BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD BALLET

Sur les modules linéairement compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 345-351
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__345_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 345 à 351.

SUR LES MODULES LINÉAIREMENT COMPACTS

PAR

BERNARD BALLET

[Marseille]

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est d'étudier les modules linéairement compacts pour la topologie discrète (en abrégé lcd) sur un anneau noethérien local complet (A, m). Dans le cas intègre, on montre que si la dimension de A est plus grande que 1, A_x n'est jamais un A-module lcd pour tout x non nul dans m. Dans le cas général, la structure d'un A-module lcd M, dont l'assassin est réduit à un seul élément p, dépend de la profondeur de p : si $p = m$, M est artinien; si prof $p > 1$, M est de type fini, et si prof $p = 1$, M s'écrit sous la forme $N + P$, où N est de type fini, et $P = P_p$ est un A_p-module de longueur finie.

Introduction

En accord avec BOURBAKI ([2], chap. 3, § 2, exercice 15), on dira qu'un module M sur un anneau A est lcd si toute famille filtrante décroissante de translatés de sous-modules a une intersection non vide ou, ce qui revient au même, si M est complet pour toute topologie linéaire.

Les anneaux commutatifs lcd sont des produits directs finis d'anneaux lcd locaux, et un anneau lcd intègre est donc local. On ne connaît actuellement essentiellement que deux classes d'anneaux commutatifs lcd : les anneaux semi-locaux complets ([2], chap. 3, § 3, exercice 5) et les anneaux de valuation maximaux pour la relation d'extension immédiate [5]. Si (A, m) est un anneau local de l'une des deux classes, et E l'enveloppe injective du A-module A/m, on sait que $A \simeq \mathrm{End}_A E$ ([7], th. 3.7, et [6], th. 9) et on en déduit que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(., E)$ réalise une dualité de la catégorie des modules lcd avec elle-même ([3], chap. V, th. 5.9); en particulier, tout A-module lcd M est E-réflexif, i. e. l'homomorphisme canonique $M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, E), E)$ est bijectif, cette dernière condition caractérise d'ailleurs les modules lcd.

Si A est un anneau de valuation maximal de corps des fractions K; il résulte de MATLIS ([6], th. 4) et BOURBAKI ([2], chap. 3, § 2, exercice 20) que M est un module lcd si, et seulement si, M est isomorphe à un sous-module d'une somme directe finie de modules de la forme K/I, où I est un idéal de A. Tout ce qui suit est donc consacré à l'étude du cas noethérien.

I. — Étude des algèbres lcd sur un anneau intègre A

Premier cas : $\dim A \leqq 1$.

PROPOSITION 1. — *Soit A un anneau noethérien intègre, $K = \mathrm{Fr}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Toute sous-A-algèbre de K est semi-locale.*

(2) *Il existe $x \neq 0$ dans A tel que A_x soit un anneau semi-local et que tout idéal premier ne contenant pas x soit de hauteur* $\leqq 1$.

(3) *A est semi-local, et* $\dim A \leqq 1$.

(4) *Il existe $x \neq 0$ dans A tel que A_x soit un corps.*

L'équivalence de (3) et (4) est un corollaire du « Hauptidealsatz » de GROTHENDIECK ([4], chap. 0, cor. 16.3.3).

(3) $\Rightarrow$ (2) est trivial.

(2) $\Rightarrow$ (4) est évident si $A_x = K$, sinon soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les idéaux maximaux $\neq 0$ de A_x, et $p_i = m_i \cap A$. Les idéaux premiers minimaux de l'anneau $A/A\,x$ sont en nombre fini, soient $q_1, q_2, \ldots, q_r$ leurs images réciproques dans A. Comme les p_i sont de hauteur $\leqq 1$, il est clair que tout idéal premier non nul de A contient l'un des idéaux $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Soit alors $y \neq 0 \in p_1 . p_2 \ldots . p_n . q_1 . q_2 \ldots . q_r$. (0) est le seul idéal premier de A ne contenant pas y, et A_y est un corps.

(1) $\Rightarrow$ (3) : si on avait $\dim A > 1$, soit p de hauteur 2 dans A de sorte que A_p est de dimension 2. Soit $x \in p\,A_p$, alors $(A_p)_x$ est une sous-A-algèbre de K, donc semi-locale, et dans A_p, tout idéal premier ne contenant pas x est de hauteur $\leqq 1$, il résulte donc de ce qui précède que $\dim A_p \leqq 1$, ce qui est absurde.

(3) $\Rightarrow$ (1) : il résulte du théorème de Krull-Akizuki ([2], chap. 7, § 2, n° 5, prop. 5) que la clôture intégrale A' de A est un anneau de Dedekind semi-local. Soient B une sous-A-algèbre de K, et C la A'-algèbre engendrée par A' et B. Comme C est entière sur B, il suffit de montrer que C est semi-locale. Si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont les idéaux maximaux de A', alors $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_{m_i}$. Comme pour tout i, A'_{m_i} est un anneau de valuation

discrète, les idéaux de C_{m_i}, qui sont en particulier des sous-A'_{m_i} modules de K, sont totalement ordonnés et C, étant donc une intersection finie d'anneaux de valuation, est un anneau semi-local ([2], chap. 6, § 7, nº 1, prop. 2).

COROLLAIRE 1. — *Sous les mêmes hypothèses, pour que toute sous-A-algèbre de K soit locale, il faut et il suffit que A soit un anneau local unibranche de dimension* $\leqq 1$.

En effet unibranche veut dire que la clôture intégrale A' est un anneau local, donc de valuation discrète si $\dim A \leqq 1$.

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau local noethérien intègre complet. Pour que K soit un A-module* lcd, *il faut et il suffit que* $\dim A \leqq 1$.

Si K est A-lcd, toute sous A-algèbre de K est locale et la nécessité résulte du corollaire 1. Inversement, il existe, d'après les théorèmes de Cohen, un sous-anneau B de A qui est un corps ou un anneau de valuation discrète complet tel que A soit une B-algèbre finie; si $L = \mathrm{Fr}(B)$, K est un L-espace vectoriel de dimension finie et, comme L est B-lcd, K l'est aussi, et il est *a fortiori* A-lcd.

Deuxième cas : $\dim A > 1$.

PROPOSITION 2. — *Soit A un anneau noethérien intègre local complet de dimension* > 1. *Alors, pour tout $x \in m$ et non nul, A_x n'est pas un A-module* lcd.

Nous allons faire une récurrence sur $\dim A$ à partir de $\dim A = 2$. Dans ce cas, si A_x était un A-module lcd, ce serait un anneau local et comme tout idéal premier ne contenant pas x est de hauteur $\leqq 1$, il résulte de la proposition 1 (3) que l'on aurait $\dim A \leqq 1$, ce qui est absurde.

Supposons maintenant avoir démontré la proposition quand

$$2 \leqq \dim A < k,$$

et soit A de dimension k. Comme $A_x \neq K$, soit p un idéal premier non nul ne contenant pas x. Deux cas sont possibles :

(α) $\mathrm{prof}\, p \geqq 2$.

Alors $2 \leqq \dim A/p \leqq k-1$ et, comme l'image canonique $\bar{x}$ de x dans A/p n'est pas nulle, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $(A/p)_{\bar{x}}$ n'est pas A/p ou A-lcd, donc A_x n'est pas A-lcd sans quoi $A_x/p\,A_x = (A/p)_{\bar{x}}$ serait A-lcd.

(β) $\operatorname{prof} p < 2$.

Alors $\operatorname{prof} p = 1$ puisque $p \neq m$. L'idéal $A\,x$ n'est pas m-primaire, sans quoi $A/A\,x$ serait de longueur finie, et on aurait $\dim A \leqq 1$, soit donc q un idéal premier différent de m et contenant x. Comme $\operatorname{prof} p = 1$, $p \not\subset q$ et $p \not\subset \sqrt{A\,x}$, donc il existe $u \notin \sqrt{A\,x}$, et $u \in p$; en particulier, $x \notin \sqrt{A\,u}$. Considérons alors la A-algèbre $A' = A\,[u/x] \subset A_x$. L'idéal $m\,A'$ est propre; sinon on aurait une relation de la forme $1 = \mu + \lambda\,u/x^n$, où $\mu \in m$, soit $x^n\,(1 - \mu) = \lambda\,u$ et, comme $1 - \mu$ est inversible dans A, $x \in \sqrt{A\,u}$, ce qui est exclu. Si A_x était A-lcd, A' le serait aussi, et A' étant noethérien et local serait séparé et complet pour la topologie $m\,A'$-adique; comme $A'/m\,A'$ est alors un A/m espace vectoriel lcd, il est de dimension finie, et A' est un A-module de type fini puisque A est séparé et complet par hypothèse; ainsi u/x est entier sur A, et on a une relation de la forme

$$\frac{u^n}{x^n} + \lambda_1 \frac{u^{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{u}{x} + \lambda_n = 0,$$

d'où $u \in \sqrt{A\,x}$, ce qui est exclu. Donc A_x n'est pas A-lcd.

II. — Le théorème de structure

LEMME 1. — *Soit A un anneau noethérien. Pour tout idéal premier p, soit E_p l'enveloppe injective du A-module A/p. Alors, pour tout A-module M, l'enveloppe injective $E\,(M)$ de M s'écrit de façon unique sous la forme*

$$E\,(M) = \bigoplus\nolimits_{p \in \operatorname{Ass}_A M} E_p^{\mu(p,\,M)},$$

où les cardinaux $\mu\,(p, M)$ sont non nuls. Si M est lcd, *alors* $\operatorname{Ass}_A M$ *est fini ainsi que les cardinaux $\mu\,(p, M)$.*

La première assertion résulte de ce que les injectifs indécomposables sont les E_p, que tout injectif est somme directe d'injectifs indécomposables, et que $\operatorname{Ass}_A E_p = \{ p \}$ ([7], th. 2.4 et 2.5). La deuxième résulte du fait qu'il ne peut y avoir de somme directe infinie de sous-modules non nuls dans M. Ainsi si M est lcd, $\operatorname{Ass}_A M$ est fini, et il résulte de [2] (chap. 4, § 1, nº 1, prop. 4) que M admet une suite de composition finie

$$M_0 = (0) \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M_n = M$$

telle que, pour tout i, $\operatorname{Ass}_A (M_i/M_{i-1})$ soit réduit à un seul élément On est ainsi ramené à étudier les modules lcd dont l'assassin est réduit à un élément.

THÉORÈME. — *Soient* (A, m) *un anneau noethérien local complet,* M *un* A*-module* lcd *tel que* $\mathrm{Ass}_A M = \{ p \}$. *Alors :*

(i) *si* $p = m$, M *est un* A*-module artinien, sous-module d'un* E^n, *où* E *est l'enveloppe injective de* A/m;

(ii) *si* prof $p > 1$, M *est un* A*-module de type fini;*

(iii) *si* prof $p = 1$ *et* ht $p \geqq 1$, M *s'écrit sous la forme* $M = N + P$, *où* N *est de type fini et où* $P = P_p$ *est un* A_p*-module de longueur finie.* E_p *n'est pas* lcd;

(iv) *si* prof $p = 1$ *et* ht $p = 0$, *alors* E_p *est* A-lcd *et* M *est un sous-module d'un* E_p^n.

Inversement, tout A*-module* M *vérifiant l'une de ces quatre conditions est* lcd.

(i) résulte du lemme et du fait que E est artinien ([7], th. 4.2).

(iv) : On sait que E_p est un A_p-module et en tant que tel c'est l'enveloppe injective de $A_p/p\, A_p$ ([7], th. 3.6), comme ht $p = 0$, A_p est un anneau artinien et E_p un A_p-module de longueur finie, il suffit donc de montrer que A_p est A-lcd : or $A_p/p\, A_p$ est le corps des fractions de A/p, il est donc A-lcd puisque dim $A/p =$ prof $p = 1$ (prop. 1, cor. 2) et, pour tout n, $(p\, A_p)^n/(p\, A_p)^{n+1}$ est un $(A_p/p\, A_p)$-espace vectoriel de dimension finie, donc un A-module lcd, l'assertion en résulte, par récurrence sur l'entier r tel que $(p\, A_p)^r = 0$, compte tenu de ([2], chap. 3, § 2, exercice 15 (c)).

(ii) : Soit $a \notin p$. L'homothétie de rapport a dans M étant injective, elle est surjective dans $M^* = \mathrm{Hom}_A (M, E)$, et $(M^*)_a$ est un quotient de M^* : il est donc lcd. On va montrer que $Q = (M^*)_a = (0)$. Supposons en effet le contraire, comme E est un cogénérateur injectif, il existe φ non nul, $\varphi : Q \to E$, d'où

$$\varphi^{\sim} : \quad \mathrm{Hom}_A (Q, Q) \to \mathrm{Hom}_A (Q, E)$$

et

$$\varphi' : \quad A_a \to \mathrm{Hom}_{A_a} (Q, Q) \to \mathrm{Hom}_A (Q, Q) \xrightarrow{\varphi^{\sim}} \mathrm{Hom}_A (Q, E)$$

où les deux premières flèches sont canoniques. Comme $\mathrm{Hom}_A (Q, E)$ est lcd, il en est de même de $A_a/\ker \varphi'$, or si $u \in A_a$, $u \notin p\, A_a$, alors $Q = u\, Q$, et $\varphi'(u)[Q] = \varphi(u\, Q) = \varphi(Q) \neq 0$, donc $u \notin \ker \varphi'$, et il en résulte $\ker \varphi' \subset p\, A_a$, mais ceci entraîne que $A_a/p\, A_a$ est A-lcd ce qui est absurde puisque $A_a/p\, A_a = (A/p)_a$ et que dim $A/p > 1$ (prop. 2). Ainsi $Q = (0)$, ce qui prouve que $a \in \bigcap_{i=1}^n q_i$, où $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont les idéaux de $\mathrm{Ass}_A M^*$, et on a $(m - p) \subset \bigcap_{i=1}^n q_i$, d'où

$$m = p \cup (m - p) \subset p \cup \left(\bigcap_{i=1}^n q_i\right)$$

et comme $m \not\subset p$, $m \subset q_i$, $\forall\, i$, et $m = q_i$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$; M^* est donc artinien d'après (i), sous-module d'un E^n, $M^{**} = M$ est donc quotient d'un $\mathrm{Hom}_A(E^n, E) = A^n$: il est bien de type fini.

(iii) Il nous faut d'abord énoncer un lemme.

LEMME 2. — *Si* $\mathrm{Ass}_A M = p \neq m$ *et* $\mathrm{Ass}_A M^* = q \neq m$, *alors* $p = q$, $\mathrm{prof}\, p = \mathrm{prof}\, q = 1$ *et* M *est un* A_p*-module de longueur finie.*

Soit $a \in S = (A - p) \cap (A - q)$, l'homothétie de rapport a dans M (resp. M^*) est injective (resp. surjective), elle est donc bijective dans M et M^*, puisque $M^{**} = M$, et M et M^* sont deux $(S^{-1}A)$-modules. A tout homomorphisme non nul $\varphi : M \to E$ associons, comme en (ii), un homomorphisme φ',

$$\varphi' : \quad S^{-1}A \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M, M) \to \mathrm{Hom}_A(M, M) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}_A(M, E),$$

$\ker \varphi'$ est $(S^{-1}q)$-primaire puisque

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}A/\ker \varphi') \subset \mathrm{Ass}_{S^{-1}A} M^* = S^{-1}q$$

en particulier, $\ker \varphi' \subset S^{-1}q$, donc $S^{-1}A/S^{-1}q$ est A-lcd, puisque quotient d'un sous-module $(S^{-1}A/\ker \varphi')$ d'un module lcd (M^*). Comme p et q sont différents de m, il existe

$$x \in (m - p) \cap (m - q) \subset S \qquad \text{et} \qquad S^{-1}A/S^{-1}q = S^{-1}(A/q) \supset (A/q)_x;$$

$(A/q)_x$ est donc lcd, ce qui entraîne que $\mathrm{prof}\, q = 1$ (prop. 2). De même, $\mathrm{prof}\, p = 1$ et $S^{-1}p$, $S^{-1}q$ sont les idéaux maximaux de l'anneau semi-local $S^{-1}A$. Ceci étant, M est $(S^{-1}A)$-lcd et $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A} M = S^{-1}p$, donc M est un sous-$(S^{-1}A)$-module d'une somme directe finie de copies de l'enveloppe injective du $(S^{-1}A)$-module $S^{-1}A/S^{-1}p$; or ce module est artinien, car $S^{-1}p$ est maximal ([1], chap. I, prop. 1.8), et M est lui aussi $S^{-1}A$-artinien.

Je dis maintenant que M est séparé pour la topologie $(S^{-1}q)$-adique; soit $M' = \bigcap_{n=0}^{\infty} (S^{-1}q)^n M$; si on avait $M' \neq \{0\}$, on pourrait choisir $\varphi : M \to E$ tel que $\varphi(M') \neq 0$, mais comme il existe n tel que

$$\ker \varphi' \supset (S^{-1}q)^n, \quad \varphi((S^{-1}q)^n M) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(M') = 0,$$

ce qui est absurde. Comme M est $S^{-1}A$-artinien, la topologie $(S^{-1}q)$-adique est discrète, et il existe n tel que $(S^{-1}q)^n M = q^n M = 0$, donc $q \subset p$ et $p = q$ puisque $\mathrm{prof}\, q = 1$. Ainsi $S = \complement p$, $M = M_p$ est un $(A_p/(p A_p)^n)$-module artinien, il est donc de longueur finie.

Démontrons alors (iii) : $\mathrm{Ass}_A M^*$ contient au plus les deux éléments p et m, soit en effet $q \neq m$, appartenant à $\mathrm{Ass}_A M^*$, il existe $N' \subset M^*$ tel que $\mathrm{Ass}_A M^*/N' = \{q\}$, mais à cause de la dualité, il existe $N \subset M$

tel que $\mathrm{Hom}_A(M/N, E) = N'$, d'où $M^*/N' = \mathrm{Hom}_A(N, E)$; N est donc tel que $\mathrm{Ass}_A(N) = \{ p \}$ et $\mathrm{Ass}_A N^* = \{ q \}$, d'où $p = q$ d'après le lemme.

Trois cas sont donc possibles :

$$\mathrm{Ass}_A M^* = \{ p, m \}, \qquad \mathrm{Ass}_A M^* = \{ p \} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ass}_A M^* = \{ m \}.$$

Le dernier cas a été vu en (i), et le premier se ramène au second, car il existe $N \subset M$ tel que $\mathrm{Ass}\,(M/N)^* = \{ m \}$, $\mathrm{Ass}\, N^* = \{ p \}$, donc M/N étant de type fini, on peut écrire $M = N + P$, où P est de type fini; enfin, dans le second cas, on est dans les conditions d'application du lemme.

Si $\mathrm{ht}\, p \geqq 1$, E_p n'est pas lcd, car s'il l'était son annulateur contiendrait une puissance de p et comme il est d'autre part A_p-fidèle, $p A_p$ serait nilpotent et p serait minimal dans A, ce qui contredit $\mathrm{ht}\, p \geqq 1$.

Les réciproques des assertions (i), (ii) (iii), (iv) sont évidentes.

COROLLAIRE. — *Soit A un anneau local complet noethérien intègre de dimension > 1, M un A-module sans torsion. Pour que M soit* lcd, *il faut et il suffit qu'il soit de type fini.*

En effet, $\mathrm{Ass}_A M = \{ (0) \}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALLET (B.). — *Topologies linéaires et modules artiniens* (*Thèse Sc. math.*, Orsay, 1971).

[2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*. Chap. 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961, 1965, 1966 (*Act. scient. et ind.*, 1283, 1308, 1314; *Bourbaki*, 28, 30, 31).

[3] GOBLOT (R.). — *Sur deux classes de catégories de Grothendieck* (*Thèse Sc. math.*, Lille, 1971).

[4] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de Géométrie algébrique*. Chap. 4 (Première partie). — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 20).

[5] KAPLANSKY (I.). — Maximal fields with valuations, *Duke math. J.*, t. 9, 1942, p. 303-321.

[6] MATLIS (E.). — Injective modules over Prüfer rings, *Nagoya math. J.*, t. 15, 1959, p. 57-69.

[7] MATLIS (E.). — Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. of Math.*, t. 8, 1958, p. 511-528.

(Texte définitif reçu le 26 mai 1972.)

Bernard BALLET,
58, chemin des Caillols,
13012 Marseille.