BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD RAUZY

Fonctions entières et répartition modulo un. II

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 185-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__185_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 185-192.

FONCTIONS ENTIÈRES ET RÉPARTITION MODULO UN, II

par

GÉRARD RAUZY

[Marseille]

RÉSUMÉ. — On montre que si une fonction entière f n'est pas un polynôme et si la croissance de la borne supérieure $M(r)$ du module de f, sur le disque centré à l'origine de rayon r, n'est pas « trop grande », alors, la suite $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Un contre-exemple montre, par ailleurs, que la condition obtenue sur la croissance est « presque la meilleure ».

Dans un article précédent (*Bull. Soc. math. France*, 100, 1972, p. 409-415), nous donnions une condition sur la suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction f, pour que la suite $(f(n))$ soit équirépartie modulo 1.

Cette condition impliquait notamment une certaine régularité dans la suite des coefficients. Le but de cet article est de lever cette condition de régularité, ainsi que de donner, en utilisant les méthodes de VINOGRADOV (comme me l'a suggéré G. RHIN), une condition de décroissance beaucoup plus faible sur la suite des coefficients.

Désignons par E l'algèbre des fonctions entières f, prenant des valeurs réelles sur l'axe réel et telles que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log\log r} < \frac{5}{4},$$

où $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Si $f\in E$, et P est un polynôme $f\circ P\in E$, en particulier, E est stable par translation sur la variable.

Le résultat principal s'énonce alors :

THÉORÈME 1. — *Si une fonction entière f appartient à E, et si f n'est pas un polynôme, la suite $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie* modulo 1.

Remarque. — E étant un espace vectoriel, il en résulte, avec les mêmes hypothèses sur f, que, pour tout $\lambda \neq 0$, $(\lambda f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

COROLLAIRE. — *Si une fonction entière f appartient à E, et si f n'est pas un polynôme, pour tout réel $\lambda \neq 0$ et tout entier s, la suite $\lambda (f(n), \ldots, f(n+s))_{n\in\mathbf{N}}$ de R^{s+1} est équirépartie dans R^{s+1} modulo Z^{s+1}, c'est-à-dire encore, en désignant par $(u(n))$ la suite de $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ définie par $u_s(n) = f(n+s)$, que la suite $\lambda (u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie dans $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}/\mathrm{Z}^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure produit, pour tout $\lambda \neq 0$.*

En effet, il suffit de montrer que, pour tout $(s+1)$-uplet $(p_0, \ldots, p_s)$ d'entiers non tous nuls, la suite $(p_0 f(n) + \ldots + p_s f(n+s))_{n\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Si $g(x) = p_0 f(x) + \ldots + p_s f(x+s)$, vu la stabilité de E par translations, $g \in E$, et donc, si la suite $(g(n))$ n'était pas équirépartie modulo 1, il en résulterait que g est un polynôme.

Il existerait alors des polynômes P_j et des nombres complexes α_j tels que

$$f(x) = \Sigma_{j=1}^{m} P_j(x)\, e^{\alpha_j x},$$

et la condition sur la croissance de f entrainerait que f est un polynôme.

Du théorème 1 nous déduisons un théorème portant uniquement sur les suites à termes réels. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une telle suite, nous définissons les différences successives de u_n en posant

$$\Delta_0 u_n = u_n, \qquad \Delta_{k+1} u_n = \Delta_k u_{n+1} - \Delta_k u_n.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit (u_n) une suite à termes réels. Supposons qu'il existe deux nombres réels C et c, avec $C > 0$, $c > 5$, tels que*

$$\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad |\Delta_k u_0| \leq C\, e^{-k^c},$$

alors, ou bien il existe un polynôme P tel que $u_n = P(n)$, ou bien, pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$ et tout entier $s \in \mathbf{N}$, la suite $\lambda (u_n, \ldots, u_{n+s})$ de R^{s+1} est équirépartie dans R^{s+1} modulo Z^{s+1}.

Démonstration du théorème 2. — La fonction entière

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} (\Delta_k u_0) \binom{x}{k}$$

est telle que $f(n) = u_n$. En vertu du théorème 1, il suffit donc de prouver que $f \in E$.

Or si $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, on a

$$M(r) \leq \Sigma_{k=0}^{\infty} |\Delta_k u_0| \binom{r+k-1}{k},$$

et si $r > 1$,

$$M(r) \leq \Sigma_{k=0}^{\infty} |\Delta_k u_0|\, r^k \leq C \Sigma_{k=0}^{\infty} e^{-k^c} r^k.$$

On en déduit aisément :

$$M(r) \leq C\,[1 + (1 + \log r)^{1/(c-1)}]\, e^{(c-1)(\log r/c)^{c/(c-1)}} + \frac{C}{c-1},$$

d'où le résultat.

Remarque. — Le théorème 1 serait faux, si on remplaçait l'espace E par un espace du même type, où on supposerait seulement :

$$\overline{\lim} \frac{\log \log M(r)}{\log \log r} < c, \qquad \text{avec} \quad c > 2.$$

Il est en effet aisé de voir que la fonction f, définie par la formule

$$f(x) = \Pi_{k=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{P_k}\right)^{N_k} \Sigma_{n=0}^{N_k} \binom{n + N_k - 1}{N_k - 1} \left(1 - \frac{x}{P_k}\right)^{N_k}\right],$$

où $P_k = e^{N_k/\log N_k}$ appartient à un tel espace quand la suite N_k est suffisamment croissante, et que

$$\sup_{x \in [P_k,\, 6P_k/5]} |f(x)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

Ce qui entraîne, en particulier, que $(f(n))_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

Démonstration du théorème 1

1. Déroulement de la démonstration

Soit f une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème, et supposons que f ne soit pas un polynôme. D'après une remarque déjà faite, il en est alors de même de qf pour tout entier $q \neq 0$. Désignant alors par $S(N)$ la quantité

$$S(N) = \Sigma_{0 \leq n < N}\, e(f(n)), \qquad \text{où} \quad e(x) = e^{2i\pi x}.$$

Il suffit donc, d'après un résultat de WEYL, de montrer que $(1/N)\, S(N) \to 0$ quand $N \to \infty$.

Pour cela, nous allons, dans le paragraphe 2, définir trois suites d'entiers (n_k), (P_k) (Q_k) dont nous montrerons, dans le paragraphe 3, qu'elles satisfont aux conditions suivantes :

(i) quand $k \to \infty$, n_k, P_k, Q_k tendent vers l'infini;

(ii) dès que k est assez grand, $P_{k+1} < Q_k$.

Dans le paragraphe 4, étant donné un entier N tel que

$$[N, N + P_k] \subset [0, Q_k],$$

nous approchons la fonction f par un polynôme g de degré n_k et, utilisant un résultat voisin de ceux de VINOGRADOV (que nous démontrons dans le paragraphe 5) pour majorer une somme du type $\Sigma_{N\leq n<N+P_k} e(g(n))$, nous en déduisons l'existence d'un entier $k_0(\varepsilon)$ tel que

$$\forall\, k \geqq k_0(\varepsilon), \quad |S(N+P_k) - S(N)| < \varepsilon P_k.$$

Supposons alors que $S(N)$ vérifie l'inégalité (E_{k-1}) :

$$(E_{k-1}) \qquad \forall\, N \in [0, Q_{k-1}], \quad |S(N)| < \varepsilon N + C.$$

Si maintenant $k \geqq k_0(\varepsilon)$ et si $N \in [0, Q_k]$, on peut écrire $N = q P_k + R$ avec $0 \leq R < P_k$, donc $R < Q_{k-1}$ d'après la propriété (ii) des suites (P_k) et (Q_k). En appliquant alors q fois la majoration obtenue, on a

$$|S(N) - S(R)| < \varepsilon q P_k.$$

D'autre part, d'après (E_{k-1}) : $|S(R)| < \varepsilon R + C$, on a donc :

$$\forall\, N \in [0, Q_k], \quad |S(N)| < \varepsilon N + C,$$

qui n'est autre que l'inégalité (E_k).

Comme $(E_{k_0(\varepsilon)})$ est certainement vérifiée en prenant $C(\varepsilon) = Q_{k_0(\varepsilon)}$, et que $Q_k \to \infty$ quand $k \to \infty$, on en déduit, par réccurrence sur k, que

$$\forall\, N \geqq 0, \quad |S(N)| < \varepsilon N + C,$$

ce qui montre bien, $\varepsilon > 0$ pouvant être choisi arbitrairement, que $(1/N)\, S(N) \to 0$ quand $N \to \infty$.

2. Définition des suites (n_k), (P_k), (Q_k)

2.1. — Soit $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} v_n x^n$, le développement de f en série entière. Comme f est réelle sur l'axe réel, v_n est réel, et, f n'étant pas un polynôme, pour une infinité d'entiers n, $v_n \neq 0$.

D'autre part, la condition de croissance sur f entraîne (inégalités de Cauchy) l'existence d'un nombre réel $c > 5$ tel que

$$(2.1) \qquad \log 1/|v_n| \geqslant n^c$$

(la notation $a_n \geqslant b_n$ signifiant que $a_n/b_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$).

2.2. — Nous définissons la suite (n_k) comme suit :

(i) n_0 est le plus petit entier n tel que $v_n \neq 0$;

(ii) n_k étant défini, posons $l_k = \log 1/|v_{n_k}|$, et soit m_k la borne supérieure des nombres réels m tels que

$$\forall\, n \geqq n_k, \quad \log 1/|v_n| \geqq l_k + m(n - n_k).$$

En vertu de la condition (2.1), l'ensemble des $n > n_k$, tels que

$$\log 1/|\, v_n\,| = l_k + m_k\,(n - n_k),$$

est fini et non vide.

On définit alors n_{k+1} comme le plus grand élément de cet ensemble.

Remarque. — Cette définition est en fait, celle du « polygone de Newton » de f, c'est-à-dire de la ligne polygonale frontière de l'enveloppe convexe des points $(n, \log 1/|\, v_n\,|)$. Les « sommets » du polygone sont les points (n_k, l_k), et la pente du « côté » joignant (n_k, l_k) à (n_{k+1}, l_{k+1}) est m_k. On a donc :

$$\text{(2.2-1)} \qquad \forall\, n \geqq n_k, \quad \log 1/|\, v_n\,| \geqq l_k + m_k\,(n - n_k),$$

$$\text{(2.2-2)} \qquad l_{k+1} = l_k + m_k\,(n_{k+1} - n_k),$$

$$\text{(2.2-3)} \qquad n_k < n_{k+1} \qquad \text{et} \qquad m_k < m_{k+1}.$$

2.3. — Posant alors $p_k = (n_k\, l_k)/(n_k^2 - 2)$, $M_k = e^{m_k}$ nous définissons les suites (P_k) et (Q_k) en posant

$$P_k = e^{p_k}, \qquad Q_k = 4^{-(n_k+1)}\, M_k.$$

3. Une inégalité fondamentale et ses conséquences

3.1. — Supposons que pour un entier $k > 3$, on ait l'inégalité

$$\frac{l_k}{n_k - 3} \leqq \frac{l_{k+1}}{n_{k+1} - 3}.$$

Alors, « on voit » sur le polygone de Newton qu'une telle inégalité sera vérifiée pour tout entier supérieur.

De manière plus précise, on a en effet :

$$m_k - \frac{l_{k+1}}{n_{k+1} - 3} = \frac{n_k - 3}{n_{k+1} - n_k}\left(\frac{l_{k+1}}{n_{k+1} - 3} - \frac{l_k}{n_k - 3}\right) \geqq 0,$$

et tenant compte de $m_{k+1} > m_k \geqq l_{k+1}/(n_{k+1} - 3)$, on en déduit :

$$l_{k+2} = l_{k+1} + m_{k+1}\,(n_{k+2} - n_{k+1}) \geqq \frac{n_{k+2} - 3}{n_{k+1} - 3}\, l_{k+1},$$

ce qui permet de raisonner par récurrence.

D'autre part, une telle inégalité est certainement vérifiée pour au moins un entier $k_1 > 3$ puisque, d'après (2.1), $l_k/(n_k - 3) \to \infty$ quand $k \to \infty$.

Il résulte de ce qui précède que

$$\text{(3.1)} \qquad \forall\, k \geqq k_1, \quad \frac{l_k}{n_k - 3} \leqq \frac{l_{k+1}}{n_{k+1} - 3} \leqq m_k.$$

3.2. *Conséquences.* — D'après (2.1), on a $l_k \geqslant n_k^c$; on en déduit, en utilisant l'inégalité (3.1), que

$$m_k \geqslant n_k^{c-1}, \qquad m_k - p_{k+1} \geqslant n_{k+1}^{c-2} \geqq n_k^{c-2},$$
$$m_k + l_k - (n_k + 1)\, p_k \geqslant n_k^{c-2},$$
$$l_k - p_k \geqslant n_k^c, \qquad \frac{p_k}{n_k^3} \geqslant n_k^{c-4}, \qquad p_k - l_k \frac{n_k}{n_k^2 - 1} \geqslant n_k^{c-3}.$$

De ces inégalités, on en déduit que M_k et Q_k tendent vers l'infini avec k et que, si on se donne des nombres réels strictement positifs ε, C_1, C_2, A et B, on a, dès que l'entier k est assez grand, $(k \geqq k_0(\varepsilon))$.

$$(3.2)\quad \begin{cases} \text{(i)} & P_{k+1} < Q_k, \\ \text{(ii)} & 2^{n_k+2}\,(|\, v_{n_k} \,|\, P_k^{n_k+1})/M_k < \varepsilon/(3\pi), \\ \text{(iii)} & 3\, n_k \,|\, v_{n_k} \,|\, P_k \leqq 1, \\ \text{(iv)} & C_1\, e^{Bn_k} \log P_k \times P_k^{-A/(n_k^3 \log n_k)} < \varepsilon/3, \\ \text{(v)} & C_2\,(|\, v_{n_k} \,|/2)^{-n_k/(n_k^2-1)}\, P_k^{-1} < \varepsilon/3, \end{cases}$$

Remarque. — Pour démontrer (iv) à partir de $p_k/n_k^3 \geqslant n_k^{c-4}$, on utilise le fait que si k est assez grand :

$$\log\log P_k = \log p_k = 4\log n_k + \log\frac{p_k}{n_k^4} \leqq 4\log n_k + \frac{A}{2}\,\frac{p_k}{n_k^4}.$$

4. Majoration de la différence $S(N + P_k) - S(N)$

4.1. — Soit k un entier assez grand pour que les inégalités (3.2) soient vérifiées. Pour alléger l'écriture, nous supprimons l'indice k dans les calculs qui suivent.

Supposons donc donné un entier N, tel que $[N, N + P] \subset [0, Q]$, et désignons par g le polynôme

$$g(x) = \Sigma_{t=0}^{n} \frac{(x - N)^t}{t!} f^{(t)}(N).$$

Nous posons

$$\alpha = \frac{f^{(n)}(N)}{n!} \qquad \text{et} \qquad T = \Sigma_{N \leqq \nu < N+P}\, e(g(\nu)).$$

4.2. — L'inégalité (2.2-1) entraîne que, pour $\nu \geqq n$, $|\, v_\nu \,| \leqq |\, v_n \,| M^{n-\nu}$. En particulier, comme

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \Sigma_{\nu=n+1}^{\infty} \binom{\nu}{n+1} v_\nu\, x^{\nu-(n+1)},$$

on en déduit la majoration valable pour $x \in [0, Q]$:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leqq \frac{|\, v_n \,|}{M} \left(\frac{1}{1 - Q/M}\right)^{n+2}.$$

Comme par définition $Q = M \times 4^{-(n+1)} \leq M/2$, on en déduit :

$$\forall\, x \in [0, Q], \quad \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq 2^{n+2} \frac{|v_n|}{M}. \tag{4.2}$$

4.3. — Appliquant à f la formule de Taylor au rang n, on en déduit, pour $x \in [N, N+P]$,

$$|f(x) - g(x)| \leq 2^{n+2} \frac{|v_n|}{M} P^{n+1} < \frac{\varepsilon}{3\pi} \quad \text{d'après (3.2).}$$

Comme $|e(u) - e(v)| \leq \pi |u - v|$, il en résulte que

$$|S(N+P) - S(N) - T| < \varepsilon P/3. \tag{4.3}$$

4.4. — D'autre part, $\alpha - v_n = (1/n!)\ [f^{(n)}(N) - f^{(n)}(0)]$, et la formule de Taylor au rang 1 donne alors, en utilisant (4.2) et (3.2),

$$|\alpha - v_n| \leq (n+1)\, 2^{n+1} \frac{|v_n| Q}{M} \leq 2^{2n+1} \frac{|v_n| Q}{M} \leq \frac{|v_n|}{2}.$$

Il en résulte en particulier que

$$|v_n|/2 < |\alpha| < 3|v_n|/2. \tag{4.4}$$

4.5. — Les inégalités (4.4) et (3.2) montrent alors que $2n|\alpha| P \leq 1$. Le lemme du paragraphe 5 est donc applicable et donne

$$|T| \leq C_1 e^{Bn} \times (\log P \times P^{1-(A/(n^3 \log n))}) + C_2 |\alpha|^{-n(n^2-1)}.$$

Utilisant une nouvelle fois les inégalités (3.2), on en déduit

$$|T| \leq 2\varepsilon P/3,$$

d'où, en vertu de (4.3), l'inégalité cherchée

$$|S(N+P) - S(N)| < \varepsilon P.$$

5. Lemme sur les polynômes

Nous énonçons ce lemme avec des notations légèrement différentes, car il s'obtient en modifiant la démonstration du lemme fondamental, du livre de L. K. Hua [*additive theory of prime numbers*, Providence, A. M. S., 1965 (*Translations of mathematical Monographs*, 13)], p. 187.

Dans les notations de ce livre le lemme que nous utilisons s'énonce de la façon suivante :

Lemme. — *Il existe quatre nombres réels strictement positifs C_1, C_2, A, B tels que, pour tout polynôme f à coefficients réels, et pour tous*

entiers P et Q vérifiant l'inégalité

$$0 < 2k \mid \alpha_k \mid P \leq 1, \qquad \text{où} \quad f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_0,$$

on ait la majoration

$$\mid \Sigma_{x=Q+1}^{Q+P} e(f(x)) \mid \leq C_1 e^{Bk} P^{1-A/(k^2 \log k)} \log P + C_2 \mid \alpha_k \mid^{-k/(k^2-1)}.$$

Démonstration. — Nous supposons bien entendu $\mid \alpha_k \mid^{-k/(k^2-1)} < P$. La démonstration est alors la même que celle du lemme fondamental du livre cité jusqu'à l'obtention de l'inégalité (p. 189) :

$$S \leq P^{1-(1/2s)} \left(k^{9k^2} e^{23k^2 l} \log^l y \times y^{-(k-1)+\delta_l} (5s)^k P \left(y^{k-1} + \frac{\log P}{k \mid \alpha_k \mid} \right) \right)^{1/4s} + y.$$

Ensuite on prend $s = [(k-1)^2 \log (k-1)]$, et on prouve aisément une inégalité du type $\delta_l < C/k^2$, où C est une constante indépendante de k.

On prend alors

$$y = [\mid \alpha_k \mid^{-(k/(k^2-1))}] \qquad \text{si} \qquad \mid \alpha_k \mid^{-1} \geq 2^{(k^2-1)/k}$$

et

$$y = [P^{1-(1/10s)}] \quad \text{sinon.}$$

Dans le premier cas, on a alors :

$$k \mid \alpha_k \mid y^{k-1-\delta_l} P \geq k (2y)^{-(k^2-1)/k} y^{k-1-\delta_l} P \geq k . 2^{-k} P^{(1/k)-\delta_l},$$

et cette quantité est minorée par $k 2^{-k} P^{1/2k}$ dès que k est assez grand d'où le résultat.

(Texte reçu le 1er février 1973.)

Gérard RAUZY,
24, allée Emmanuel-Chabrier,
13008 Marseille.