appartient à I. Soit J^h l'idéal $B_\lambda x + B_\lambda \eta_h$. Il est clair que $I \subset J^h$ puisque $x \in J^h$, $y = G^{h-1}\eta_{h-1} = G^h \eta_h \in J^h$ et que $I = B_\lambda x + B_\lambda y$.

Il s'ensuit que

$$d(J^h) \leqq d(J),$$
$$\mathcal{A}(J^h, \infty) \supset \mathcal{A}(I, \infty),$$
$$\mathcal{B}(J^h, \infty) \supset \mathcal{B}(I, \infty).$$

Soit w un élément de $J^h_{0\,d(J^h)}$. Il est de la forme $w = \lambda x + \mu\eta_h$, avec $\lambda\mu \in B_\lambda$, et on a

$$0 \neq F^p G^p w = F^p G^p \lambda x + F^p G^p \mu\eta_h.$$

Choisissons $p > d^0_F \mu + h$. Alors il existe $\mu' \in B_\lambda$ tel que $G^p \mu = \mu' G^h$, et dans ce cas

$$0 \neq F^p G^p w = F^p G^p \lambda x + F^p \mu' G^h \eta_h = F^p G^p \lambda x + F^p \mu' y \in I,$$

donc $d(J^h) \geqq d(I)$, ce qui prouve que $d(J^h) = d(I)$.

Deux cas se présentent alors :

(*a*) $d(I) \neq 0$. Dans ce cas, $d(J^h) \neq 0$, donc $J^h \neq B_\lambda$ et, comme I est maximal, on a nécessairement $J^h = I$.

(*b*) $d(I) = 0$. Il est facile de voir que $\mathcal{B}(J^h, \infty) = \mathcal{B}(I, \infty)$. En effet, soit $\mathcal{B}(J^h, k) = \mathcal{B}(J^h, \infty)$, w un élément de J^h de la forme

$$w = p_0 + \dots + p(Y+k)\,G^k = \lambda x + \mu\eta_h.$$

Pour p assez grand, $G^p w$ appartient à I, et est de la forme

$$G^p w = p_0(Y+p)\,G^p + \dots + p(Y+p+k)\,G^{p+k}.$$

Donc, $\mathcal{B}(J^h, k) \subset \mathcal{B}(I, \infty)$, ce qui prouve notre assertion.

On ne peut avoir $\mathcal{B}(J^h, \infty) = \mathbf{C}[Y]$, car ceci impliquerait que

$$\mathcal{B}(I, 0) = \mathcal{B}(I, d(I)) = \mathcal{B}(I, \infty) = \mathbf{C}[Y],$$

autrement dit $1 \in I$. Donc $\mathcal{B}(J^h, \infty) \neq \mathbf{C}[Y]$; ceci montre que $J^h \neq B_\lambda$, d'où l'on conclut $J^h = I$.

Nous pouvons maintenant prouver que η_m engendre I. Envisageons l'idéal $J = B_\lambda \eta_m \subset I$. On a

$$d(I) \leqq d(J),$$
$$\mathcal{A}(I, \infty) \supset \mathcal{A}(J, \infty),$$
$$\mathcal{B}(I, \infty) \supset \mathcal{B}(J, \infty).$$

L'inégalité $d(I) \geqq d(J)$ résulte alors du fait que $y = G^m \eta_m$ appartient à I. D'autre part,

$$\eta_m = P(Y - m) F^m + \ldots + Q(Y + d(I) - m) G^{d(I)-m},$$

ce qui prouve que

$$P(Y) \in \mathcal{A}(J, \infty), \qquad \text{donc} \quad \mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(J, \infty)$$

et

$$Q(Y) \in \mathcal{B}(J, \infty), \qquad \text{donc} \quad \mathcal{B}(I, \infty) = \mathcal{B}(J, \infty).$$

Ceci suffit pour assurer que $I = J$.

C. Q. F. D.

5. Applications

(*a*) *Simplification de certains calculs.*

Les résultats des paragraphes 2 et 3 permettent de simplifier quelques démonstrations de [6]. Par exemple, pour prouver que l'idéal $I = B_\lambda (F - 1)$ est maximal, on procède de la façon suivante :

On considère un idéal J maximal contenant I. Comme

$$\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{B}(I, \infty) = \mathbf{C}[Y],$$

on a évidemment

$$\mathcal{A}(I, \infty) = \mathcal{A}(J, \infty) = \mathbf{C}[Y],$$
$$\mathcal{B}(I, \infty) = \mathcal{B}(J, \infty) = \mathbf{C}[Y],$$

$d(J) = 0$ impliquerait que $J = B_\lambda$, et comme par ailleurs $d(I) = 1$, on trouve $d(I) = d(J)$, donc $I = J$.

Notons π la représentation ainsi obtenue, φ un vecteur propre de $\pi(F)$. Il est facile de voir que $\{\pi(Y^n)\varphi, n \in N\}$ forme une base de l'espace V de représentation, et que φ est le seul vecteur propre de $\pi(F)$ [1]. Par contre, l'assertion suivante [1] ne se démontrait pas aisément : « Pour tout ψ de V non multiple scalaire de φ, l'idéal $J = \operatorname{Ann} \psi$ n'est pas monogène ». Soit donc $\psi = \pi(P(Y))\varphi$, avec $P(Y) \in \mathbf{C}[Y]$ et $d^0 P = n > 0$. Il est clair que $(F - 1)^{n+1}$ appartient à J, donc

$$\mathcal{A}(J, \infty) = \mathcal{B}(J, \infty) = \mathbf{C}[Y].$$

On cherche alors les polynômes $Q(Y)$ et $R(Y)$ qui vérifient

$$Q(Y) + R(Y) F \in J.$$

Cela s'écrit

$$Q(Y) P(Y) + R(Y) P(Y-1) F \in B_\lambda (F-1),$$

ou encore

$$Q(Y) P(Y) = - R(Y) P(Y-1).$$

Soit δ le p. p. c. m. de $P(Y)$ et $-P(Y-1)$, il existe deux polynômes $Q_0(Y)$ et $R_0(Y)$ non scalaires vérifiant $\delta = Q_0 P(Y) = - R_0 P(Y-1)$, et les seuls polynômes Q et R qui vérifient $Q(Y) P(Y) = -R(Y) P(Y-1)$ sont les multiples respectifs de Q_0 et R_0. Il en résulte que $d(I) = 1$ et $\mathcal{B}'(I, d(I)) = R_0(Y)\, \mathbf{C}[Y]$. Donc J n'est pas monogène (on remarquara que $J = B_\lambda (Q_0(Y) + R_0(Y) F) + B_\lambda (F-1)^{n+1}$).

(*b*) *Produits tensoriels de représentations irréductibles de* sl (2).

La complexifiée g de l'algèbre de Lie réelle so (4) [ou sl $(2, C)$] est somme directe de deux idéaux isomorphes à sl (2). L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(g)$ est produit tensoriel de deux exemplaires de $\mathcal{U}$ (sl (2)), et les quotients primitifs de dimension infinie de $\mathcal{U}(g)$ sont les produits tensoriels $B_{\lambda\mu} = B_\lambda \otimes B_\mu$, λ et $\mu \in \mathbf{C}$. On se limite ici aux valeurs de λ et μ distinctes de $u(u+1)$, $2u \in N$, c'est-à-dire au cas où $B_{\lambda\mu}$ est simple. On utilise le lemme suivant, dont la démonstration est pratiquement identique à celle de ([2], prop. 1.3).

LEMME 5. — *Soit I un idéal à gauche non nul de B_λ. Le B_λ-module B_λ/I est de longueur finie.*

PROPOSITION 7. — *Soit H un $B_{\lambda\mu}$-module simple. Pour que H soit isomorphe au produit tensoriel d'un B_λ-module simple H_1 et d'un B_μ-module simple H_2, il faut et il suffit qu'il existe x non nul appartenant à H tel que*

$$\mathrm{Ann}_{B_{\lambda\mu}}(x) \cap B_\lambda \neq \{0\} \qquad ou \qquad \mathrm{Ann}_{B_{\lambda\mu}}(x) \cap B_\mu \neq \{0\}.$$

Démonstration. — On montre la condition suffisante. Soit x un élément non nul de H tel que $J_1 = \mathrm{Ann}_{B_{\lambda\mu}}(x) \cap B_\lambda \neq \{0\}$ (par exemple). Le B_λ-module monogène $B_\lambda x$ est isomorphe au B_λ-module quotient B_λ/J_1, et comme J_1 n'est pas nul, $B_\lambda x$ est de longueur finie et contient un sous B_λ-module simple H_1.

L'homomorphisme de $B_{\lambda\mu}$-modules ρ de $H_1 \otimes B_\mu$ dans H, défini par $\rho[h \otimes b] = b.h$, n'étant pas identiquement nul, on a $\rho(H_1 \otimes B_\mu) = H$. On obtient un isomorphisme $\tilde{\rho}$ de $B_{\lambda\mu}$-modules de $(H_1 \otimes B_\mu)/\ker \rho$ sur H. Or $\ker \rho$, étant un sous-$B_{\lambda\mu}$-module de $H_1 \otimes B_\mu$, est égal à $H_1 \otimes J_2$, où J_2 est un idéal de B_μ. Par conséquent, le $B_{\lambda\mu}$-module H est isomorphe au $B_{\lambda\mu}$-module $H_1 \otimes H_2$, où $H_2 = B_\mu/J_2$ est un B_μ-module simple.

C. Q. F. D.

Remarque. — Cette proposition généralise un résultat de [5].

Additif. — Entre temps, il a été démontré que les anneaux $B_\lambda = \mathfrak{U}(\mathrm{sl}_2)/(Q-\lambda)$ [Q éléments de Casimir pour sl (2)] sont héréditaires si λ est transcendant [7], impliquant [4] que tout idéal à gauche de B_λ est engendré par deux éléments.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNAL (D.) et PINCZON (G.). — On algebraically irreducible representations of the Lie algebra sl (2), *J. of math. Phys.* (à paraître).

[2] DIXMIER (J.). — Sur les algèbres de Weyl, II., *Bull. Sc. math.*, série 2, t. 94, 1970, p. 289-301.

[3] DIXMIER (J.). — Quotients simples de l'algèbre enveloppante de sl (2), *J. of Algebra*, t. 24, 1973, p. 551-564.

[4] EISENBUD (D.) et ROBSON (J. C.). — Modules over Dedekind prime rings, *J. of Algebra*, t. 16, 1970, p. 67-85.

[5] MARTIN (C.). — *Sur une classe de représentations algébriquement irréductibles de l'algèbre de Lie de De Sitter* : so (4, 1) *et construction de représentations de l'algèbre de Lie de Poincaré par contraction*, Thèse 3e cycle, Dijon 1972.

[6] NOUAZE (Y.) et GABRIEL (P.). — Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *J. of Algebra*, t. 6, 1967, p. 77-99.

[7] ROOS (J. E.). — Compléments à l'étude des quotients primitifs, des algèbres de Lie semi-simples, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, série A, 1973, p. 447-450.

(Texte reçu le 12 janvier 1973,
additif reçu le 17 octobre 1973.)

Didier ARNAL et Georges PINCZON,
Département de Mathématiques,
Université de Dijon,
Bâtiment Mirande,
Campus universitaire,
21000 Dijon.